

Правительство Российской Федерации

**Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»**

**Факультет Компьютерных наук
Департамент больших данных и информационного поиска**

УТВЕРЖДАЮ
Академический руководитель
образовательной программы
по направлению 01.03.02
«Прикладная математика и информатика»
А.С. Конушин

_____ 2017 г.
«__» _____

Программа дисциплины

Дополнительные главы теории вероятностей

Для направления 01.03.02 «Прикладная математика и информатика» подготовки бакалавров

Автор программы:

д.ф.-м.н. Шабанов Д.А.

Одобрена на заседании Департамента больших данных и информационного поиска

«__» _____ 2017г.

Руководитель департамента

_____ В.В. Подольский

Рекомендована Академическим советом

образовательной программы

«Прикладная математика и информатика»

«__» _____ 2017

г.

Менеджер Департамента больших данных и информационного поиска

Москва, 2017



Настоящая программа не может быть использована другими подразделениями университета и другими вузами без разрешения кафедры-разработчика программы

1 Область применения и нормативные ссылки

Настоящая программа учебной дисциплины «Дополнительные главы теории вероятностей» (2-ый год обучения) устанавливает минимальные требования к знаниям и умениям студента и определяет содержание и виды учебных занятий и отчетности.

Программа предназначена для преподавателей, ведущих данную дисциплину, учебных ассистентов и студентов направления подготовки 01.03.02 «Прикладная математика и информатика», обучающихся по бакалаврской программе «Прикладная математика и информатика» изучающих дисциплину «Дополнительные главы теории вероятностей».

Программа разработана в соответствии с:

- образовательным стандартом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования НИУ ВШЭ подготовки бакалавров по направлению 010400.62 «Прикладная математика и информатика»;
- Образовательной программой подготовки бакалавров по направлению 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»,
- Рабочим учебным планом университета подготовки бакалавров по направлению 01.03.02 «Прикладная математика и информатика», утвержденным в 2015г.

2 Цели освоения дисциплины

Цель освоения дисциплины «Дополнительные главы теории вероятностей» — познакомить слушателей с понятиями, фактами и методами теории вероятностей, не вошедшими в базовый курс «Теория вероятностей и математическая статистика», а также с различными возможными приложениями для статистической обработки реальных данных.

3 Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины

В результате освоения дисциплины студент должен:

- Знать основные понятия теории вероятностей и теории случайных процессов, их основные результаты и математические методы анализа.
- Уметь применять математические методы и модели к анализу случайных явлений для их адекватного описания и понимания.
- Владеть навыками решения стандартных задач теории вероятностей и теории случайных процессов, а также применением основных аналитических инструментов для анализа вероятностных и статистических задач.



В результате освоения дисциплины студент осваивает следующие компетенции:

| Компетенция | Код по ФГОС/ НИУ | Дескрипторы – основные признаки освоения (показатели достижения результата) | Формы и методы обучения, способствующие формированию и развитию компетенции |
|------------------|------------------|---|---|
| Общенаучная | ОНК-1 | Способность к анализу и синтезу на основе системного подхода | Стандартные (лекционно-семинарские) |
| Общенаучная | ОНК-2 | Способность перейти от проблемной ситуации к проблемам, задачам и лежащим в их основе противоречиям | Стандартные (лекционно-семинарские) |
| Общенаучная | ОНК-3 | Способность использовать методы критического анализа, развития научных теорий, опровержения и фальсификации, оценить качество исследований в некоторой предметной области | Стандартные (лекционно-семинарские) |
| Общенаучная | ОНК-4 | Готовность использовать основные законы естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности, применять методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования при работе в какой-либо предметной области | Стандартные (лекционно-семинарские) |
| Общенаучная | ОНК-5 | Готовность выявить естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, привлечь их для решения соответствующий аппарат дисциплины | Стандартные (лекционно-семинарские) |
| Общенаучная | ОНК-6 | Способность приобретать новые знания с использованием научной методологии и современных образовательных и информационных технологий | Стандартные (лекционно-семинарские) |
| Общенаучная | ОНК-7 | Способность порождать новые идеи (креативность) | Стандартные (лекционно-семинарские) |
| Профессиональные | ПК-1 | Способность демонстрации общенаучных базовых знаний естественных наук, математики и информатики, понимание основных фактов, концепций, | Стандартные (лекционно-семинарские) |



| | | | |
|------------------|------|---|-------------------------------------|
| | | принципов теорий, связанных с прикладной математикой и информатикой | |
| Профессиональные | ПК-2 | способность понимать и применять в исследовательской и прикладной деятельности современный математический аппарат | Стандартные (лекционно-семинарские) |
| Профессиональные | ПК-3 | способность в составе научно-исследовательского и производственного коллектива решать задачи профессиональной деятельности в соответствии с профилем подготовки, общаться с экспертами в других предметных областях | Стандартные (лекционно-семинарские) |
| Профессиональные | ПК-4 | способность критически оценивать собственную квалификацию и её востребованность, переосмысливать накопленный практический опыт, изменять при необходимости вид и характер своей профессиональной деятельности | Стандартные (лекционно-семинарские) |
| Профессиональные | ПК-8 | способность решать задачи производственной и технологической деятельности на профессиональном уровне, включая разработку математических моделей, алгоритмических и программных решений | Стандартные (лекционно-семинарские) |

4 Место дисциплины в структуре образовательной программы

«Дополнительные главы теории вероятностей» является самостоятельной учебной дисциплиной, относится к математическому и естественнонаучному циклу дисциплин. Для специализации 01.03.02 «Прикладная математика и информатика» настоящая дисциплина является факультативной.

Для освоения учебной дисциплины студенты должны владеть знаниями и навыками в объеме программы средней школы по математике и освоить учебные курсы:

- Дискретная математика,
- Математический анализ-1,-2,-3,
- Линейная алгебра и геометрия,
- Теория вероятностей и математическая статистика (в объеме 1 и 2 модулей).



Основные положения дисциплины могут быть использованы в дальнейшем при изучении следующих дисциплин:

- Машинное обучение;
- Эконометрика;
- Статистика случайных процессов.

5 Тематический план учебной дисциплины

| № | Название раздела | Всего часов | Аудиторные часы | | | Самостоятельная работа |
|---|-------------------------------|-------------|-----------------|----------|----------------------|------------------------|
| | | | Лекции | Семинары | Практические занятия | |
| 1 | Случайное блуждание | 12 | 6 | | | 6 |
| 2 | Ветвящиеся случайные процессы | 8 | 4 | | | 4 |
| 3 | Случайные графы | 16 | 8 | | | 8 |
| 4 | Пуассоновский процесс | 4 | 2 | | | 2 |
| 5 | Мартингалы | 12 | 6 | | | 6 |
| 6 | Броуновское движение | 12 | 6 | | | 6 |
| 7 | Марковские цепи | 8 | 4 | | | 4 |
| 8 | Элементы теории информации | 8 | 4 | | | 4 |
| | Итого: | 80 | 40 | | | 40 |

6 Формы контроля знаний студентов

| Тип контроля | Форма контроля | 2 год | | | | Кафедра | Параметры |
|---------------|------------------|-------|---|---|---|-------------------|-----------|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | | |
| Текущий | | | | | | | |
| | Домашнее задание | | | 1 | 1 | Всего 40-50 задач | |
| Промежуточный | Экзамен | | | | 1 | Устный экзамен | |

6.1 Критерии оценки знаний, навыков

В рамках курса студенты должны выполнить две домашние письменные работы и сдать экзамен (4 модуль). Каждое задание и экзамен оцениваются по 10-балльной шкале. Домашние задания заключаются в решении задач. Проверяется ответ и ход решения. На экзамене также необходимо изложить теоретический лекционный материал.

6.2 Порядок формирования оценок по дисциплине

Промежуточный контроль



Накопленная оценка (3-й и 4-й модули) за текущий контроль формируется из оценок за домашние задания:

$$O_{\text{накопленная}} = 0,5 * O_{\text{д/з1}} + 0,5 * O_{\text{д/з2}}.$$

Итоговая оценка рассчитывается следующим образом:

$$O_{\text{итог}} = 0,8 * O_{\text{накопленная}} + 0,2 * O_{\text{экз.}}$$

Все оценки выставляются по 10-балльной системе, способ округления всегда арифметический.

7 Содержание дисциплины

Раздел 1. Случайное блуждание.

Простейшее случайное блуждание на прямой. Использование чисел Каталана для подсчета числа ``неотрицательных" и ``положительных" траекторий случайного блуждания, приходящих в нуль за время $2n$. Теорема о распределении первого момента возвращения в нуль для простейшего случайного блуждания. Теорема о вероятности возвращения в нуль. Равномерная интегрируемость семейства случайных величин. Критерий равномерной интегрируемости сходящейся по распределению последовательности случайных величин (б/д). Достаточное условие равномерной интегрируемости последовательности случайных величин. Теорема об асимптотическом поведении времени, проведенном симметричным случайным блужданием в нуле за время n . Теорема Берри - Эссеена (б/д) и следствие о вероятности большого отклонения для симметричного случайного блуждания. Лемма Бореля - Кантелли (б/д) и лемма о вероятности большого отклонения для максимума сумм симметричных случайных величин. Закон повторного логарифма для простейшего симметричного случайного блуждания на прямой. Смысл закона повторного логарифма.

Раздел 2. Ветвящиеся процессы.

Производящие функции случайных величин, их основные свойства. Ветвящиеся процессы Гальтона - Ватсона. Соотношение между производящими функциями числа частиц в n -м и $(n+1)$ -м поколениях. Вывод уравнения для вероятности вырождения процесса. Теорема о вероятности вырождения ветвящегося процесса. Общее число частиц в ветвящемся процессе, уравнение для его производящей функции. Докритические и надкритические ветвящиеся процессы, предельная теорема в надкритическом случае.

Раздел 3. Случайные графы.

Пороговые вероятности и пороговые функции обладания монотонными свойствами случайным графом. Критерий того, что данная функция является пороговой вероятностью для монотонного свойства. Теорема о существовании пороговой вероятности для произвольного монотонного свойства случайного графа. Определение точной пороговой вероятности для монотонного свойства, примеры. Малые подграфы в случайном графе $G(n,p)$. Методы первого и второго моментов, их применение для нахождения пороговой вероятности нахождения копии фиксированного графа в случайном графе $G(n,p)$. Метод моментов, пуассоновская предельная теорема для числа копий фиксированного строго сбалансированного графа в случайном графе $G(n,p)$. Многомерный вариант пуассоновской предельной теоремы (б/д). Неравенство Чернова (напоминание). Эволюция случайного графа $G(n,p)$. Случай $np=c<1$: теорема о максимальном размере компоненты связности, лемма об отсутствии сложных компонент. Случай $np=c\neq 1, c>0$.



Подсчет числа унициклических графов, формула Кэли для деревьев. Асимптотика среднего и дисперсии общего числа вершин в унициклических компонентах случайного графа. Случай $pr=c>1$. Теорема о размере гигантской компоненты случайного графа. Центральная предельная теорема для размера максимальной связной компоненты (б/д). Связность случайного графа $G(n,p)$. Пуассоновская предельная теорема для числа изолированных вершин. Теорема о предельной вероятности связности $G(n,p)$ при условии $p=(\ln n +c+o(1))/n$. Теорема о точной пороговой вероятности свойства связности $G(n,p)$.

Раздел 4. Пуассоновский процесс.

Пуассоновский процесс постоянной интенсивности как процесс с независимыми приращениями. Явная конструкция пуассоновского процесса: процесс восстановления для экспоненциальных случайных величин. Следствие из явной конструкции: свойства траекторий пуассоновского процесса.

Раздел 5. Мартингалы.

Понятие фильтрации на вероятностном пространстве, согласованность случайного процесса с фильтрацией, естественная фильтрация случайного процесса. Марковские моменты и моменты остановки. Мартингалы, субмартингалы и супермартингалы. Критерий мартингальности для процессов с независимыми приращениями. Примеры мартингалов и субмартингалов. Теорема об остановке и следствие из нее. Задача о разорении игрока. Опциональные моменты и теорема об остановке для случая непрерывного времени (б/д). Пример ее применения: теорема об оценке вероятности разорения в модели страхования Крамера-Лундберга.

Раздел 6. Броуновское движение.

Гауссовские процессы. Основные свойства ковариационной функции случайного процесса, критерий существования гауссовского процесса (б/д). Винеровский процесс, два эквивалентных определения. Свойства траекторий винеровского процесса: непрерывность, недифференцируемость, закон повторного логарифма (все - б/д). Локальный закон повторного логарифма. Строго марковское свойство винеровского процесса. Принцип отражения для винеровского процесса. Первый момент достижения винеровским процессом уровня x , как момент остановки. Совместное распределение максимума винеровского процесса на отрезке $[0,t]$ и его значения в точке t . Теорема Башелье.

Раздел 7. Марковские цепи.

Марковские цепи с дискретным временем, эквивалентность определений. Фазовое пространство, переходные вероятности и начальное распределение марковской цепи. Лемма о свойствах переходных вероятностей, уравнения Колмогорова-Чепмена. Однородные марковские цепи. Примеры: простейшее случайное блуждание на прямой и ветвящиеся процессы Гальтона - Ватсона. Стационарное и предельное распределения однородной марковской цепи. Свойства цепи с начальным стационарным распределением. Эргодическая теорема для марковских цепей с дискретным временем. Стационарность и предельность эргодического распределения марковской цепи. Классификация состояний однородной марковской цепи: существенные и несущественные, неразложимые классы. Понятие периода состояния, лемма о периоде неразложимого класса. Циклические подклассы неразложимого класса с периодом больше 1.

Раздел 8. Элементы теории информации.

Энтропия распределения дискретной случайной величины (вектора), совместная и условная энтропия. Основные свойства энтропии. Неравенство Ширера. Задача о чисел



независимых множеств в регулярных графах, гипотеза Алона. Доказательство гипотезы для двудольных графов с помощью энтропии. Доказательство гипотезы в общем случае.

8 Образовательные технологии

В учебном процессе используются следующие образовательные технологии:

| № п/п | Вид занятия | Форма проведения занятий | Цель |
|-------|---------------------------------|-------------------------------------|---|
| 1 | Лекция | Изложение теоретического материала. | Получение теоретических знаний по предмету. |
| 2 | Самостоятельная работа студента | Решение задач. | Усовершенствование практических навыков. |

9 Оценочные средства для текущего контроля и аттестации студента

9.1 Вопросы для оценки качества освоения дисциплины

Раздел 1.

1. Дайте определение простейшего случайного блуждания.
2. В чем состоит достаточное условие равномерной интегрируемости последовательности случайных величин?
3. При каких условиях на вероятность шага вправо p случайное блуждание возвратно с вероятностью 1?
4. Сформулируйте закон повторного логарифма для случайного блуждания.

Раздел 2.

1. Дайте определение ветвящегося процесса Гальтона-Ватсона.
2. Каково уравнение для нахождения вероятности вырождения ветвящегося процесса?

Раздел 3.

1. Приведите примеры возрастающего и убывающего свойств графов.
2. Какова пороговая вероятность наличия треугольника в случайном графе?
3. Чему равна точная пороговая вероятность для свойства связности?

Раздел 4.

1. Приведите основные свойства траекторий пуассоновского процесса.
2. В чем состоит явная конструкция пуассоновского процесса?
3. Дайте определение пуассоновского процесса.

Раздел 5.

1. Что такое марковский момент?
2. В чем состоит теорема об остановке для мартингалов?
3. Какова оценка вероятности разорения в модели страхования Крамера-Лундберга?



Раздел 6.

1. Дайте два эквивалентных определения броуновского движения.
2. Сформулируйте строго марковское свойство броуновского движения.
3. В чем состоит критерий существования для гауссовских процессов?
4. Является ли броуновское движение мартингалом?

Раздел 7.

1. Является ли простейшее случайное блуждание марковской цепью?
2. Сформулируйте эргодическую теорему.
3. В чем состоят свойства переходных вероятностей?
4. Приведите пример неразложимой марковской цепи.

Раздел 8.

1. Что такое условная энтропия?
2. Сформулируйте основные свойства энтропии.
3. Сформулируйте неравенство Ширера.

10 Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

10.1 Базовые учебники

1. Ширяев А.Н. Вероятность. В 2-х кн., 6-е изд., М.: МЦНМО, 2016
2. Булинский А. В., Ширяев А. Н. Теория случайных процессов. - М.: Физматлит, 2005.
3. A. Frieze, M. Karonski. Introduction to random graphs. - Cambridge University Press, Cambridge, 2015

10.2 Основная литература

1. Севастьянов Б. А. Курс теории вероятностей и математической статистики. - 2-е изд. - М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004.
2. Боровков А. А. Теория вероятностей. - 4-е изд. - М.: Едиториал УРСС, 2003.
3. B. Bollobas. Random graphs - Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
4. S. Jansen, T. Luczak, A. Rucinski. Random graphs. - Wiley-Interscience, New York, 2000.

10.3 Дополнительная литература

1. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. В 2-х т. - М.: Мир, 1984.
2. Вентцель А. Д. Курс теории случайных процессов. - 2-е изд. - М.: Наука. Физматлит, 1996.