# План занятий

*Данный план прежде всего стоит считать приближенным и крайне оптимистическим. Ввиду того, что факультатив носит подтягивающий характер, реальное содержание и темп занятий в большей степени указано в скобках и будет определяться наличием вопросов и сложностей с текущим материалом у аудитории. Дополнительные темы помечены звездочкой.*

## Занятие 1. (числа)

Алгебра множеств. Понятие об аксиоматике натурального ряда; аксиоматика арифметических действий. Понятие кольца на примере Z. Понятие поля на примере Q. Простейшие доказательства нерационализуемости. R как сечение Дедекинда, существование и единственность суммы, произведения, частного. Понятие порядка. Понятие непрерывного поля; R как непрерывное упорядоченное поле.

## Занятие 2. (индукция и неравенства)

Понятие математической индукции. Доказательство принципа математической индукции. Примеры некорректного использования принципа математической индукции на примере задач доказательства оценки. Примеры доказательств по индукции: бином Ньютона, неравенство Бернулли, неравенство о средних, базовое неравенство на число е.

## Занятие 3. (мощности множеств)

Алгебра множеств. Понятие биекции; классы эквивалентности. Понятие равномощности. Понятие счетного множества; мощность Z, Q. Понятие множества всех подмножеств; множества континуальной мощности. Равномощность отрезка, интервала, луча, прямой. Мощность объединения множеств. Диагональный процесс Кантора. Равномощность отрезка и квадрата. Примеры гиперконтинуального множества.

## Занятие 4.0. (точные грани)

Понятие ограниченности множества; мажоранта, миноранта. Понятия точных верхней и нижней граней (супремум и инфинуум). Теорема о наличии точных граней; связь точных граней со структурой поля R. Примеры задач на поиск точных граней.

## Занятие 4.1. (предел последовательности)

Понятие предела последовательности. Арифметические действия с пределами. Доказательство предела последовательности по определению; использование оценок и полученных ранее неравенств. Понятие бесконечно малой последовательности; ограниченной последовательности; бесконечно большой последовательности. Лемма о пределе произведения ограниченной и бесконечно малой последовательности.

## Занятие 5. (методы нахождения пределов)

Базовые пределы полиномиальных и экспоненциальных последовательностей (по определению). Методы поиска предела последовательности: теорема Вейерштрасса о монотонной ограниченной последовательности, теорема о двух полиционерах, телескопический признак. Теорема Теплица.

## Занятие 6.0. (рекурентные соотношения)

Понятие рекурентного соотношения: вавилонский алгоритм поиска корня из 2. Линейные рекуренты произвольного порядка. Характеристическое уравнение рекуренты; алгоритм решения линейной рекуренты. Случай кратных корней характеристического уравнения\*. Предел рекурентного соотношения. Применения принципа математической индукции и теоремы Вейерштрасса для поиска предела рекуренты.

## Занятие 6.5. (число е)

Введение числа е. Доказательство базового неравенства числа е. Применение теоремы Вейерштрасса для доказательства сходимости введенных последовательностей. Понятие о непрерывности экспоненты. Применение определения числа е при нахождении предела.

## Занятие 7.0. (предельные точки)

Классификация положения точек в пространстве (на примере плоскости): граничные точки, внутренние точки, изолированные точки. Два определения предельной точки, их эквивалентность. Понятия замкнутого и открытого множества, свойства их объединений. Предельные точки последовательности; пример последовательности с континуумом предельных точек.

## Занятие 7.5\*. (рациональные приближения)

Понятие рационального приближения; леммы о существовании линейного и квадратичного рационального приближения. Понятие цепной дроби. Алгоритм Евклида, “вытягивание носов”. Самое иррациональное число. Предельные точки последовательности x\_n=sin(n) как результат теоремы о рациональном приближении.

## Занятие 8. (критерий Коши)

Понятие фундаментальной последовательности; отрицание критерия Коши. Примеры фундаментальных и нефундаментальных последовательностей. Понятие полного пространства, примеры. Понятие минимального пополнения (теорема Хаусдорфа). R как хаусдорфово пополнение Q.

## Занятие 9. (предел функции)

Понятие предела в точке по Коши и по Гейне. Примеры нахождения предела функции по определению; пример доказательства отсутствия предела. Функция Дирихле, функция Римана (поп-корн). Пределы рациональных функций. Пределы функций, оперирующих целой частью.

## Занятие 10. (непрерывность, замечательные пределы)

Понятие непрерывной функции в точке; классификация точек разрыва. Непрерывность функции Дирихле, функции Римана. Теорема о двух полиционерах. Первый замечательный предел и следствия из него. Второй замечательный предел и следствия из него. Непрерывность элементарных функций. Понятие о множестве Кантора и непрерывность его сигнальной функции; непрерывность “чертовой лестницы”\*. Равномерная непрерывность: примеры.

## Занятие 11. (эквивалентности и о-нотация)

О-символика. Понятие о-малого; два определения понятия О-большого и их эквивалентность. Арифметические действия с О-большими/о-малыми. Отношение эквивалентности. Понятие главной части. Замечательные пределы и следствия из них как эквивалентности; примеры некорректного использования в процессе подсчета пределов.

## Занятие 12. (дифференцируемость, правило Лопиталя)

Понятие производной; понятие дифференцируемой функции. Производные сложной функции, обратной функции, параметрической функции. Вторая производная параметрической функции. Теоремы Роля, Лагранжа, Коши, необходимость их условий. Достаточный признак равномерной непрерывности в терминах производной. Правила Лопиталя, примеры использования, случаи некорректной работы.

## Занятие 13. (экстремумы)

Понятие экстремума, стационарной точки, седловой точки. Необходимое условие экстремума. Достаточные условия экстремума в терминах знака производной; производных высших порядков. Понятие неявной функции. Дифференцирование неявной функции, поиск и классификация экстремумов.

## Занятие 14. (ряд Тейлора)

Производные старших порядков элементарных функций. Приближение функций многочленами; многочлен Тейлора. Остаточные члены в форме Пеано, Коши, Лагранжа. Понятие радиуса сходимости ряда. Ряды Маклорена, разложение на бесконечности. Разложение с помощью дифференцирования. Произведение рядов (правило треугольника). Композиция рядов. Использование разложений для подсчета пределов.

## Занятие 15. (численные методы)\*

Методы поиска корней уравнения: серединное деление, метод хорд, метод Ньютона, итерационный метод. Представление о принципе сжимающих отображений. Методы поиска экстремумов на основе методов решения уравнений. Разностные схемы (симметричная, Кранка-Николсона) для численного подсчета производных первого и второго порядка; оценка погрешностей.