**Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования   
"Национальный исследовательский университет   
"Высшая школа экономики"**

Факультет экономических наук

Департамент математики

**Рабочая программа дисциплины**

**Дополнительные главы линейной алгебры**

для уровня подготовки – бакалавриат

Разработчик программы

Д.И.Пионтковский, доктор физико-математических наук, dpiontkovski@hse.ru

Одобрена к реализации на заседании комиссии

«\_\_\_»\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 2017 г.

Утверждена «\_\_\_»\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 2017 г.

Руководитель Методического центра ДООП

«\_\_\_»\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 2017 г.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ [подпись]

Москва, 2017

*Настоящая программа не может быть использована другими подразделениями университета и другими вузами без разрешения кафедры-разработчика программы.*

# Место дисциплины в структуре образовательной программы

Настоящая дисциплина является факультативной.

Для освоения учебной дисциплины требуются знания и компетенции, предусмотренные любым из начальных бакалаврских курсов «Линейная алгебра», «Алгебра», «Линейная алгебра и геометрия» или «Основы высшей математики».

Основные положения дисциплины могут быть использованы в дальнейшем при изучении следующих дисциплин:

* Численные методы;
* Дифференциальные уравнения;
* Функциональный анализ;
* Анализ данных;
* Машинное обучение;
* Многомерная оптимизация.

# Тематический план учебной дисциплины

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № | **Название темы** | **Всего часов** | **В т.ч. лекции** | **В т.ч. семинары** | **Самост. работа** |
| 1 | Псевдообратная матрица и метод наименьших квадратов | 20 | **4** | **4** | 12 |
| 2 | Интерполяционные многочлены | 10 | **2** | **2** | 6 |
| 3 | Метрики и нормы | 20 | **4** | **4** | 12 |
| 4 | Многочлены Чебышева | 10 | **2** | **2** | 6 |
| 5 | Матричные нормы | 24 | **4** | **4** | 16 |
| 6 | Оценки погрешности | 20 | **4** | **4** | 12 |
| 7 | Функции от матриц | 12 | **2** | **2** | 8 |
| 8 | Численные методы решения задач линейной алгебры | 36 | **6** | **6** | 24 |
| **Итого** |  | 152 | **28** | **28** | 96 |

# Формы контроля знаний студентов

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Тип контроля | Форма контроля | 1 год | | | | Параметры |
| 1 | 2 | 3 | 4 |  |
| Текущий  (неделя) | Контрольная работа | 1 | 1 |  |  |  |
| Итоговый | Зачет |  |  |  |  | Итоговая оценка выставляется по итогам промежуточного контроля |

## Критерии оценки знаний, навыков

При текущем контроле студент должен продемонстрировать знание и понимание пройденного материала, владение навыками решения типовых задач, умение применять известные из лекций схемы теоретических рассуждений.

Оценки по всем формам текущего контроля выставляются по 10-ти балльной шкале.

## Порядок формирования оценок по дисциплине

Контроль знаний студентов включает только формы текущего, итоговая оценка выставляетс по его итогам. Текущий контроль осуществляется в виде контрольных работ. Итоговый контроль осуществляется в виде зачетной контрольной работы. Итоговая оценка Оитог по 10-балльной шкале формируется как взвешенная сумма Оитог=0,5\*Ок.р.+0,5\*Озач, округленная до целого числа баллов. Ок.р. и Озач обозначают оценки по 10-балльной шкале за первую и вторую контрольную работу соответственно. Способ округления результирующей оценки по учебной дисциплине арифметический.

Кроме того, предусмотрена возможность автоматического получения студентом зачета. Для его получения студент должен написать первую контрольную не ниже чем на оценку 8 и самостоятельно проработать и сделать доклад по дополнительной теме, развивающей одну из тем курса. Оценка за доклад при этом учитывается как Озач в приведенной выше формуле.

В дополнение, отдельным студентам может быть выставлена дополнительная (бонусная оценка) за активность на занятиях, выраженную в успешном решении задач на занятиях и в текущих домашних заданиях. Эта оценка приплюсовывается к оценке за соответствующую контрольную.

На пересдаче студенту предоставляется возможность получить дополнительный балл для компенсации оценки за текущий контроль.

# Содержание дисциплины

***Тема I.*** **Псевдообратная матрица и метод наименьших квадратов**

Псевдообратная матрица (обратная Мура--Пенроуза), ее определения, основные свойства и способы вычисления. Скелетное разложение и сингулярное разложение комплексной матрицы, нахождение псевдообратной с их помощью.

Основы метода наименьших квадратов, решение линейной задачи на метод наименьших квадратов с помощью псевдообратной матрицы. Понятие о линейной регрессии, примеры решения практических задач.

***Литература:*** *основная*: [Б], глава IV, [Ш], гл. 8

*дополнительная:* [AEP], Appendix D

***Тема II.*** **Интерполяционные многочлены**

Задача полиномиальной интерполяции. Интерполяционный многочлен Лагранжа,связть с определителем Вандермонда. Задача полиномиальной интерполяции с кратными узлами. Интерполяционный многочлен Эрмита (Лагранжа--Сильвестра): существование, единственность, примеры нахождения.

Сплайны. Кривые Безье.

***Литература:*** *основная*: [Ш], гл. 7; [БЖК], гл. 2

***Тема III.*** **Метрики и нормы**

Метрики в нормированных пространствах. Открытые и замкнутые множества в метрических пространствах, окрестности, связь с понятием предела. Теорема Минковского о характеризации единичного шара нормированного конечномерного пространства. Эквивалентность норм и эквивалентность топологий. Теорема об эквивалентности норм в конечномерных пространствах.

***Литература:*** *основная*: [Б], глава I; [КФ], с.48-66; [Ш], 8.23

*дополнительная:* [Р] , с.493-503

***Тема IV.*** **Многочлены Чебышева**

Примеры норм и метрик в пространствах функций, связь с задачами аппроксимации.

Многочлены Чебышева как наименее уклоняющиеся от нуля, их графики. Ортогональность, разложение многочленов по базису из многочленов Чебышева.

***Литература:*** *основная*: [БЖК], с.58-62,

дополнительная: [Д], с.25-58

***Тема V.*** **Матричные нормы**

Матричные нормы, их связь с векторными нормами. Нормы Гельдера и норма Фробениуса. Спектральный радиус, связь с нормами.

***Литература:*** *основная*: [Б], с.67-86; [Ш], 8.23

дополнительная: [АЛ], с.91-105.

***Тема VI.*** **Оценки погрешности**

Число обусловленности матрицы. Связь с обусловленностью систем линейных уравнений. Примеры приближенного решения систем линейных уравнений. Оценки погрешностей при вычислении обратной матрицы и при решении матричных уравнений.

***Литература:*** *основная*: [Б], глава III, [Ш], глава 8

*дополнительная*: [Г], с.64-75.

***Тема VII****.* **Функции от матриц**

Функции от матриц (определение через спектр). Многочлены от матриц, минимальный многочлен матрицы. Матричные ряды. Представление элементарных функций от матриц рядами Тейлора. Вычисление матричных функций и оценка остаточного члена через спектральный радиус. Вычисление функций от матриц через многочлены Лагранжа-Сильвестра.

***Литература:*** *основная*: [Б], с.56-113; , [Ш], глава 7; [В], с.249-260;

*дополнительная*: [Г], с.64-75

***Тема VIII.*** **Численные методы решения задач линейной алгебры**

Методы решения больших систем линейных уравнений: обзор и примеры. Итерационные методы решения систем линейных уравнений.

Проблема собственных значений.Оценки собственных значений, теоремы Гершгорина. Фробениусова нормальная форма матрицы. Методы вычисления характеристического многочлена, собственных значений и собственных векторов

***Литература:*** *основная*: [Б], с.235-258; [Ш], глава 10, 11 и приложение

*дополнительная*: [АЛ], с.125-128;

# Образовательные технологии

Проводятся стандартные лекционно-семинарские занятия и регулярные консультации с ответами на вопросы студентов.

# Оценочные средства для текущего контроля и аттестации студента

## Вопросы для оценки качества освоения дисциплины

Для оценки качества освоения дисциплины можно использовать задачи из типового варианта зачетной работы, приведенного ниже.

## Примеры заданий промежуточного /итогового контроля

**Типовой вариант контрольной работы**



# Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

## Базовый учебник

[Б] Беклемишев Д.В., Дополнительные главы линейной алгебры, СПБ, изд. Лань, 2008

## Основная литература

[AEP] Aleskerov F., Ersel H., Piontkovski D., *Linear Algebra for Economists.* Berlin—Heidelberg, Springer, 2011

[В] Винберг Э.Б., Курс алгебры, М., изд. МГУ, 2002 (и последующие издания)

[БЖК] Бахвалов Н., Жидков Н., Кобельков Н., Численные методы, М., изд. Бином, 2003.

[КФ] Колмогоров А.Н., Фомин С.В., Элементы теории функций и функционального анализа, М., изд. Наука, 1976.

**[Ш] Шевцов Г.С. Линейная алгебра: теория и прикладные аспекты: учебное пособие, М., Финансы и статистика, 2003.**

## Дополнительная литература

[АЛ] Артамонов В.А., Латышев В.Н., Линейная алгебра и выпуклая геометрия, М., изд. Факториал, 2004.

[Г] Гордин В.А., Как это посчитать, М., изд. МЦНМО, 2005.

[Д] Данилов А.Ю., Многочлены Чебышева, М., 2003.

# [Н] Нестеров Ю.Е. Введение в выпуклую оптимизацию. М., МЦНМО, 2010

[ШКМ] **Шевцов Г.С., Крюкова О.Г., Мызникова Б.И.. Численные методы линейной алгебры.** М., Лань, 2011.

## Справочники, словари, энциклопедии не используются

## Программные средства

Выбор программных средств для реализации алгоритмов осуществляется студентом.

В домашних заданиях для рутинных алгебраических вычислений возможно использование систем Maple или Mаtlab, а также специализированных библиотек для C++ и Python.

## Дистанционная поддержка дисциплины

Предусмотрена электронная переписка со студентами.