Об интегральных уравнениях, возникающих в модели стационарных сообществ

Никитин А.А., Николаев М.В.

Москва

1 ноября, 2018г.

«**Семинар НУГ “Дифференциальные уравнения и численные методы»**»
НИУ ВШЭ, МГУ им. М.В. Ломоносова

Уравнение равновесия

$$\big(b + d'\, w(x)\big)\mathbf{C}(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} b\, m(y)\,\mathbf{C}(x+y)\,dy + \\ + \frac{b}{(b-d)}\, m(x) \int\limits_{-\infty}^{\infty} d'\, w(y)\,\mathbf{C}(y)\,dy.$$

Ulf Dieckmann, *"IIASA's Spring Workshop on Methodology"*, 2005

Описание модели

Рассматривается модель с одним видом растений обитающих в области A. Характеристики модели:

- $\mathbf{C}(x)$ - второй момент, ожидаемая плотность пар на расстоянии x (pairwise density).
- b, d, d' - темпы рождаемости (birth rate), смертности (death rate) и смертности от конкуренции (competition rate)
- $w(x), m(x)$ - ядра конкуренции/разброса семян на расстоянии x (competition and dispersion kernels), плотности вероятностей

Постановка задачи

Выпишем все ограничения, накладываемые на функции w, m и параметры b, d, d':

$$m(x) > 0, \quad w(x) > 0, \quad m(x) = m(-x), \quad w(x) = w(-x),$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} w(x) = 1, \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} m(x) = 1,$$

$$\lim_{|x|\to\infty} m(x) = \lim_{|x|\to\infty} w(x) = 0,$$

$$\lim_{|x|\to\infty} \mathbf{C}(x) = \mathbf{N}^2,$$

$$b > d > 0, \quad d' > 0.$$

Доказательство некорректности

$$\big(b + d'\,w(x)\big)\mathbf{C}(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} b\,m(y)\,\mathbf{C}(x+y)\,dy + \\ + \frac{b}{(b-d)}\,m(x)\int\limits_{-\infty}^{\infty} d'\,w(y)\,\mathbf{C}(y)\,dy.$$

Делая замену $\mathbf{C} = \widetilde{\mathbf{C}} + \mathbf{N}^2$ в первом слагаемом и в свёртке, получаем:

$$b\big(\mathbf{N}^2 + \widetilde{\mathbf{C}}(x)\big) + d'w(x)\mathbf{C}(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} b\,m(y)\big(\mathbf{N}^2 + \widetilde{\mathbf{C}}(x+y)\big)\,dy + \\ + \frac{b}{(b-d)}\,m(x)\int\limits_{-\infty}^{\infty} d'\,w(y)\,\mathbf{C}(y)\,dy.$$

Доказательство некорректности

Что используя равенство $\int\limits_{-\infty}^{\infty} m(x) = 1$ упрощается:

$$b\,\widetilde{\mathbf{C}}(x) + d' w(x)\mathbf{C}(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} b\, m(y)\,\widetilde{\mathbf{C}}(x+y)\,dy + \\ + \frac{b}{(b-d)}\,m(x) \int\limits_{-\infty}^{\infty} d'\,w(y)\,\mathbf{C}(y)\,dy. \tag{1}$$

Предположим далее, что функции w, m и $\widetilde{\mathbf{C}} \in L_1(\mathbb{R})$, и применим к обеим частям равенства (1) преобразование Фурье: $\widehat{f}[p] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(y)e^{2\pi\imath pt}dt$.

Доказательство некорректности

$$b\,\widehat{\widehat{\mathbf{C}}}[p] + d'\,\widehat{w\mathbf{C}}[p] = b\widehat{m}[p]\cdot\widehat{\widehat{\mathbf{C}}}[p] + \frac{b}{(b-d)}\,\widehat{m}[p]\int\limits_{-\infty}^{\infty} d'\,w(y)\,\mathbf{C}(y)\,dy. \qquad (2)$$

Рассмотрим уравнение (2) в точке $p=0$, и заметив выполнение соотношений:

$$\widehat{m}[0] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} m(y)dy = 1,\ \ \widehat{w\mathbf{C}}\,[0] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} w(y)\mathbf{C}(y)dy,$$

получаем равенство:

$$\frac{d'd}{b-d}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} w(y)\mathbf{C}(y)dy = 0.$$

Доказательство некорректности

Полученное равенство равносильно одной из двух альтернатив:

- Справедливо $d' \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{C}(y) w(y)\, dy = 0$, что влечёт за собой отсутствие внутривидовой конкуренции, и достаточно просто как с биологической (экспоненциальный рост популяции), так и с математической (аналитическое решение, подразумевающее при $d' \neq 0$ выполнение равенства $w(y)\mathbf{C}(y) = 0$ почти всюду) точки зрения;
- $d = 0$, что подразумевает рассмотрение биологической популяции, смертность которой обусловлена исключительно внутривидовой конкуренцией (отсутствие смертности от окружающей среды).

Отметим, что с математической точки зрения вторая альтернатива ($d = 0$) представляет определённый интерес.

Дальнейшие пути исследования

Актуальные задачи

- Исследование многомерного уравнения Дикмана с нормальными ядрами w, m и $d = 0$;
- Исследование уравнений с другими типами ядер (Kurtosis);
- Случай $d > 0$;
- Рассмотрение альтернативных ”замыканий” пространственных моментов;
- Исследование модели с двумя видами сообществ;

Ulf Dieckmann, 2014.

⋆ Проведение компьютерных биологических симуляций.

Описание модели

Для описания состояния модели мы используем три основных функции-момента (spatial moments):

- **N** - первый момент, ожидаемая плотность популяции (population density).
- $\mathbf{C}(x)$ - второй момент, ожидаемая плотность пар на расстоянии x (pairwise density).
- $\mathbf{T}(x, y)$ - третий момент, ожидаемая плотность троек, первый член которых отстоит от второго и третьего на расстояниях x, y соответственно (triplet density).

Динамика модели

Динамика первого момента

$$\dot{\mathbf{N}} = (b - d)\mathbf{N} - d' \int_{\mathbb{R}^n} w(x)\mathbf{C}(x)dx$$

Динамика второго момента

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{C}}(x) = &+ bm(x)\mathbf{N} + b \int_{\mathbb{R}^n} m(y)\mathbf{C}(x+y)dy \\ &- d\mathbf{C}(x) - d'w(x)\mathbf{C}(x) - d' \int_{\mathbb{R}^n} w(y)\mathbf{T}(x,y)dy\end{aligned}$$

Замыкания (moment closures)

Свойства замыканий

1. $\lim\limits_{|y|\to\infty} \mathbf{T}(x,y) = \mathbf{C}(x)\mathbf{N}$.
2. $\lim\limits_{|x|\to\infty} \mathbf{T}(x,y) = \mathbf{C}(y)\mathbf{N}$.
3. Если $\mathbf{C}(x) = \mathbf{N}^2$, то $\mathbf{T}(x,y) = \mathbf{N}^3$.

Примеры замыканий

1. $\mathbf{T}_1(x,y) \approx \mathbf{C}(x)\mathbf{N} + \mathbf{C}(y)\mathbf{N} + \mathbf{C}(x-y)\mathbf{N} - 2\mathbf{N}^3$;
2. $\mathbf{T}_2(x,y) \approx \dfrac{\mathbf{C}(x)\mathbf{C}(y)}{\mathbf{N}}$;
3. $\mathbf{T}_3(x,y) \approx \dfrac{1}{2\mathbf{N}}\left(\mathbf{C}(x)\mathbf{C}(y) + \mathbf{C}(x)\mathbf{C}(y-x) + \mathbf{C}(y)\mathbf{C}(y-x) - \mathbf{N}^2\right)$;
4. $\mathbf{T}_4(x,y) \approx \alpha\mathbf{T}_3 + (1-\alpha)\mathbf{T}_2$;
5. $\mathbf{T}_5(x,y) \approx \dfrac{\mathbf{C}(x)\mathbf{C}(y)\mathbf{C}(x-y)}{\mathbf{N}^3}$.

Результирующее уравнение равновесия

Введённые обозначения

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\cdot g(x)\,dx = \langle f, g\rangle; \qquad \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\cdot g(x)\,dx = [f * g];$$

$$d' w(x) = \overline{w}(x); \quad bm(x) = \overline{m}(x);$$

$$\overline{\mathbf{Q}} = \frac{\mathbf{C}}{\mathbf{N}^2} - 1; \quad \langle \overline{\omega}, \overline{\mathbf{Q}} + 1\rangle = \mathbf{Y}.$$

Результирующее уравнение

$$\begin{aligned}(\overline{\omega} + b - \frac{\alpha}{2}\left(b - d - \frac{d'(b-d)}{\mathbf{Y}}\right)\Big)\overline{\mathbf{Q}} = \frac{\mathbf{Y}\overline{m}}{b-d} - \overline{\omega} + [\overline{m} * \overline{\mathbf{Q}}] - \\ - \alpha\frac{(b-d)}{2\mathbf{Y}}\left((\overline{\mathbf{Q}} + 2)[\overline{\omega} * \overline{\mathbf{Q}}] + [\overline{\omega}\overline{\mathbf{Q}} * \overline{\mathbf{Q}}]\right)\end{aligned} \tag{3}$$

Нелинейный интегральный оператор

Вид оператора

Исследуемое уравнение имеет вид:

$$\overline{\mathbf{Q}} = \mathcal{A}\overline{\mathbf{Q}},$$

где

$$\mathcal{A}\mathbf{f} = \frac{\dfrac{\mathbf{Y}\overline{m}}{b-d} - \overline{\omega} + [\overline{m} * \mathbf{f}] - \alpha \dfrac{b-d}{2\mathbf{Y}} \left((\mathbf{f}+2)[\overline{\omega} * \mathbf{f}] + [\overline{\omega}\mathbf{f} * \mathbf{f}] \right)}{\overline{\omega} + b - \dfrac{\alpha}{2}\left(b - d - \dfrac{d'(b-d)}{\mathbf{Y}} \right)}. \qquad (2)$$

Здесь $\mathbf{Y} = \langle \overline{\omega}, \, \mathbf{f}+1 \rangle$.

Замечание

Всюду далее будем дополнительно считать, что функции m и ω являются непрерывными функциями.

Представление в виде суммы

Представим оператор $\mathcal{A}$ в виде суммы $\mathcal{S} + \mathcal{K}$, где

$$\mathcal{S}\mathbf{f} = \frac{\dfrac{\mathbf{Y}\overline{m}}{b-d} - \overline{\omega} + [\overline{m} * \mathbf{f}] - \alpha\dfrac{b-d}{\mathbf{Y}}[\overline{\omega} * \mathbf{f}]}{\overline{\omega} + b - \dfrac{\alpha}{2}\left(b - d - \dfrac{d'(b-d)}{\mathbf{Y}}\right)},$$

$$\mathcal{K}\mathbf{f} = -\alpha\frac{b-d}{2\mathbf{Y}} \cdot \frac{\mathbf{f}[\overline{\omega} * \mathbf{f}] + [\overline{\omega}\mathbf{f} * \mathbf{f}]}{\overline{\omega} + b - \dfrac{\alpha}{2}\left(b - d - \dfrac{d'(b-d)}{\mathbf{Y}}\right)}.$$

Компактность оператора $\mathcal{S}$

Критерий Рисса

Множество $K \subset L_p(\mathbb{R})$ является предкомпактом тогда и только тогда, когда

1. $\exists M > 0 : \ \forall f \in K \Longrightarrow ||f||_p \le M$
2. $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \ \forall h \in \mathbb{R} : \ |h| \le \delta, \forall f \in K \Longrightarrow$

$$\Big(\int\limits_{\mathbb{R}} |f(x+h) - f(x)|^p \, dx \Big)^{1/p} \le \varepsilon.$$

Компактность оператора $\mathcal{S}$

Теорема 1

Пусть $b > d \geq 0$, $d' \geq 0$, $\alpha \in [0;\ 1]$, тогда оператор $\mathcal{S}$ определён в шаре $B(R) = \left\{ f \in L_1(\mathbb{R}^n) :\ ||f||_1 \leq R < \dfrac{1}{||\omega||_C} \right\}$, действует в $L_1(\mathbb{R}^n)$ и является компактным.

План доказательства

- С помощью критерия Рисса в $L_1(\mathbb{R}^n)$ показывается, что свёртки $[\overline{m} * \mathbf{f}]$ и $[\overline{\omega} * \mathbf{f}]$ являются компактными операторами относительно функций $\mathbf{f}$.
- Доказывается, что выражение $\overline{\omega} + b - \dfrac{\alpha}{2}\left(b - d - \dfrac{d'(b-d)}{\mathbf{Y}} \right)$ и $\mathbf{Y}$ равномерно по $\mathbf{f}$ отделены от нуля.

Существование неподвижной точки оператора $\mathcal{S}$

Теорема Лере–Шаудера

Если оператор $\mathcal{S}$, определённый на замкнутом шаре B банахова пространства, является компактным и $\mathcal{S}[\partial B] \subset B$, то $\exists f \in B: \; f = \mathcal{S}f$.

Теорема 2

Пусть $\alpha \in [0,1]$. Если R и d' выбраны так, что

$$d' \geqslant \frac{6\|\omega\|_C R - 2}{1 - \|\omega\|_C R} > 0, \quad R < \frac{1}{\|\omega\|_C},$$

то $\exists b > d'$ такое, что оператор $\mathcal{S}$ имеет в радиусе шара R неподвижную точку.

Некомпактность оператора $\mathcal{K}$

Известно, что функция $\overline{\omega}(x)$ положительна и непрерывна. Зафиксируем точку x_0 и положим $\mu = \overline{\omega}(x_0) > 0$. Существует окрестность $O_\delta(x_0)$, в которой верно неравенство $\overline{\omega}(x) > \mu/2$. Обозначим за I_n отрезок $[nx_0;\ (n+1)x_0]$ и рассмотрим последовательность функций

$$f_n(x) = \begin{cases} 1,\ x \in I_n, \\ 0,\ x \notin I_n. \end{cases}$$

Эта последовательность ограничена в $L_1(\mathbb{R})$, однако нетрудно показать, что $\{\mathcal{K}f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ не имеет фундаментальной подпоследовательности, в силу того, что

$$||\mathcal{K}f_n - \mathcal{K}f_{n+p}|| \geq M\mu\delta^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall p \in \mathbb{N},$$

где $M > 0$.

Существование неподвижной точки оператора $\mathcal{A}$

Теорема о неподвижных точках возмущенного компактного оператора

Пусть на области G банахова пространства задан компактный оператор с ненулевым вращением на границе. Если его возмутить малым гладким оператором, то возмущенный оператор будет иметь в G неподвижные точки.

[М.А. Красносельский, «Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений»]

Замечание

Здесь под малым гладким оператором понимается оператор достаточно малой нормы, удовлетворяющий условию Липшица с некоторой малой постоянной.

Существование неподвижной точки оператора $\mathcal{A}$

Теорема 3

В условиях теорем 1 и 2 оператор $\mathcal{A}$, заданный формулой (2) имеет в шаре $B(R)$ неподвижные точки при достаточно малой норме $||\omega||_C$.

План доказательства

- Показывается, что оператор $\mathcal{K}$ является липшицевым.
- Доказывается, что норма оператора $\mathcal{K}$ стремится к нулю, когда $||\omega||_C$ стремится к нулю.
- Применяется теорема о неподвижных точках возмущенного компактного оператора.

Существование нетривиального решения уравнения равновесия

Следствие теоремы 3

(Условие существования нетривиального решения.)

Если
$$\frac{d'\overline{m}}{b-d} - \overline{\omega} \neq 0,$$
то уравнение равновесия имеет нетривиальное решение.

Конец

Спасибо за внимание!