

Задачи ко Дню Программиста

Задача 1. (Предложил Иван Аржанцев) а) Пусть S – такое подмножество множества целых чисел, что $a + b$ лежит в S для любых a и b из S . Докажите, что в S найдется конечное подмножество, (многократно) складывая элементы которого можно получить любое число из S .

б) Приведите пример такого подмножества S множества векторов с целыми координатами на координатной плоскости, что $a + b$ лежит в S для любых a и b из S , и для любого конечного подмножества F в S найдется вектор из S , который нельзя получить (многократным) сложением векторов из F .

Задача 2. (Предложил Александр Шень) Пусть $\mathbb{Z}_{2015}$ – множество вычетов по модулю 2015 и $f: \mathbb{Z}_{2015} \rightarrow \mathbb{Z}_{2015}$ – отображение, для которого $f(x + y) = f(x) + f(y)$ для не менее чем 99 процентов пар (x, y) . Докажите, что найдется отображение $\varphi: \mathbb{Z}_{2015} \rightarrow \mathbb{Z}_{2015}$, для которого $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ для любых $x, y \in \mathbb{Z}_{2015}$, и $f(x) = \varphi(x)$ для не менее чем 90 процентов вычетов x из $\mathbb{Z}_{2015}$.