Непрерывные отображения

1. Из города A в город B ведут две непересекающиеся дороги. Известно, что два экипажа, выехавшие по двум разным дорогам из A в B и связанные верёвкой длины, меньшей, чем $2R$, смогли доехать от A до B, не порвав верёвки. Смогут ли разминуться, не задев друг друга, два круглых воза радиуса R, центры которых движутся по этим дорогам навстречу друг другу?

Любое непрерывное отображение отрезка в себя имеет неподвижную точку.

2. Какие из следующих функций переводят отрезок $[0,1]$ в себя: $f_1(x) = 2x$, $f_2(x) = \sin(\pi x)$, $f_3(x) = 2x(1-x)$, $f_4(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

3. Приведите пример отображения (а) числовой оси $\mathbb{R}$, (б) полуинтервала $[0,1)$ в себя, (в) пары отрезков $[-2,-1]$ и $[1,2]$, которое *не* имеет неподвижных точек.

4. Укажите пример разрывного отображения отрезка $[0,1]$ в себя, не имеющего неподвижных точек.

Непрерывное отображение f отрезка $[0,1]$ в себя называют инволюцией, если f^2 оставляет неподвижной каждую точку отрезка. Другими словами, это значит, что функция f обратна самой себе.

5. Докажите, что функция $y = \mathrm{sign}(x)$ не имеет обратной.

6. Проверьте что следующие функции являются инволюциями:

$$\text{(a) } f(x) = x; \quad \text{(b) } f(x) = 1 - x; \quad \text{(c) } f(x) = \frac{1-x}{1+x};$$
$$\text{(d) } f(x) = \sqrt{1-x^2}; \quad \text{(e) } f(x) = 1 - \sqrt{1-(x-1)^2}.$$

Инволюция $f(x) = x$ называется тривиальной.

7. Докажите что каждая нетривиальная инволюция имеет ровно одну неподвижную точку.

8. Пусть f — непрерывная функция на отрезке $[a,b]$, отобр каждый конец отрезка в себя, т. е. $f(a) = a$, $f(b) = b$. Пусть g — любая непрерывная функция, отображающая отрезок $[a,b]$ в себя. Докажите, что тогда на этом отрезке найдется такая точка x_0, что $f(x_0) = g(x_0)$. Сохранится ли это утверждение в силе, если g — произвольная непрерывная функция на $[a,b]$?

Пусть $f(x) = 4\mu x(1-x)$. Квадратичное отображение определяется формулой $x_{n+1} = f(x_n)$.

9. Найдите неподвижные точки квадратичного отображения и исследовать их устойчивость в зависимости от μ.

10. Найдите элементы цикла квадратичного отображения, состоящего из двух точек (такие x, что $f(x) \neq x$ и $f(f(x)) = x$. В каком интервале параметра μ существует цикл огистического отображения, состоящего из двух точек.

11. Постройте с помощью компьютера итерационные диаграммы для квадратичного отображения для значений параметра μ равного 0.5, 0.7, 0.77, 0.8, 0.9.

12. Найдите численно такое μ_2, при котором происходит переход от предельного цикла длины 2 к предельному циклу длины 4. Для этого вводится отображение $f_2 = f(f(x))$ и проверяется, что при искомом μ выполнено $f_2'(x_2^*) = -1$. Здесь x_2^* — это неподвижная точка отображения f_2, но не отображения f. Затем найдите численно такое μ_3, при котором происходит переход от предельного цикла длины 2^2 к предельному циклу длины 2^3. Для этого вводится отображение $f_3 = f(f(f(x)))$. Доберитесь до μ_{100}. Изобразите μ_i как функцию номера i. Изобразите $\frac{\mu_i - \mu_{i-1}}{\mu_{i+1} - \mu_i}$ как функцию номера i.

Бонус

13. Первый тайм футбольного матча закончился со счётом $0:1$, а весь матч — со счётом $4:3$. Докажите, что в какой-то момент счёт матча был ничейным.

14. Докажите, что найдётся сто последовательных натуральных чисел, среди которых ровно 5 простых чисел.