Программа курса «Функциональный анализ»

(1) Метрические и нормированные пространства. Полные пространства и пополнения. Пространство ограниченных функций и пространство непрерывных функций. Теорема Стоуна–Вейерштрасса. Теорема о вложенных шарах. Теорема Бэра.

(2) Компакты и их свойства. Критерий Хаусдорфа. Теорема Арцела–Асколи. Топологические пространства. Теорема Тихонова о компактности. Компактность шара равносильна конечномерности пространства. Эквивалентность норм в конечномерных пространствах.

(3) Теоремы о неподвижных точках: теорема Банаха о сжимающем отображении, теорема Брауэра и теорема Шаудера.

(4) Мера и интеграл Лебега. Теорема Фубини. Теорема Лебега о мажорируемой сходимости. Пространства L^p. Свертка функций и ее свойства.

(5) Евклидовы и гильбертовы пространства. Ортонормированные системы. Ряды Фурье. Базис Шаудера.

(6) Линейные непрерывные функционалы. Теорема Рисса о виде линейного функционала. Теорема Хана–Банаха о продолжении линейного функционала.

(7) Сопряженное пространство. Слабая и $*$-слабая сходимость. Теорема Банаха–Алаоглу о компактности шара в сопряженном пространстве.

(8) Линейные непрерывные операторы. Теорема Банаха–Штейнгауза (принцип равномерной ограниченности). Теорема Банаха об обратном операторе. Компактные операторы и их свойства.

(9) Спектр линейного оператора. Спектр компактного оператора. Альтернатива Фредгольма. Теорема Гильберта–Шмидта.

(10) Унитарные операторы. Представление самосопряженного оператора в виде оператора умножения на функцию.

(11) Локально выпуклые топологические пространства. Обобщенные функции. Преобразование Фурье и преобразование Лапласа.

(12) Дифференцирование в нормированных пространствах. Теорема об обратной функции. Метод Ньютона.

Комментарии: Первые два вопроса посвящены полным пространствам (в которых выполняется критерий Коши) и компактам (по сути обобщению отрезка на числовой прямой). Полнота пространства и компактность пространства – ключевые предположения во многих прикладных вопросах. Это связано с тем, что многие «школьные» факты о непрерывных функциях переносятся на эти пространства практически без изменений. Третий вопрос посвящен широко используемым и популярным теоремам из анализа – теоремам о неподвижных точках, к которым сводятся большинство теорем существования чего-либо. Четвертый вопрос касается важного инструментария (без которого нельзя представить себе современный анализ): теория меры и теория интеграла Лебега. Планируется ограничиться основными фактами (возможно без доказательств) и примерами их применения, в частности обсудить понятие свертки функций. Пятый вопрос посвящен евклидовым и гильбертовым пространствам, которые с одной стороны похожи на обычную плоскость с евклидовой геометрией, а с другой стороны в общем случае являются бесконечномерными и при их исследовании кроме обычной геометрии надо учитывать топологические свойства. Шестой и седьмой вопросы посвящены линейным непрерывным функционалам. Восьмой вопрос касается линейных ограниченных операторов и важнейших и очень используемых принципа равномерной ограниченности и теоремы об обратном операторе. Девятый и десятый вопросы фактически посвящены обобщению на бесконечномерный случай спектральной теории конечномерных линейных операторов. Одиннадцатый вопрос касается обобщенных функций. Двенадцатый вопрос посвящен дифференцированию в нормированных пространствах и обобщению метода касательных Ньютона.