

3D визуализация атмосферных фронтов

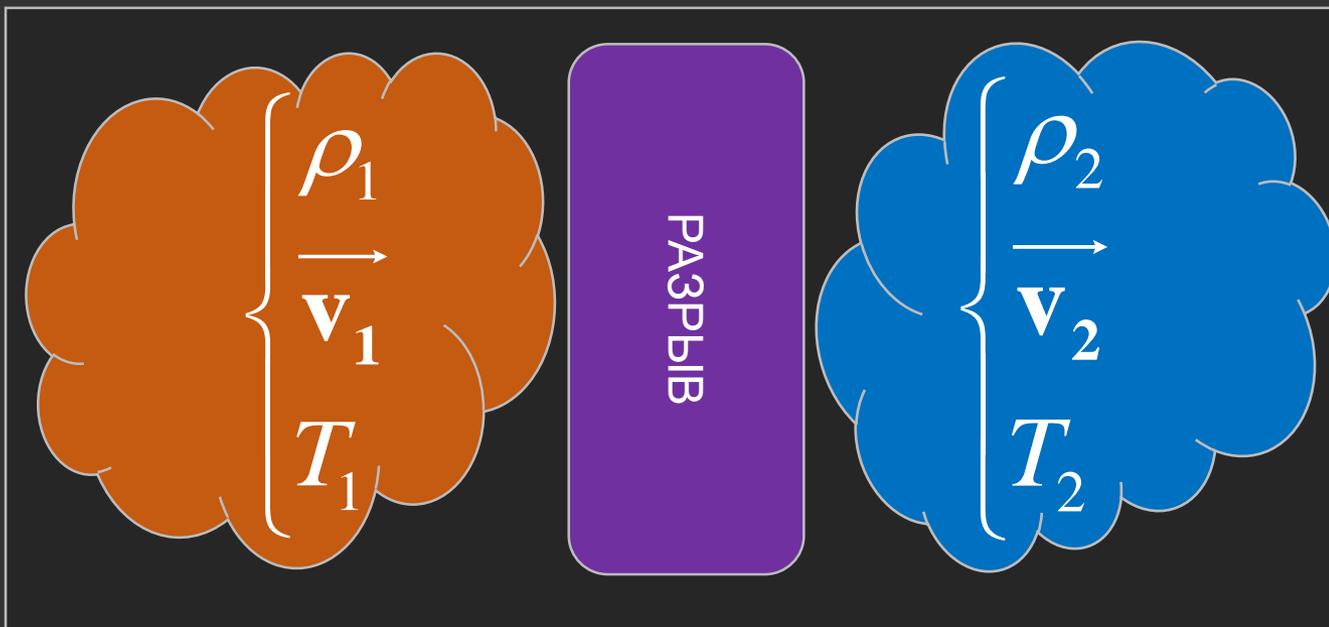
Беззубцев А. С., Лицей «Вторая школа»,

Быков Ф. Л., Гидрометцентр РФ,

Гордин В. А. НИУ ВШЭ, Гидрометцентр РФ

Москва

Уравнения газовой динамики



Тангенциальный разрыв (АФ)

$$\begin{cases} \nabla v_\tau \rightarrow \infty \\ \nabla \rho \rightarrow \infty \\ \nabla^2 v_n \rightarrow \infty \\ \nabla^2 p \rightarrow \infty \end{cases}$$

Ударная волна

$$\begin{cases} \nabla^2 v_\tau \rightarrow \infty \\ \nabla^2 \rho \rightarrow \infty \\ \nabla v_n \rightarrow \infty \\ \nabla p \rightarrow \infty \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \\ \partial_t \vec{v} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} + \rho^{-1} \nabla p - \vec{f} = 0 \\ \partial_t p + (\vec{v} \cdot \nabla) p + \gamma p (\nabla \cdot \vec{v}) = 0 \end{cases}$$

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} lv_x + \Omega^2 x \\ -lv_y + \Omega^2 y \\ -g \end{pmatrix}$$

АФ в поле геопотенциала

АФ в поле геопотенциала – скрытая ложбина.



Классический подход: $\lambda_H = \nabla^2 H = \frac{\partial^2 H}{\partial n^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial \tau^2}$



$$\alpha = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 H}{\partial x \cdot \partial y} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial y \cdot \partial x} & \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \end{vmatrix} \Rightarrow \det(\alpha - \lambda E) = 0 \Rightarrow \lambda_H = \max[\lambda_1, \lambda_2]$$

АФ в поле ветра

Ориентация АФ заранее неизвестна!



Классический подход:

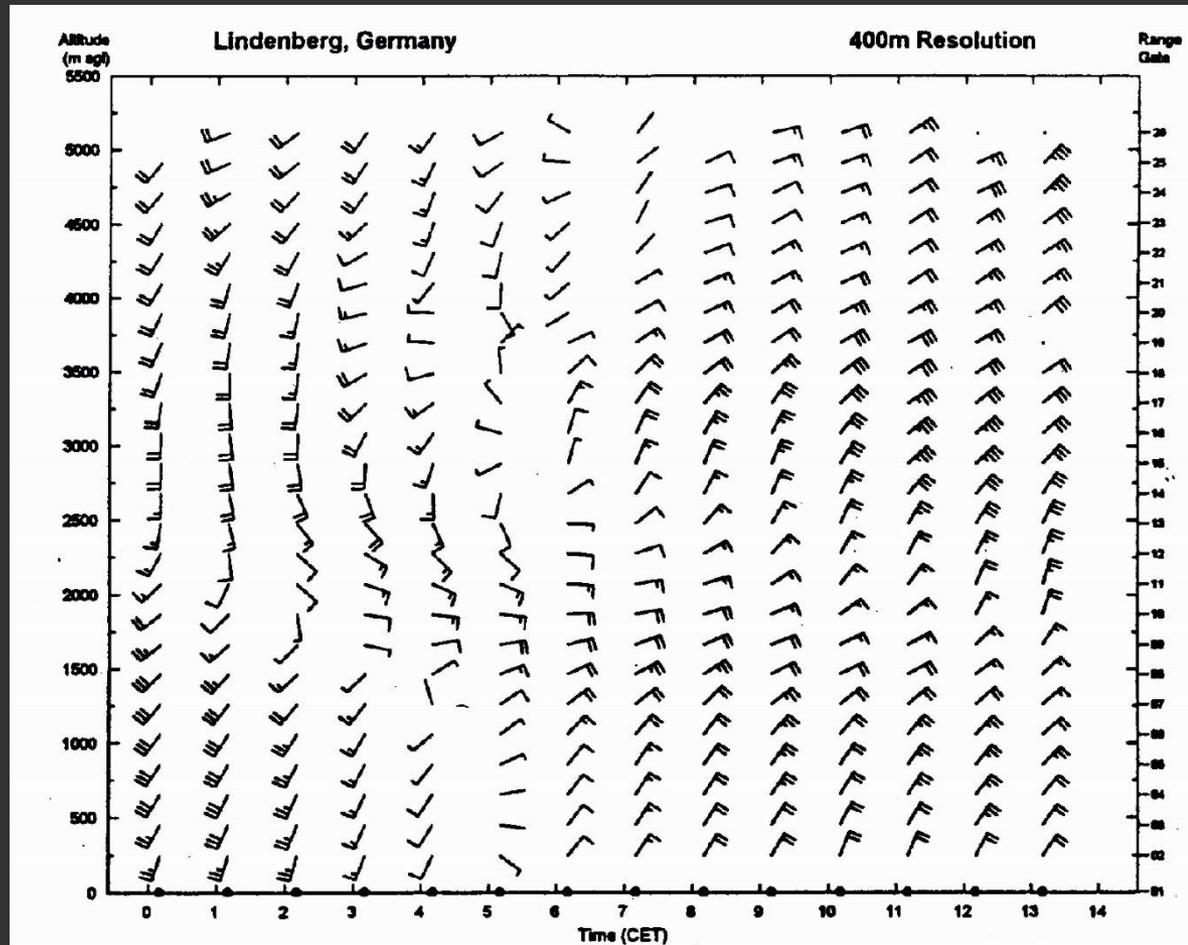
$$\lambda_v = \text{rot}_z \vec{v}$$



$$\beta = \begin{vmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) & -\frac{\partial v_y}{\partial x} \end{vmatrix} \Rightarrow \det(\beta - \lambda E) = 0 \Rightarrow \lambda_v = \max[\lambda_1, \lambda_2]$$

АФ в поле ветра

Поле горизонтального ветра (обозначение стрелами), измеренное профайлером во время прохождения атмосферного фронта над Станцией Линденберг (Германия) в переменных t, z . Длинное перо на стрелке соответствует 5 м/сек, а короткое - 2,5. Направление ветра поменялось с южного и юго-западного на северо-восточное. При этом время смены направления на противоположное на каждой высоте занимает 1-2 часа, притом что компонента



скорости ветра, нормальная к фронту была весьма мала. Вертикально-временная геометрия происходящих изменений достаточно сложная, - следовательно, нельзя предполагать, что фронтальная поверхность хорошо аппроксимируется вертикальной плоскостью. С другой стороны, на приведенных 25 уровнях измерения на соседних достаточно близкие. Следовательно, примерно такая густота уровней и требуется для адекватного описания геометрии фронта

АФ в поле температуры

$$\lambda_T = |\nabla T|$$

Комбинированный предиктор АФ

$$f = \eta_H \lambda_H + \eta_V \lambda_V + \eta_T \lambda_T$$

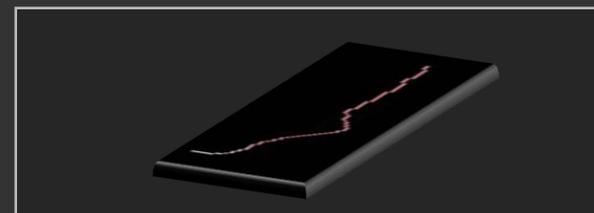
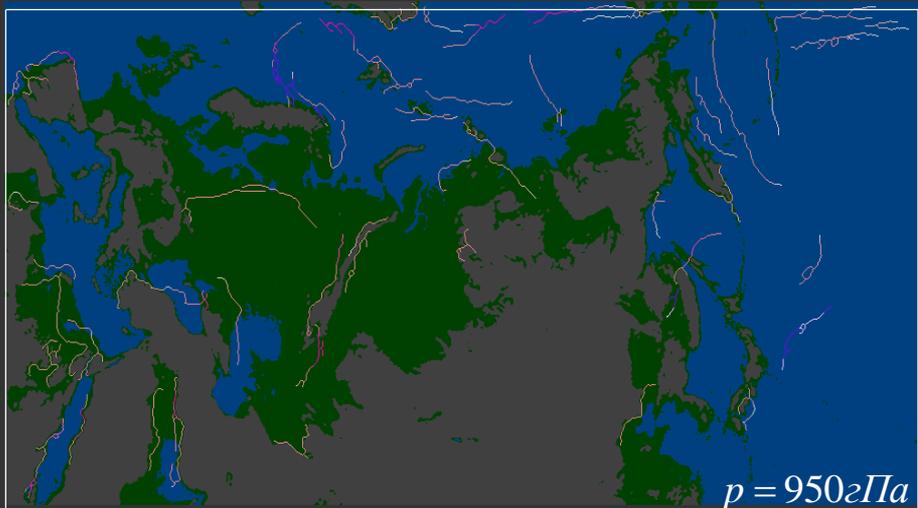
Критерий качества при оптимизации весов:

$$K_{together}(r) - K_{apart}(r) \rightarrow \max$$

Линии АФ



Линии АФ



Наборы точек	
$\left\{ \vec{\mathbf{P}}_j \right\}_{j=0}^{N-1}$	$\vec{\mathbf{P}}_j = \langle x_j, y_j, f_j \rangle$
$\left\{ \vec{\mathbf{P}}_j \right\}_{j=0}^{N-1}$	$\vec{\mathbf{P}}_j = \langle x_j, y_j \rangle$

Родственные линии АФ

Родственные линии АФ – линии одного АФ на соседних барических уровнях.

1. «Похожи» геометрически и по интенсивности.
2. Небольшое среднее расстояние между соответствующими точками.

Показатель преемственности

$$\{S(t), S^*(t)\}$$

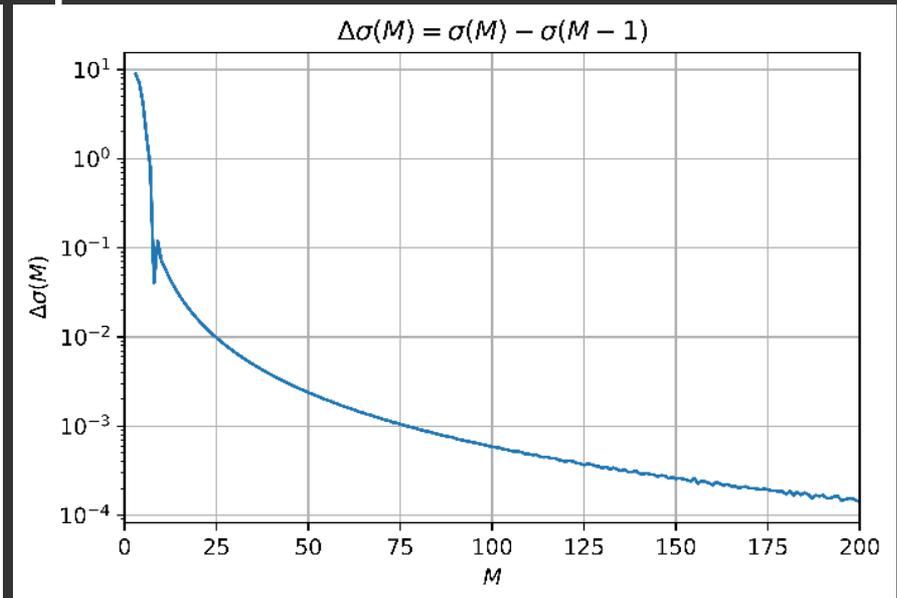
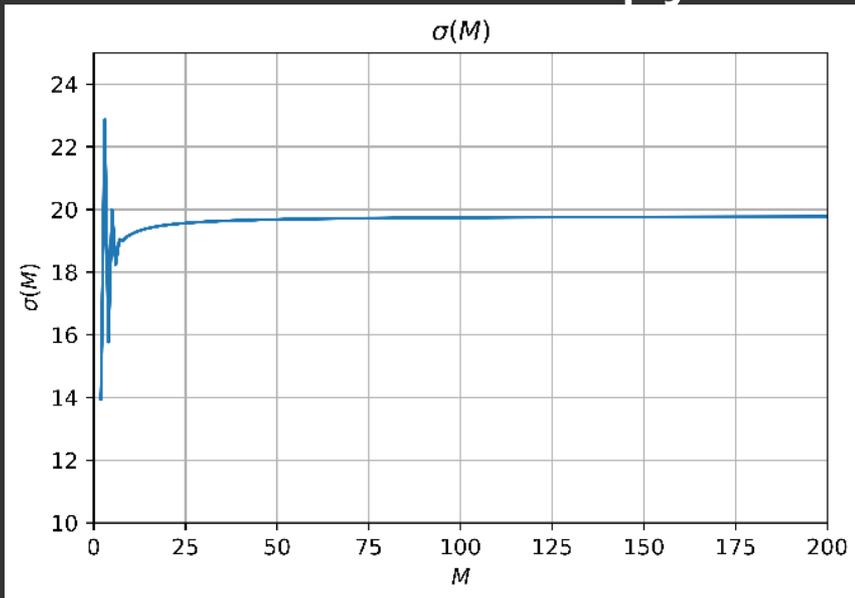
$$\sigma_d = \int_0^1 \|S(t) - S^*(t)\| dt$$

пара параметризованных
сплайн-кривых
на соседних уровнях

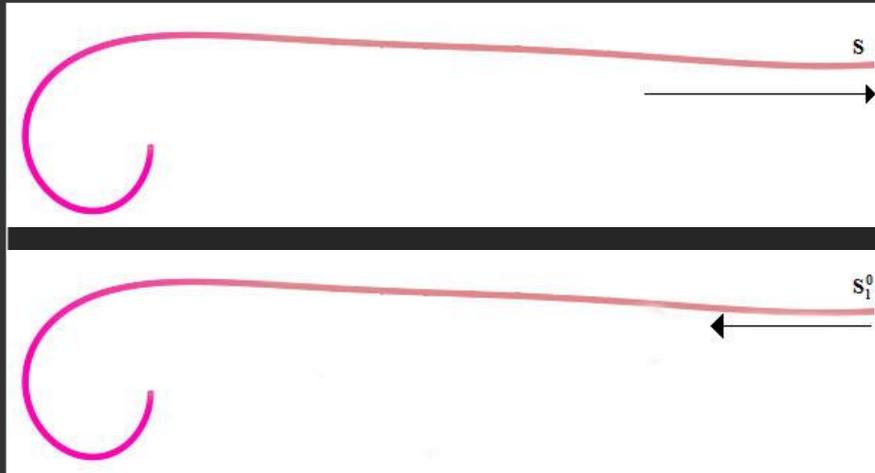
расстояние между кривыми, включая
вклад интенсивности

Родственные линии АФ

1. Родственная линия – ближайшая в смысле показателя преемственности
2. Показатель преемственности не более 40 (среднее расстояние – до 530 км)
3. От числа M точек на линиях σ зависит, но стабилизируется при больших M



Согласование ориентации на родственных линиях



Пример: показатель преемственности достигает минимума при обратной ориентации кривых

$$\sigma_d = \int_0^1 \|\mathbf{S}(t) - \mathbf{S}^*(t)\| dt$$



$$\sigma_r = \int_0^1 \|\mathbf{S}(t) - \mathbf{S}^*(1-t)\| dt$$

$$\sigma = \min \{ \sigma_d, \sigma_r \}$$

Ветвления на линиях АФ

Идея: разбить ветвящуюся линию на обыкновенные

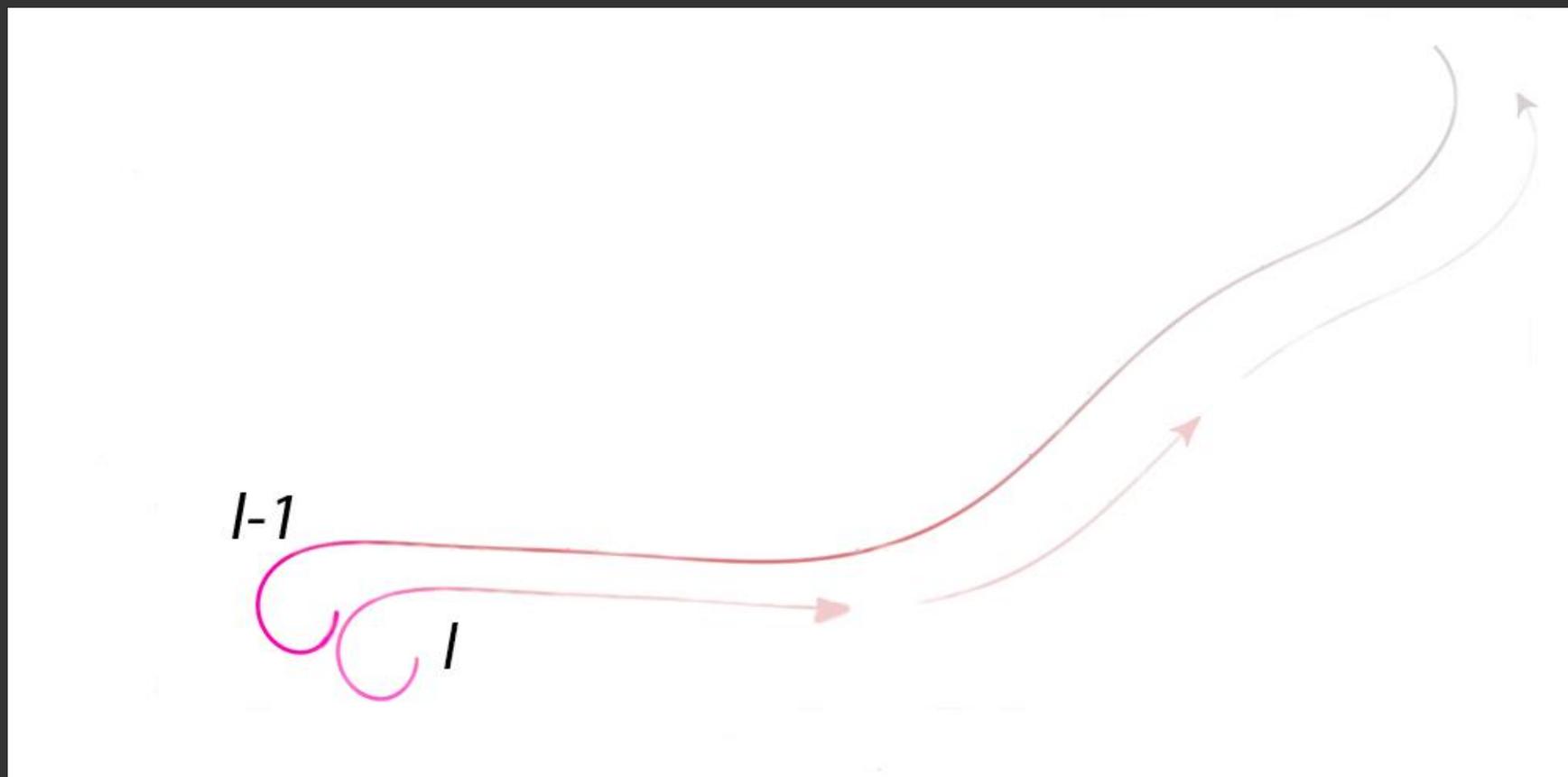


Далее – работаем с полученными обыкновенными линиями
Точка ветвления входит во все три линии

Прерывающиеся линии АФ

Нескольким линиям уровня L соответствует одна и та же родственная на $L-1$.

Гипотеза: эти линии – фрагменты одной фронтальной линии, имеющей разрывы. Восстанавливаем линию по фрагментам, заполняя небольшие (до 65 км) лакуны.



Аппроксимация поверхности АФ по Безье

Интерполяция двумерными сплайнами приводит к «осцилляциям» изображения → используем аппроксимацию Безье

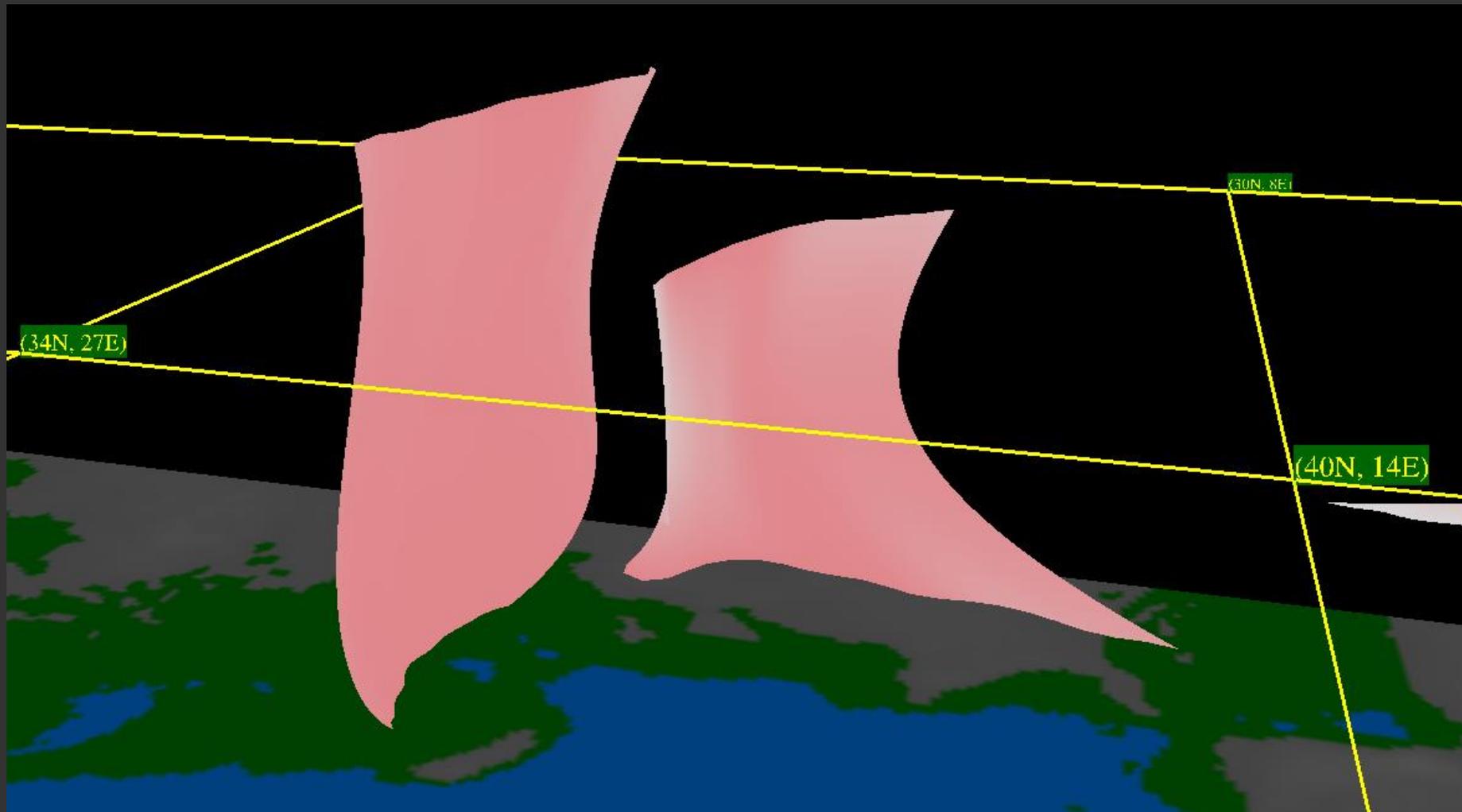
$$\vec{\Phi}(u, v) = \sum_{j=0}^{M-1} \binom{M-1}{j} u^j (1-u)^{M-1-j} \left[\sum_{k=0}^{N_j-1} \binom{N_j-1}{k} v^k (1-v)^{N_j-1-k} \vec{P}_{j,k} \left(\frac{k}{N_j-1} \right) \right]$$

$0 \leq u \leq 1; \quad 0 \leq v \leq 1$

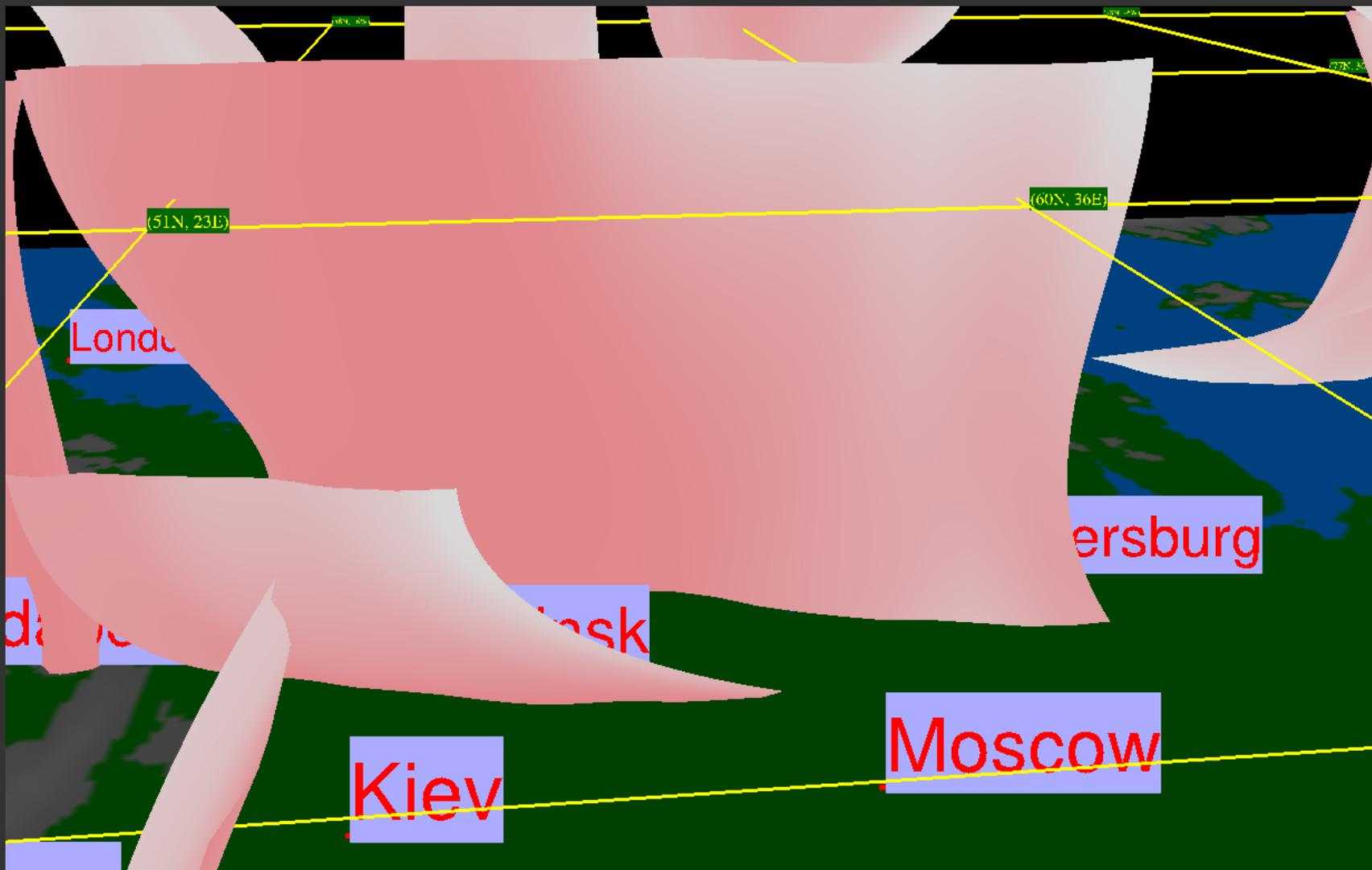
Свойства аппроксимации Безье:

- константа Лебега = 1;
- вычислительная сложность = $O(K \cdot M^2 \cdot N^2)$, K – количество расчётных точек на поверхности, выбираем сами;

Результаты



Результаты



Библиография

1. О. А. Алдухов, Ф. Л. Быков, В. А. Гордин. Крупномасштабные трехмерные корреляционные функции для атмосферы Земли. Ярославский педагогический вестник, Сер. Естественных наук, 4:36–43, 2011.
2. Ф. Л. Быков, В. А. Гордин. Объективный анализ трехмерной структуры атмосферных фронтов. Известия РАН. Сер. Физика атмосферы и океана, 48 (2):172–188, 2012.
3. C. Yuksel, S. Schaefer, J. Keyser. Parameterization and Applications of Catmull – Rom Curves. Academic Press, 2011.
4. Д. Роджерс, Дж. Адамс. Математические основы машинной графики. М.: Мир, 2001.

Спасибо за внимание!

Работа выполнена при поддержке гранта №18-05-0011 в рамках программы «Научный фонд Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» (НИУ ВШЭ)» в 2018 – 2019 гг. и в рамках государственной поддержки ведущих университетов Российской Федерации «5-100».