Эллиптические уравнения с разрывным коэффициентом. Компактная разностная схема для сложной границы сред.

Гордин В.А. Шадрин Д.А.

НИУ ВШЭ & Гидрометцентр РФ, Москва, vagordin@mail.ru, shadrin.dmitry2010@yandex.ru

Стационарные решения различных процессов (диффузии, теплопроводности, волновых) описываются уравнениями Пуассона или Гельмгольца

$$-div(\vartheta grad(u)) = f(\vec{x}), \quad \vec{x} \in G, \tag{1}$$

$$-div(\vartheta grad(u)) + k^2 u = f(\vec{x}). \tag{2}$$

В некоторых случаях среда неоднородна, причем ее свойства меняются скачком. Разделим область G на две однородные подобласти линией стыка Г. В технических приложениях важен случай, при котором Г – не является гладкой (есть углы), см Рис 1. Модельный пример: подобласти - концентрические равнобедренные треугольники. В уравнениях (1), (2) коэффициент ϑ - кусочно-постоянная функция, зависящая от среды (во внутреннем треугольнике принимает значение ϑ_+, во внешнем - ϑ_-).

На внешней границе граничные условия Дирихле, на линии Г - стыковочные:

$[u] = 0,$ (3*a*) $\qquad [\vartheta \partial_n u] = 0$ (3*b*).

Здесь [ ] - амплитуда скачка на линии Г, $\partial_n u$ - производная по нормали к линии *Г*.

Рис. 1. Разбиение G на подобласти. Линия стыка Г – граница между желтым и синим. На внешней границе – условия Дирихле

Аппроксимация. Использовалась компактная разностная схема 4-го порядка на треугольной сетке. Линии сетки параллельны сторонам треугольников. Для каждой точки сетки составляется уравнение вида:

$$\sum_i k_i u_i = \sum_j m_j f_j \qquad (4)$$

u_i - значения неизвестной функции в *i*-й точке шаблона вокруг точки, f_j - правой части.

Коэффициенты $<k_i, m_j>$ для каждой точки сетки **определяем из условия точности** (4) **на** выбранных **парах тестовых функций:** $<u_{test,1}, f_{test,1}>, \dots, <u_{test,n}, f_{test,n}>$, где: $f_{test,d} = L[u_{test,d}]$. Получаем *n* однородных линейных уравнений на *p* неизвестных (*p* – сумма чисел коэффициентов для решения и для правой части). Выбираем набор из *n*=*p* – 1 тестовой функции, чтобы после добавления условия нормировки ($k_1 = 1$) получилась система из p уравнений. После составления проверяем хорошую обусловленность СЛАУ.

Принцип подбора тестовых функций следующий: в окрестности точек (x_0, y_0) далеких от линии стыка предполагается, что решение дифференциального уравнения u разлагается в ряд Тейлора по двум переменным до четвертой степени: $u = \sum_{i+j \le 4} a_{ij}(x - x_0)^i (y - y_0)^j + o(r^4)$; r –расстояние от (x_0, y_0) до (x, y). Погрешность $o(N^{-4})$, где N – число отрезков на основании большого треугольника.

Пример шаблона и тестовых функций в точках, далеких от стыка сред.

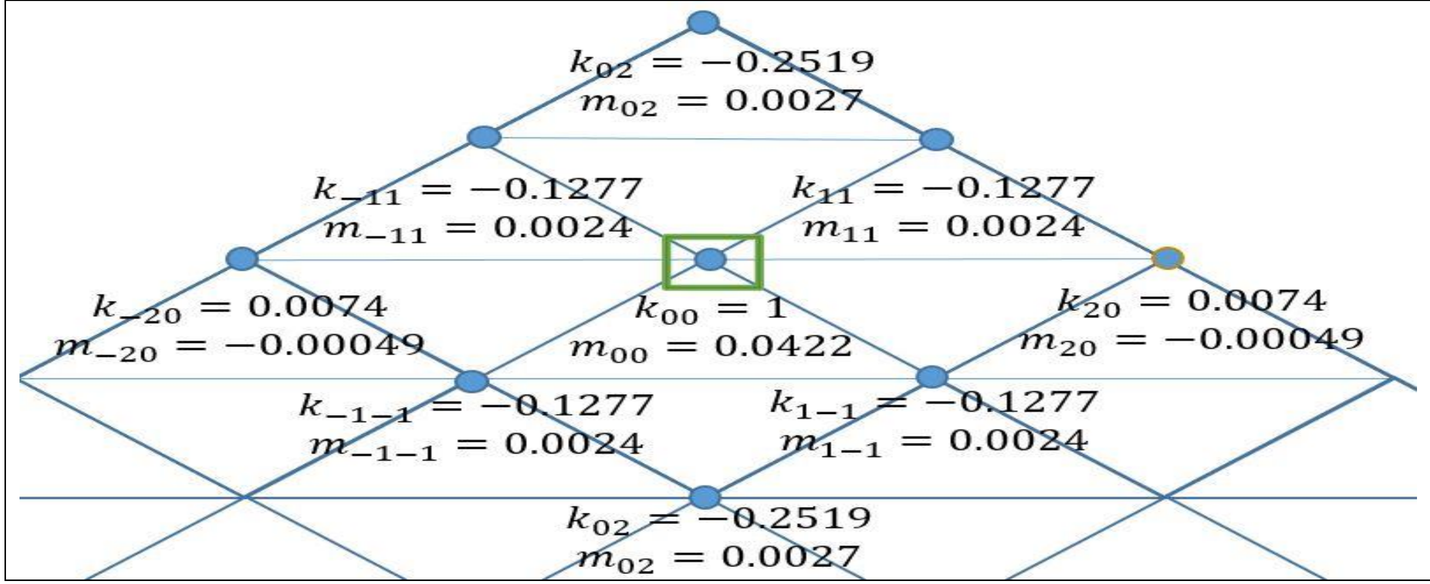


Рис. 2. Шаблон для внутренних точек, далеких от границы сред
Указаны значения коэффициентов $< k_i, m_j >$, рассчитанных для следующих параметров: $\vartheta_+ = 1$, $\vartheta_- = 10$ ***-значения коэффициента,*** $\alpha = 0.4$ ***- угол при основании большого треугольника.*** **(5)**

Шаблон на рис (2) симметричен относительно вертикали и горизонтали, $k_{ij} = k_{-ij}$, $m_{ij} = m_{-ij}$, $k_{ij} = k_{i-j}$ и $m_{ij} = m_{i-j}$. Независимых коэффициентов, у которых оба индекса неотрицательны, 8 штук.

Выбор тестовых функций, на которых компактная схема должна иметь 4 порядок точности, определяется из диаграммы Ньютона.

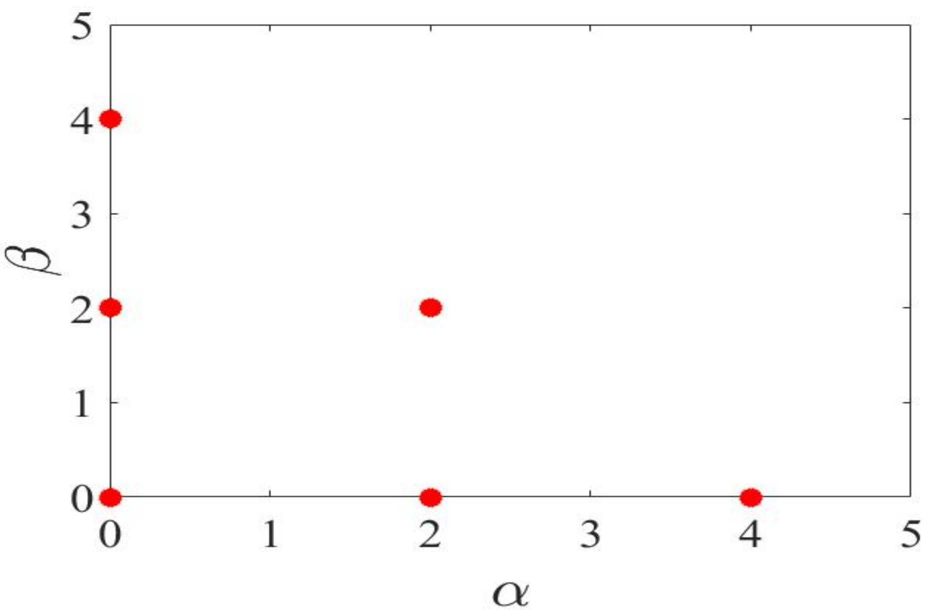


Рис.3. Тестовые функции для шаблона на Рис.2: $1, x^2, x^4, y^2, y^2x^2, y^4, (x+y)^3$ на диаграмме Ньютона

Для точек на линии стыка Γ аппроксимируем не уравнение, а стыковочные условия (3). Искомая функция u терпит излом. Разложение Тейлора существует с каждой стороны от линии излома:

$u = \begin{cases} \sum\limits_{i+j\le 4} a_{ij}(n-n_0)^i(s-s_0)^j + o(r^4) & \textit{внутри малого треугольника} \\ \sum\limits_{i+j\le 4} b_{ij}(n-n_0)^i(s-s_0)^j + o(r^4) & \textit{снаружи от малого треугольника} \end{cases}$	$\vec{s}$ направлен по касательной к линии стыка Γ, $\vec{n}$ - по нормали

Из (3а) уравнения при всех $j: a_{0j} = b_{0j}$. Из (3б) уравнения $\vartheta_+ a_{1j} = \vartheta_- b_{1j}$. 20 тестовых функций u (компоненту f получаем, применяя оператор L), для обеспечения 4-го порядка:

1	s	s^2	s^3	s^4	$\vartheta_\pm n$	$\vartheta_\pm ns$	$\vartheta_\pm ns^2$	$\vartheta_\pm ns^3$

n^2	$n^2 s$	$n^2 s^2$	n^3	$n^3 s$	n^4
$sign(n) n^2$	$sign(n)\, n^2 s$	$sign(n) n^2 s^2$	$sign(n) n^3$	$sign(n) n^3 s$	$sign(n) n^4$

В точках шаблона, попавших непосредственно на линию Γ, правая часть f не определена, поэтому полагаем там коэффициенты m_j в компактной схеме (4) нулевыми.

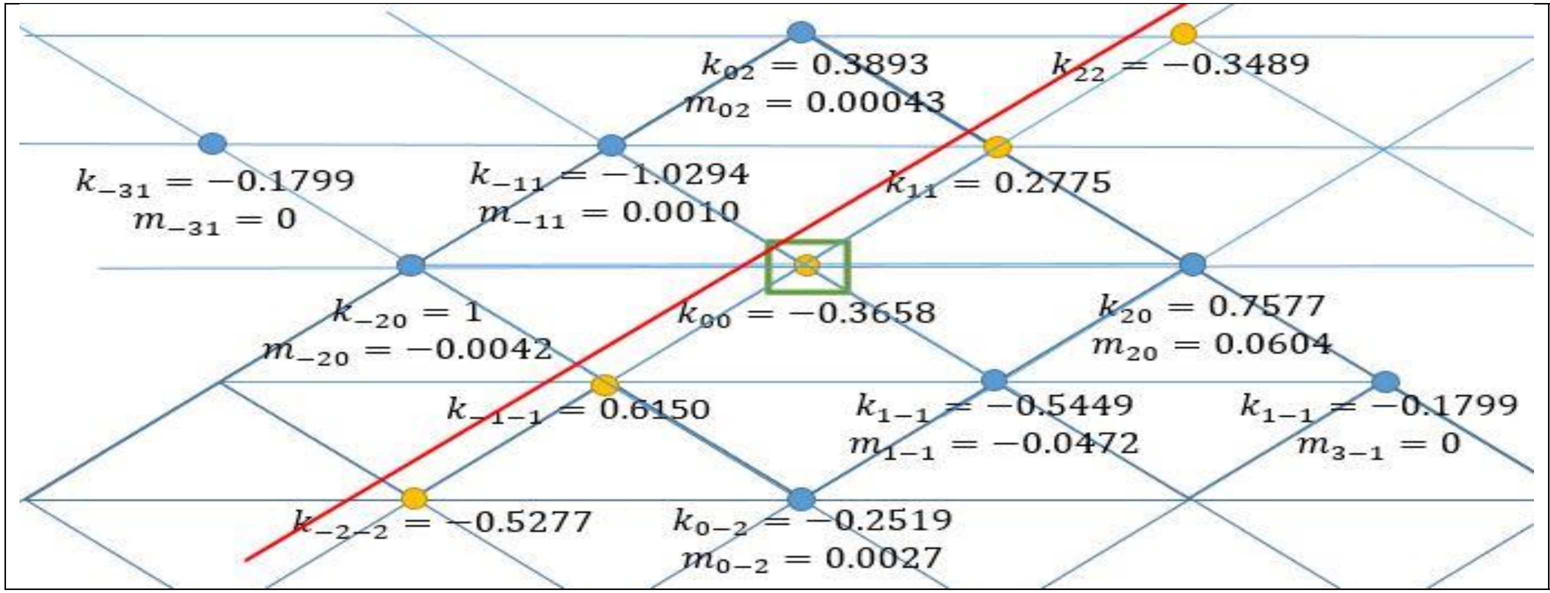


Рис 4. Шаблон и веса для точек сетки, лежащих на левом боковом участке границы сред Г.

В точках сетки на стыке (желтые) коэффициенты m_j =0. Остальные веса находим, решая СЛАУ.

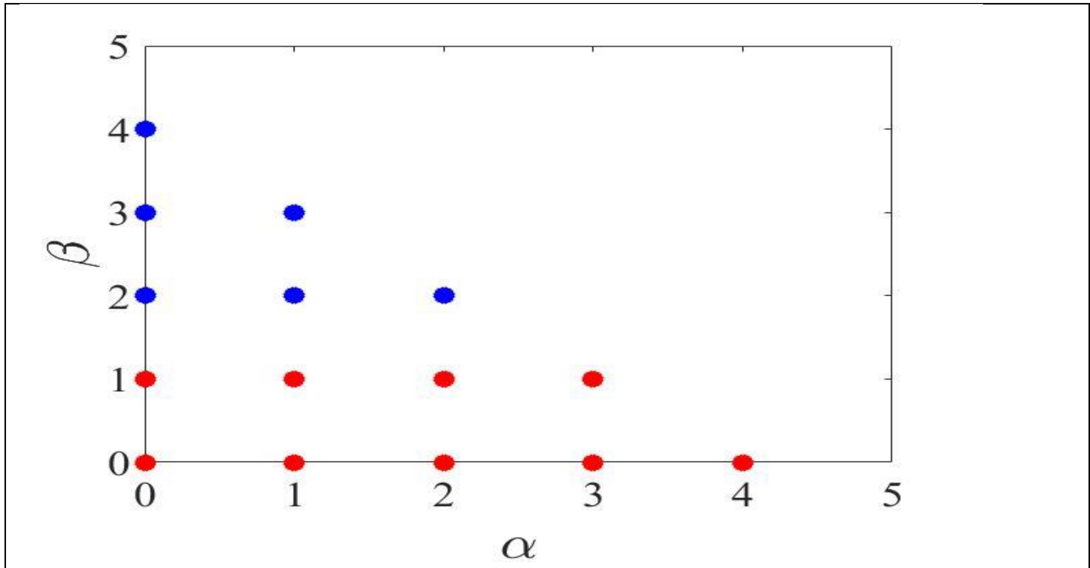


Рис. 5 Диаграмма Ньютона для тестовых функций для шаблона с рис 4 вида: $n^{\beta} s^{\alpha}$*. Синие точки обозначают мономы, которые входят и с множителем* $\mathrm{sign}(n)$*, и без него.*

Для аппроксимации граничных условий в углах *Г* решение раскладывается в ряд по обобщенным собственным функциям. Обобщенной собственной функцией дифференциального оператора *L* назовем функцию *f*, такую, что:

$$L[Y] = \begin{cases} \mu\vartheta_{+} Y \text{ внутри малого треугольника} \\ \mu\vartheta_{-} Y \text{ вне малого треугольника} \end{cases} . \tag{6}$$

Они находятся методом Фурье: $Y(r,\varphi) = A(\varphi)B(r)$, где φ и *r* – угол и радиус в полярной системе координат относительно угла (излома линии *Г*), в котором происходит аппроксимация. Подставляя Y в (6), получаем систему обыкновенных диффуров для функций *A* и *B*:

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\vartheta(\varphi)\frac{\partial A}{\partial\varphi}\right) = -\vartheta(\varphi)\lambda A \,, \tag{7}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}B\right) - B\frac{\lambda}{r^2} + \mu B = 0 \,. \tag{8}$$

Решая эту систему, получаем, что

$$A(\varphi) = \begin{cases} C_{1+}\sin(\sqrt{\lambda}\varphi) + C_{2+}\cos(\sqrt{\lambda}\varphi) & \Leftarrow \quad \varphi \in [0,\alpha] \\ C_{1-}\sin(\sqrt{\lambda}\varphi) + C_{2-}\cos(\sqrt{\lambda}\varphi), & \Leftarrow \quad \varphi \in [\alpha - 2\pi, 0] \end{cases} \tag{9}$$

$B(r) = C_1 J_s(\sqrt{\mu}r)$, где **J** – функция Бесселя первого рода.

Индекс функции Бесселя $s=\sqrt{\lambda}$ определяется из стыковочных условий (3):

$$det\begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\vartheta_-}{\vartheta_+}}\sin\sqrt{\frac{\lambda}{\vartheta_+}}\alpha+\sin\sqrt{\frac{\lambda}{\vartheta_-}}(2\pi-\alpha) & \cos\sqrt{\frac{\lambda}{\vartheta_+}}\alpha-\cos\sqrt{\frac{\lambda}{\vartheta_-}}(2\pi-\alpha) \\ \sqrt{\vartheta_-}\cos\sqrt{\frac{\lambda}{\vartheta_+}}\alpha-\sqrt{\vartheta_-}\cos\sqrt{\frac{\lambda}{\vartheta_-}}(2\pi-\alpha) & -\sqrt{\vartheta_+}\sin\sqrt{\frac{\lambda}{\vartheta_+}}\alpha-\sqrt{\vartheta_-}\sin\sqrt{\frac{\lambda}{\vartheta_-}}(2\pi-\alpha) \end{pmatrix}=0 \qquad (10)$$

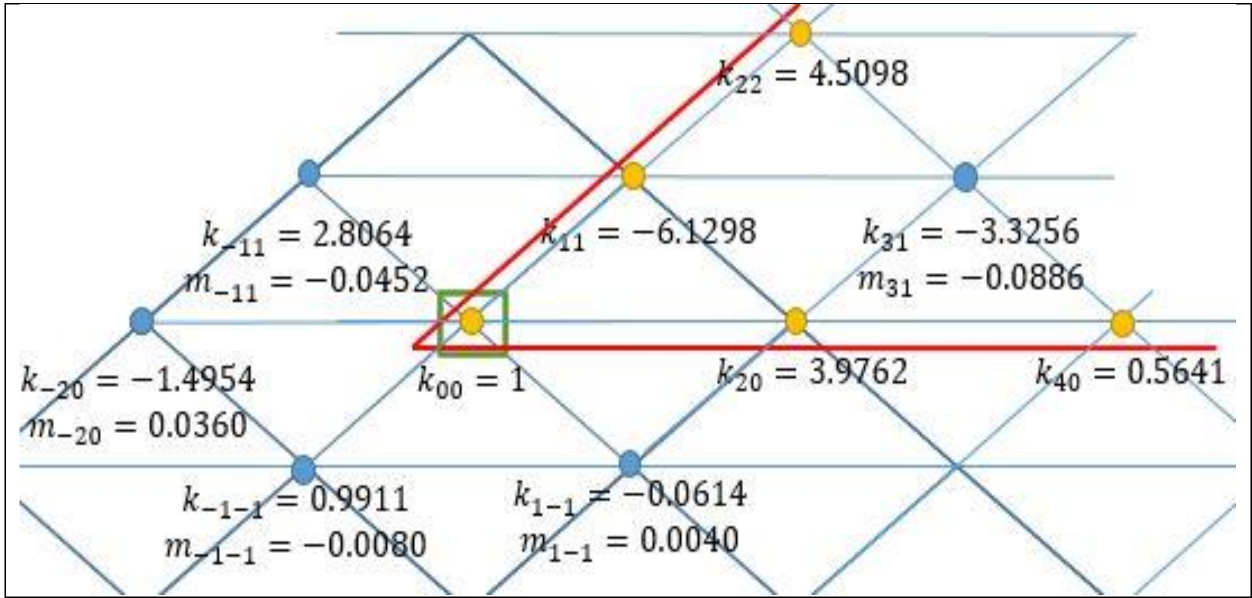


Рис. 6. Шаблон для левого угла при основании границы сред. На рисунке радиус отсчитывается от точки, обведенной в зеленый квадрат, угол отсчитывается от нижнего участка стыка

Тестовые функции для этого шаблона записаны в полярной системе координат (r,φ):

$$1, r^2, r^4, A_{s_1}r^{s_1}, A_{s_1}r^{s_1+2}, A_{s_2}r^{s_2}, A_{s_2}r^{s_2+2}, A_{s_3}r^{s_3}, A_{s_3}r^{s_3+2}, A_{s_4}r^{s_4}, A_{s_4}r^{s_4+2}, A_{s_5}r^{s_5}, A_{s_6}r^{s_6}, A_{s_7}r^{s_7}, A_{s_8}r^{s_8}.$$

Функции $A_s(\varphi)$ определены по формуле (9).

Функции Бесселя, индекс которых определяется из дисперсионных соотношений были заменены на степени r, так как функции Бесселя раскладываются в близи 0 в степенной ряд: $J_s(r) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i r^{s+2i}$.

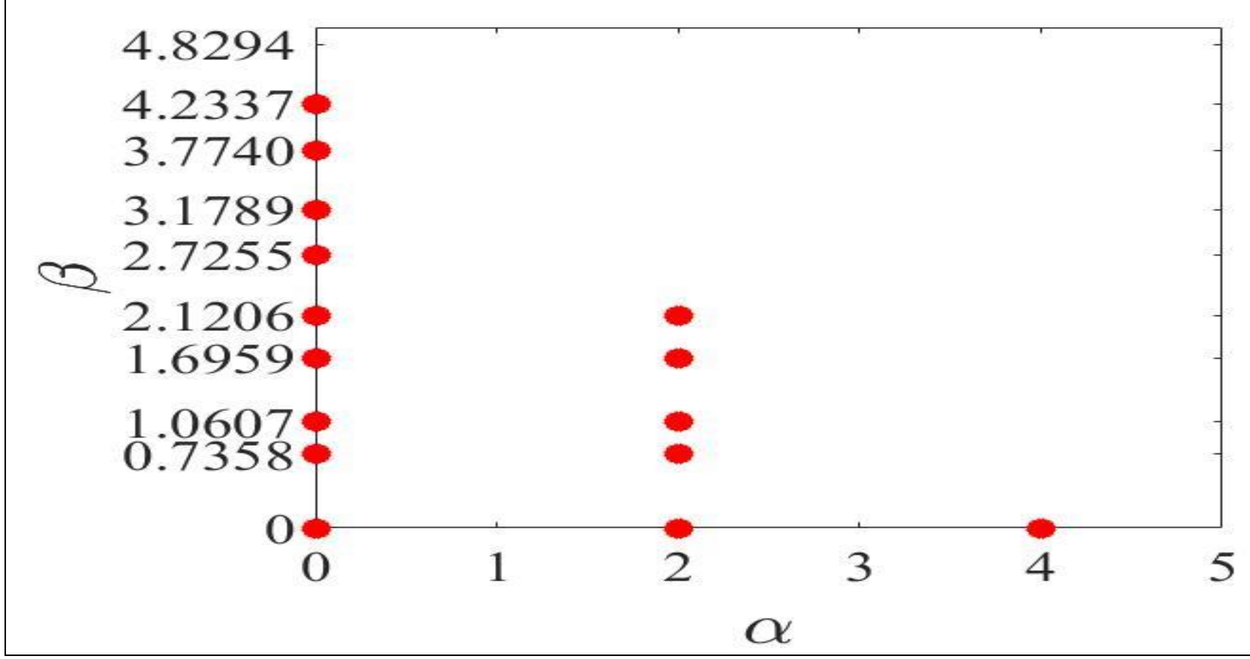


Рис 7. Диаграмма Ньютона для тестовых функций вида: $u_{\alpha,\beta} = A_{\beta}(\varphi) r^{\alpha+\beta}$ *. Значения спектрального параметра s зависят и от угла при основании, и от отношения коэффициентов сред.*

Численные эксперименты

Рассчитывалось решение U_{exact} для заданной правой части F на мелкой сетке $N' = 800$. Для $N_i =$ 400, 200, 100, 50 вычислялось решение U_i. Погрешность: $\left\| U_{exact} - U_i \right\|_{L1}$. Графики погрешности от N в билогарифмической шкале. Тангенс угла наклона этой прямой определяет порядок схемы.

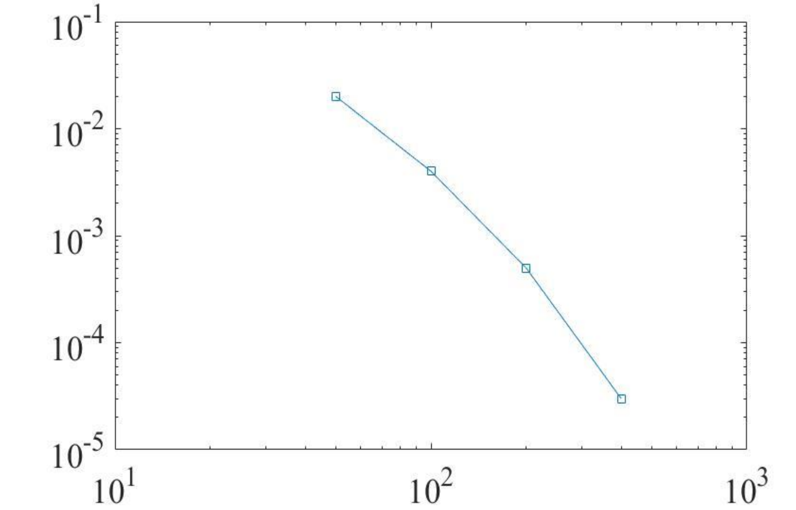


Рис 8. График зависимости погрешности от N, при $\dfrac{\vartheta_+}{\vartheta_-} = 2$.

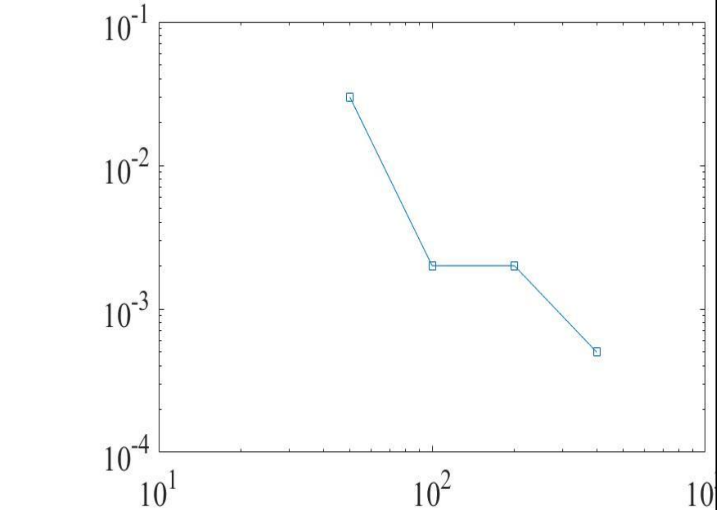


Рис 9. График зависимости погрешности от N, при $\dfrac{\vartheta_+}{\vartheta_-} = 10$.

На рис.10 результаты численных экспериментов. На внешней границе стоят граничные условия Дирихле $u\big|_{\partial V} = 1$. Правая часть $f \equiv 1$ на всем большом треугольнике.

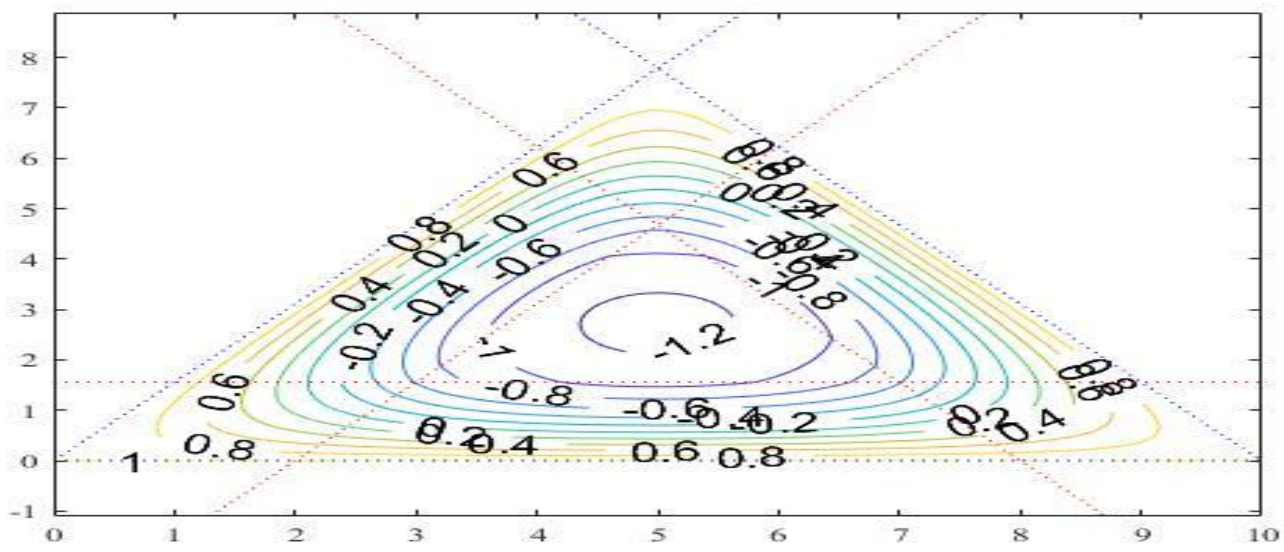


Рис 10. Изолинии референтного решения схемы (при N = 800).

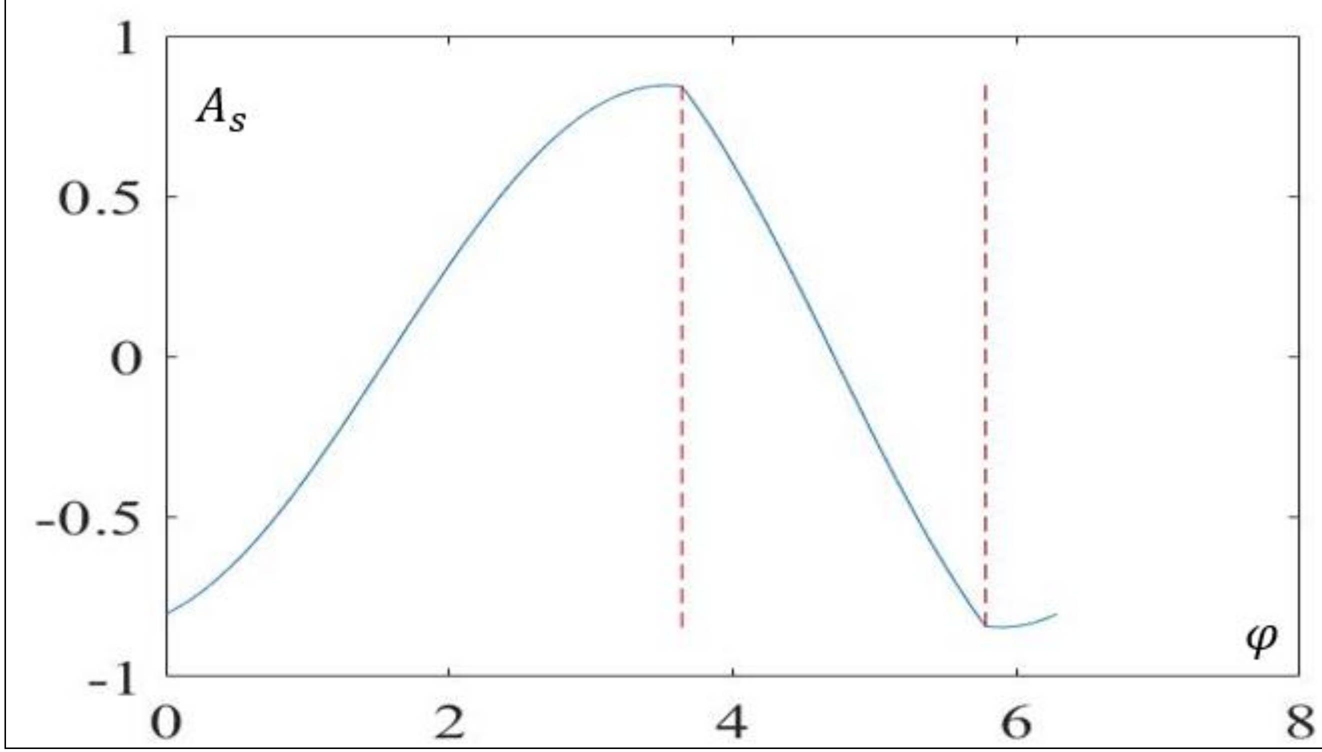


Рис. 11. График зависимости обобщенной собственной функции от угла $A_{s_1}(\varphi)$ *при* $\frac{\vartheta_+}{\vartheta_-}=10,\ \alpha=0.5.$

Красные линии обозначают границы угла. Расстояние от них до экстремумов очень маленькое

Угол между линией экстремума $A_s(\varphi)$ и линией *Г* очень мал. $\Rightarrow$ Нужно добавить точки около *Г*.

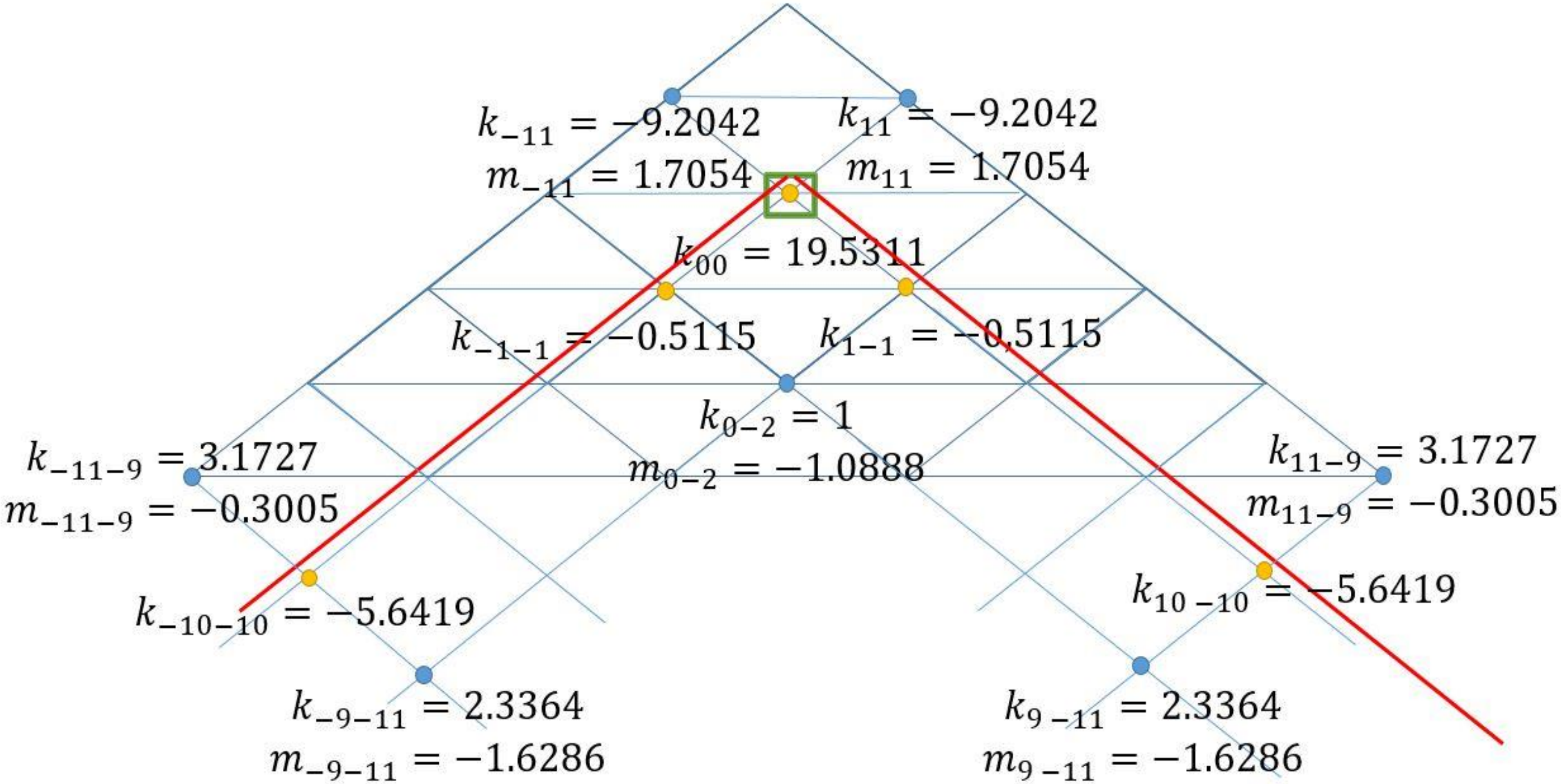
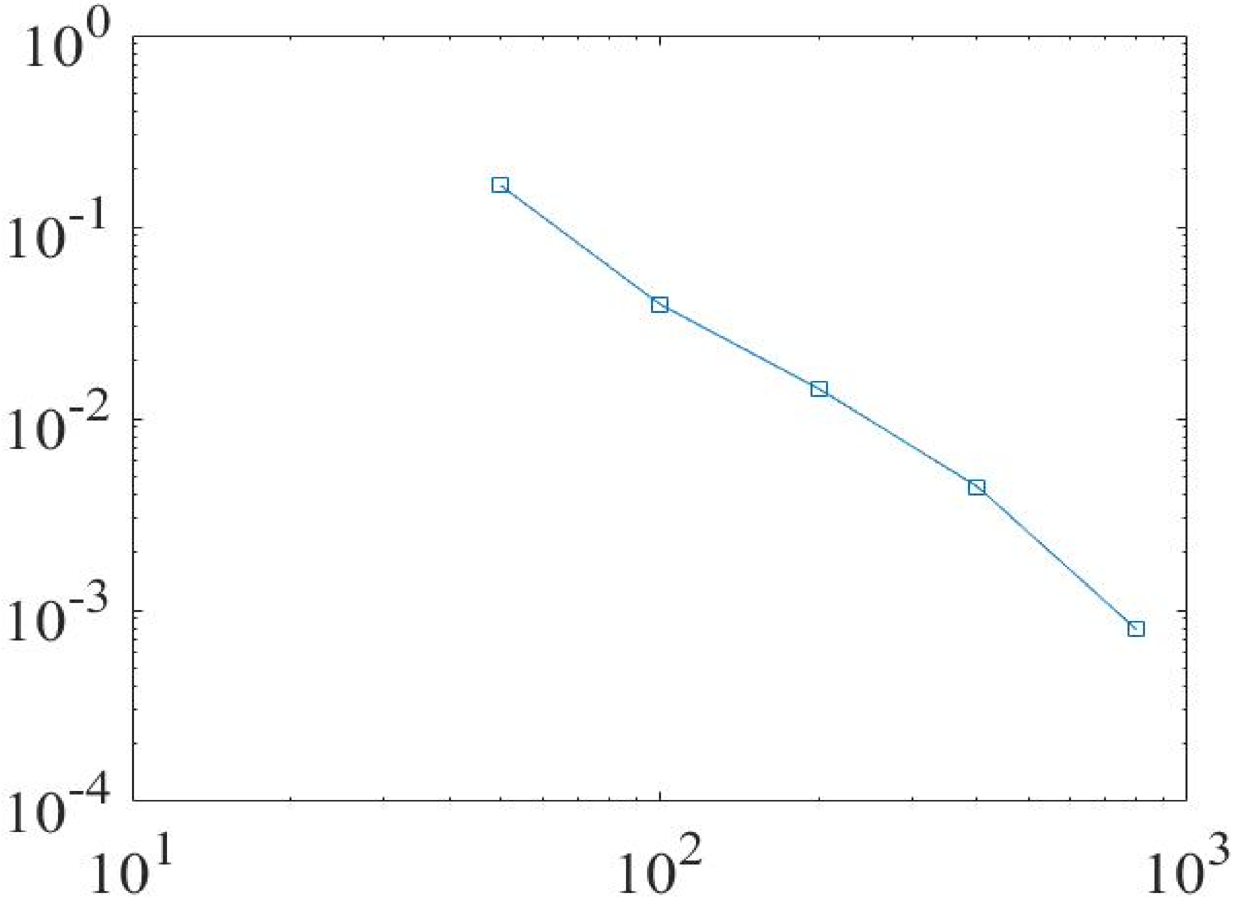


Рис 12. Шаблон для верхнего угла, использующий удаленные точки.

	*Рис 13. График зависимости погрешности от N, при* $\frac{\vartheta_+}{\vartheta_-} = 1,3.$

Работа была поддержана грантом (18-05-0011) в рамках Программы «Научный фонд Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» (НИУ ВШЭ)» в 2016-2017 гг. с использованием средств субсидии на государственную поддержку ведущих университетов Российской Федерации в целях повышения их конкурентоспособности среди ведущих мировых научно-образовательных центров, выделенной НИУ ВШЭ.