**Правительство Российской Федерации**

**Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования  
«Национальный исследовательский университет   
«Высшая школа экономики»**

**Факультет Компьютерных наук**

**Департамент больших данных и информационного поиска**

УТВЕРЖДАЮ

Академический руководитель

образовательной программы

по направлению 01.03.02

«Прикладная математика и информатика»

А.С. Конушин

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

«\_\_\_» \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 2017 г.

**Программа дисциплины**

**Дополнительные главы математической статистики**

Для направления 01.03.02 «Прикладная математика и информатика» подготовки бакалавров

Автор программы:

**д.ф.-м.н. Шабанов Д.А.**

Одобрена на заседании Департамента больших данных и информационного поиска

«\_\_\_» \_\_\_\_\_\_ 2017г.

Руководитель департамента \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ В.В. Подольский

Рекомендована Академическим советом

образовательной программы

«Прикладная математика и информатика» «\_\_\_»\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 2017  г.

Менеджер Департамента больших данных и информационного поиска

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Москва, 2017

*Настоящая программа не может быть использована другими подразделениями  
университета и другими вузами без разрешения кафедры-разработчика программы*

# Область применения и нормативные ссылки

Настоящая программа учебной дисциплины «Дополнительные главы математической статистики» (3-ый год обучения) устанавливает минимальные требования к знаниям и умениям студента и определяет содержание и виды учебных занятий и отчетности.

Программа предназначена для преподавателей, ведущих данную дисциплину, учебных ассистентов и студентов направления подготовки 01.03.02 «Прикладная математика и информатика», обучающихся по бакалаврской программе «Прикладная математика и информатика» изучающих дисциплину «Дополнительные главы математической статистики».

Программа разработана в соответствии с:

* образовательным стандартом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования НИУ ВШЭ подготовки бакалавров по направлению 010400.62 «Прикладная математика и информатика»;
* Образовательной программой подготовки бакалавров по направлению 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»,
* Рабочим учебным планом университета подготовки бакалавров по направлению 01.03.02 «Прикладная математика и информатика», утвержденным в 2015г.

# Цели освоения дисциплины

Цель освоения дисциплины «Дополнительные главы математической статистики» — познакомить слушателей с понятиями, фактами и методами математической статистики, не вошедшими в базовый курс «Теория вероятностей и математическая статистика», а также с различными возможными приложениями для статистической обработки реальных данных.

# Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины

В результате освоения дисциплины студент должен:

* Знать основные понятия математической статистики, их основные результаты и математические методы анализа.
* Уметь применять математические методы и модели к анализу случайных явлений для их адекватного описания и понимания.
* Владеть навыками решения стандартных задач математической статистики, а также применением основных аналитических инструментов для анализа вероятностных и статистических задач.

В результате освоения дисциплины студент осваивает следующие компетенции:

| Компетенция | Код по ФГОС/ НИУ | Дескрипторы – основные признаки освоения (показатели достижения результата) | Формы и методы обучения, способствующие формированию и развитию компетенции |
| --- | --- | --- | --- |
| Общенаучная | ОНК-1 | Способность к анализу и синтезу на основе системного подхода | Стандартные (лекционно-семинарские) |
| Общенаучная | ОНК-2 | Способность перейти от проблемной ситуации к проблемам, задачам и лежащим в их основе противоречиям | Стандартные (лекционно-семинарские) |
| Общенаучная | ОНК-3 | Способность использовать методы критического анализа, развития научных теорий, опровержения и фальсификации, оценить качество исследований в некоторой предметной области | Стандартные (лекционно-семинарские) |
| Общенаучная | ОНК-4 | Готовность использовать основные законы естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности, применять методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования при работе в какой-либо предметной области | Стандартные (лекционно-семинарские) |
| Общенаучная | ОНК-5 | Готовность выявить естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, привлечь их для решения соответствующий аппарат дисциплины | Стандартные (лекционно-семинарские) |
| Общенаучная | ОНК-6 | Способность приобретать новые знания с использованием научной методологии и современных образовательных и информационных технологий | Стандартные (лекционно-семинарские) |
| Общенаучная | ОНК-7 | Способность порождать новые идеи (креативность) | Стандартные (лекционно-семинарские) |
| Профессиональные | ПК-1 | Способность демонстрации общенаучных базовых знаний естественных наук, математики и информатики, понимание основных фактов, концепций, принципов теорий, связанных с прикладной математикой и информатикой | Стандартные (лекционно-семинарские) |
| Профессиональные | ПК-2 | способность понимать и применять в исследовательской и прикладной деятельности современный математический аппарат | Стандартные (лекционно-семинарские) |
| Профессиональные | ПК-3 | способность в составе научно-исследовательского и производственного коллектива решать задачи профессиональной деятельности в соответствии с профилем подготовки, общаться с экспертами в других предметных областях | Стандартные (лекционно-семинарские) |
| Профессиональные | ПК-4 | способность критически оценивать собственную квалификацию и её востребованность, переосмысливать накопленный практический опыт, изменять при необходимости вид и характер своей профессиональной деятельности | Стандартные (лекционно-семинарские) |
| Профессиональные | ПК-8 | способность решать задачи производственной и технологической деятельности на профессиональном уровне, включая разработку математических моделей, алгоритмических и программных решений | Стандартные (лекционно-семинарские) |

# Место дисциплины в структуре образовательной программы

«Дополнительные главы теории вероятностей» является самостоятельной учебной дисциплиной, относится к математическому и естественнонаучному циклу дисциплин. Для специализации 01.03.02 «Прикладная математика и информатика» настоящая дисциплина является факультативной.

Для освоения учебной дисциплины студенты должны владеть знаниями и навыками в объеме программы средней школы по математике и освоить учебные курсы:

* Дискретная математика,
* Математический анализ-1,-2,-3,-4
* Линейная алгебра и геометрия,
* Теория вероятностей и математическая статистика.

Основные положения дисциплины могут быть использованы в дальнейшем при изучении следующих дисциплин:

* Машинное обучение;
* Эконометрика;
* Статистика случайных процессов.

# Тематический план учебной дисциплины

# 

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № | Название раздела | Всего часов | Аудиторные часы | | | Самостоя­тельная работа |
| Лекции | Семинары | Практические занятия |
| 1 | Основные понятия математической статистики | 4 | 2 |  |  | 2 |
| 2 | Основные методы построения оценок | 8 | 4 |  |  | 4 |
| 3 | Сравнение оценок | 12 | 6 |  |  | 6 |
| 4 | Метод максимального правдоподобия | 8 | 4 |  |  | 4 |
| 5 | Достаточные статистики и оптимальные оценки | 12 | 6 |  |  | 6 |
| 6 | Линейная регрессионная модель | 8 | 4 |  |  | 4 |
| 7 | Проверка статистических гипотез | 20 | 10 |  |  | 10 |
| 8 | Ранговые методы | 8 | 4 |  |  | 4 |
|  | Итого: | 80 | 40 |  |  | 40 |

# Формы контроля знаний студентов

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Тип контроля | Форма контроля | 2 год | | | | Кафедра | Параметры |
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| Текущий |  |  |  |  |  |  |  |
| Домашнее  задание |  |  | 1 | 1 |  | Всего 30-40 задач |
| Промежуточный | Экзамен |  |  |  | 1 |  | Устный экзамен |

## Критерии оценки знаний, навыков

В рамках курса студенты должны выполнить две домашние письменные работы и сдать экзамен (4 модуль). Каждое задание и экзамен оцениваются по 10-балльной шкале. Домашние задания заключаются в решении задач. Проверяется ответ и ход решения. На экзамене также необходимо изложить теоретический лекционный материал.

## Порядок формирования оценок по дисциплине

**Промежуточный контроль**

Накопленная оценка (3-й и 4-й модули) за текущий контроль формируется из оценок за домашние задания:

.

Итоговая оценка рассчитывается следующим образом:

Все оценки выставляются по 10-балльной системе, способ округления всегда арифметический.

# Содержание дисциплины

**Раздел 1. Основные понятия математической статистики.**

Вероятностно-статистическая модель, понятия наблюдения и выборки. Эмпирическое распределение и и эмпирическая функция распределения. Обоснованность основной задачи математической статистики и теорема Гливенко-Кантелли. Вероятностно--статистическая модель. Параметрическая статистическая модель. Моделирование выборки из неизвестного распределения, принадлежащему параметрическому семейству.

**Раздел 2. Основные методы построения оценок.**

Статистики и оценки. Общая идея построения хороших статистик, примеры: выборочные усреднения, порядковые статистики, выборочные квантили, $M$-оценки. Основные свойства оценок: несмещенность, состоятельность, сильная состоятельность, асимптотическая нормальность. Примеры. Наследование асимптотических свойств при взятии непрерывной функции. Методы нахождения оценок, общий принцип подстановки. Метод моментов, состоятельность оценки метода моментов. Выборочные квантили и выборочная медиана. Теорема об асимптотической нормальности выборочной квантили. Примеры.

**Раздел 3. Сравнение оценок.**

Сравнение оценок, функция потерь и функция риска. Подходы к сравнению оценок: равномерный, байесовский, минимаксный, асимптотический. Допустимые оценки. Доминируемое семейство распределений, условия его регулярности. Неравенство Рао-Крамера (одномерный и многомерный варианты) и эффективные оценки. Критерий эффективности оценки. Теорема о наилучшем квадратичном прогнозе. Байесовская оценка, априорные и апостериорные плотности. Теорема о байесовской оценке, ее оптимальность в байесовском подходе к сравнению оценок.

**Раздел 4. Метод максимального правдоподобия.**

Метод максимального правдоподобия. Примеры. Экстремальное свойство функции правдоподобия. Теорема о существовании состоятельного решения уравнения правдоподобия. Состоятельность оценки максимального правдоподобия. Теорема об асимптотической нормальности состоятельного решения уравнения правдоподобия. Теорема Бахадура (б/д). Асимптотически эффективные оценки. Асимптотическая эффективность и эффективность оценки максимального правдоподобия.

**Раздел 5. Достаточные статистики и оптимальные оценки.**

Достаточные статистики. Теорема Колмогорова-Блэкуэлла-Рао об улучшении несмещенных оценок и ее многомерное следствие. Полные статистики. Теорема об оптимальной оценке. Критерий факторизации Неймана-Фишера, доказательство для дискретного случая. Примеры, нахождение оптимальной оценки параметра a>0 в случае выборки из U(0,a). Формула пересчета условных математических ожиданий по двум мерам. Критерий факторизации Неймана-Фишера в общем случае. Экспоненциальное семейство распределений. Теорема о полной достаточной статистике в экспоненциальном семействе. Пример: нахождение оптимальных оценок параметров по нормальной выборке.

**Раздел 6. Линейная регрессионная модель.**

Линейная регрессионная модель. Оценка наименьших квадратов, ее основные свойства. Лемма об оптимальности в классе несмещенных линейных оценок. Несмещенная оценка для параметра дисперсии в линейной регрессионной модели. Линейная гауссовская модель. Полная достаточная статистика в линейной гауссовской модели. Оптимальные оценки параметров в линейной гауссовской модели. Теорема об ортогональных разложениях гауссовского случайного вектора. Распределения оптимальных оценок в линейной гауссовской модели.

**Раздел 7. Проверка статистических гипотез.**

Проверка статистических гипотез, общие принципы и основные понятия: гипотеза, критерий, уровень значимости, альтернативы, ошибки первого и второго родов, функция мощности. Несмещенность и состоятельность статистического критерия. Сравнение критериев, равномерно наиболее мощные критерии. Лемма Неймана-Пирсона для проверки простых гипотез. Построение с ее помощью наиболее мощных критериев. Семейства с монотонным отношением правдоподобия. Монотонность функции мощности для таких семейств. Теорема о монотонном отношении правдоподобия. Примеры: проверка гипотез с односторонними альтернативами для бернуллиевских и нормальных выборок. Двойственность доверительного оценивания и проверки гипотез. Линейные гипотезы в линейной гауссовской модели, F-критерий для проверки линейной гипотезы в гауссовской линейной модели. Пример: проверка однородности двух нормальных выборок. Обобщенный метод наименьших квадратов. Критерии согласия в дискретном случае. Статистика хи-квадрат Пирсона в полиномиальной схеме Бернулли с m исходами. Теорема Пирсона о сходимости статистики хи-квадрат. Параметрический критерий хи-квадрат. Критерий согласия хи-квадрат, его состоятельность. Критерии согласия в непрерывном случае. Критерий Колмогорова для проверки простой гипотезы о виде функции распределения, его состоятельность.

**Раздел 8. Ранговые методы.**

Ранги. Ранговый метод для проверки однородности двух независимых выборок. Теорема об асимптотической нормальности статистики Уилкоксона.

# Образовательные технологии

В учебном процессе используются следующие образовательные технологии:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| № п/п | Вид занятия | Форма проведения занятий | Цель |
| 1 | Лекция | Изложение теоретического материала. | Получение теоретических знаний по предмету. |
| 2 | Самостоятельная работа студента | Решение задач. | Усовершенствование практических навыков. |

# Оценочные средства для текущего контроля и аттестации студента

## Вопросы для оценки качества освоения дисциплины

**Раздел 1.**

1. Что такое эмпирическая функция распределения?

2. Сформулируйте теорему Гливенко-Кантелли.

**Раздел 2.**

1. В чем состоит свойство состоятельности оценки?

2. Что такое выборочные квантили?

3. Каковы основные свойства оценки метода моментов?

**Раздел 3.**

1. Каковы основные подходы к сравнению оценок?

2. Сформулируйте неравенство Рао-Крамера.

3. Что такое байесовская оценка?

**Раздел 4.**

1. Дайте определение оценки по методу максимального правдоподобия.

2. При каких условиях оценка по методу максимального правдоподобия состоятельна?

3. Что такое асимптотическая эффективность?

**Раздел 5.**

1. Что такое оптимальная оценка?

2. Сформулируйте критерий факторизации Неймана-Фишера.

3. Приведите пример экспоненциального семейства распределений.

**Раздел 6.**

1. Дайте определение линейной регрессионной модели.

2. Что такое метод наименьших квадратов?

3. Каковы оптимальные оценки параметров гауссовской линейной регрессии.

**Раздел 7.**

1. Что такое уровень значимости статистического критерия?

2. Приведите пример семейства распределений с монотонным отношением правдоподобия.

3. Каковы асимптотические свойства критерия хи-квадрат?

4. Сформулируйте теорему Колмогорова о предельном распределении разности настоящей и эмпирической функций распределений.

**Раздел 8.**

1. Что такое статистика Уилкоксона?

2. В чем состоит ранговый подход к проверке гипотезы однородности двух выборок?

# Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

## Базовые учебники

1. А.А. Боровков. Математическая статистика.- 4-е изд. – Спб: Лань, 2010.

2. Г.И. Ивченко, Ю.И. Медведев. Математическая статистика. – М: Книжный дом ``Либроком'', 2014.

## Основная литература

1. Севастьянов Б. А. Курс теории вероятностей и математической статистики. - 2-е изд. - М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004.

2. Ширяев А.Н. Вероятность. В 2-х кн., 6-е изд., М.: МЦНМО, 2016.

3. Э. Леман. Теория точечного оценивания. – М: Наука, 1991.

4. Ю.Н. Тюрин. Математическая статистика. Записки лекций - электронная версия.

## Дополнительная литература

1. Бикел П., Доксам К. Математическая статистика. Вып. 1 и 2. – М: Финансы и статистика, 1983.