ПРИМЕНЕНИЕ ОБОБЩЕННЫХ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА С КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ КОМПАКТНЫХ СХЕМ НА ТРЕУГОЛЬНЫХ СЕТКАХ

В.А.Гордин НИУ-ВШЭ, Гидрометцентр РФ
Д.А.Шадрин НИУ-ВШЭ, факультет математики.

Аннотация. Численно решается неоднородное уравнение Гельмгольца на треугольной сетке в двух средах с учетом граничных условий. Для расчета используется компактная разностная схема, высокого (4-го) порядка.

ВВЕДЕНИЕ

Уравнения Пуассона и Гельмгольца часто встречаются в физических задачах, как правило описывающих диффузионные процессы.

Уравнение Гельмгольца на плоскости в общем виде:

(1) $$-div\theta(x,y)gradU(x,y)+K^2U(x,y)=F(x,y)$$

Здесь U – решение уравнения, F – правая часть, K – некоторый коэффициент (возможно комплексный), θ-некоторая функция, зависящая от точки области. Условно её можно считать коэффициентом диффузии.

В данном докладе рассмотрен случай, когда θ представляет из себя кусочно-постоянную функцию. Область решения разделена на две части, в первой $\theta(x,y)=\vartheta_+$, во второй $\theta(x,y)=\vartheta_-$, где ϑ_-,ϑ_+ - константы.

В качестве иллюстрации в докладе будет описана задача о нахождении тока и поля температур в кабеле с острыми углами, учитывая влияние скин-эффекта.

Описание физической задачи:

Скин-эффект - сосредоточение переменного тока вблизи поверхности проводника.

Уравнение

$$\Delta H + KH = 0,$$

где Δ - оператор Лапласа, H - магнитное поле, мнимый коэффициент $K = \frac{4\pi\mu\sigma i\omega}{c^2}$, где c – скорость света, σ - проводимость, μ - магнитная проницаемость, ω - частота периодического тока, получается из параболического уравнения

$$\frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\frac{\partial H}{\partial t} = \Delta H. \qquad (2)$$

Предполагается, что область решения – бесконечный кабель постоянного сечения *G*. В литературе (см., например, [Ландау-1982]) обычно рассматривается кабель круглого сечения (т. е. *G* – круг). В случае бесконечного кабеля произвольного, но постоянного сечения можно предполагать, что вектор тока и напряженность электрического поля *E* направлены вдоль оси кабеля, и векторное уравнение (1) свести к такому же, но скалярному, относительно амплитуды тока *j*. Магнитное поле *H* направлено перпендикулярно оси кабеля.

По времени *t* и по переменной *z* можно выполнить преобразование Фурье, т. е. представить решение в виде $H(t,x,y,z) = \exp[i(\omega t + kz)]\Phi(x,y)$. В нашем случае зависимости от *z* нет, т. е. *k*=0.

Тогда уравнение (1) относительно функции Ф двумерное и рассматривается для произвольного сечения проводника. Разумеется, на концах проводника картина будет не двумерной, а существенно трехмерной, но нас интересует ситуация вдали от концов длинного кабеля (длина много больше диаметра). Поэтому далее рассматривается двумерный оператор Лапласа:

$$\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 .$$

После того как уравнение относительно скалярной комплекснозначной функции Ф решено, определяется плотность тока *j*. Затем нужно решить уравнение теплопроводности с источником. По прошествии длительного времени установится стационарное решение уравнения теплопроводности, т. е. удовлетворяющее уравнению Пуассона

$$\Delta T = A\left| j(x, y)\right|^2 . \quad (3)$$

Особый интерес представляет случай малых углов треугольника, где из-за скин-эффекта ток, а значит и температура, могут быть велики.

Граничные условия

В этой работе описано решение задачи с тренировочным граничным условием Дирихле для отладки схемы. Техническая задача состоит в том, чтобы найти напряженность электрического и магнитного поля для двух сред: проводника и диэлектрика вокруг него (см. Рис 1).

Модель:

1) кабель и диэлектрик имеют треугольную форму
2) слой диэлектрика достаточно большой по сравнению с проводником.

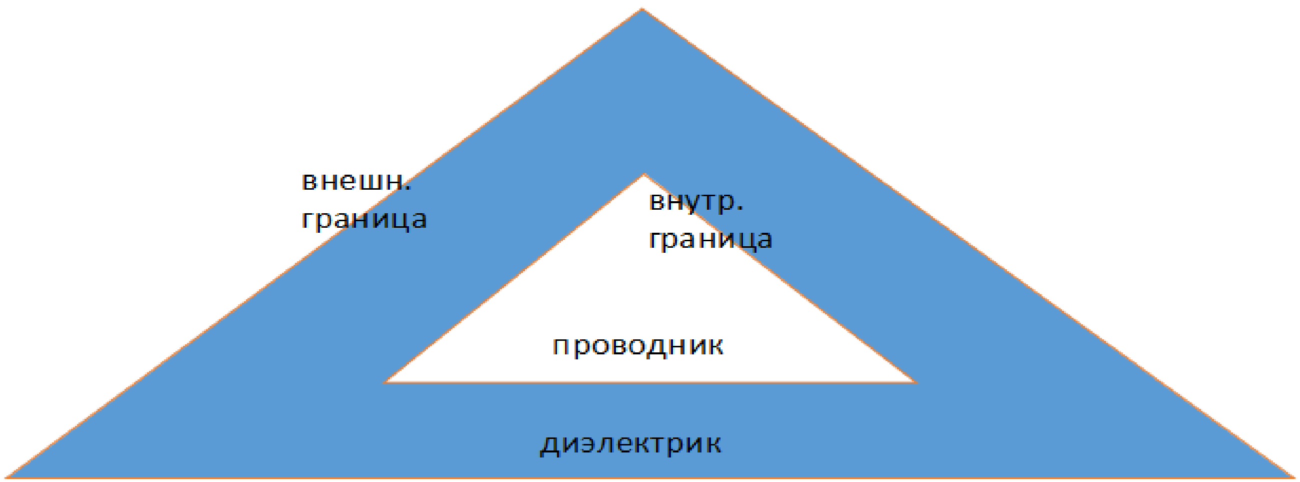

Рис. 1. Горизонтальное сечение кабеля. Геометрия проводника и диэлектрика

На внешней границе имеем:

$$\vec{E}_0 = rot(\Phi_0 \vec{e_z}) + \frac{ci}{\omega \varepsilon_0} rot\ rot(\Psi_0 \vec{e_z}) \quad (4)$$

$$\vec{H}_0 = rot(\Psi_0 \vec{e_z}) + \frac{ci}{\omega \varepsilon_0} rot\ rot(\Phi_0 \vec{e_z}) \quad (5)$$

Все формулы выводятся из уравнений Максвелла.

На внешней границе используем асимптотики *E* и *H*, т. к. считаем, что эта граница расположена достаточно далеко от проводника. Разностную схему составляем для Ψ_0 и Φ_0.

В случае внутренней границы:

$$\frac{\eta_0^2}{\mu_0}\Phi_0 = \frac{\varepsilon_0 \omega^2}{c^2}\Phi_0 = \frac{\eta^2}{\mu}\Phi = \frac{\varepsilon' \omega^2}{c^2}\Phi \qquad (6)$$

$$\varepsilon_0 \Phi_0 = \varepsilon' \Phi \qquad (7)$$

$$\partial_n \Phi = \partial_n \Phi_0 \qquad (8)$$

Функция Φ имеет скачок на границе, следовательно, задачу удобнее решать для функции

$$\Theta_0 = \varepsilon_0 \Phi_0$$

$$\Theta = \varepsilon' \Phi$$

, где на внутренней границе

$$\Theta = \Theta_0$$

$$\varepsilon_0 \partial_n \Theta = \varepsilon' \partial_n \Theta_0$$

Аналогично для функции Ψ

$$\Upsilon_0 = \mu_0 \Psi_0$$

$$\Upsilon = \mu \Psi$$

, где на внутренней границе

$$\Upsilon = \Upsilon_0$$

$$\mu_0 \partial_n \Upsilon = \mu \partial_n \Upsilon_0$$

КОМПАКТНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ

Решение эллиптических задач здесь производится на треугольных сетках. Первый этап – расчет коэффициентов разностной схемы, аппроксимирующей уравнение *L[u]=f* в каждой точке сетки $< x_*, y_* >$:

$$\sum k_{ij} u(x_* + i, y_* + j) = m_{ij} f(x_* + i, y_* + j) \tag{9}$$

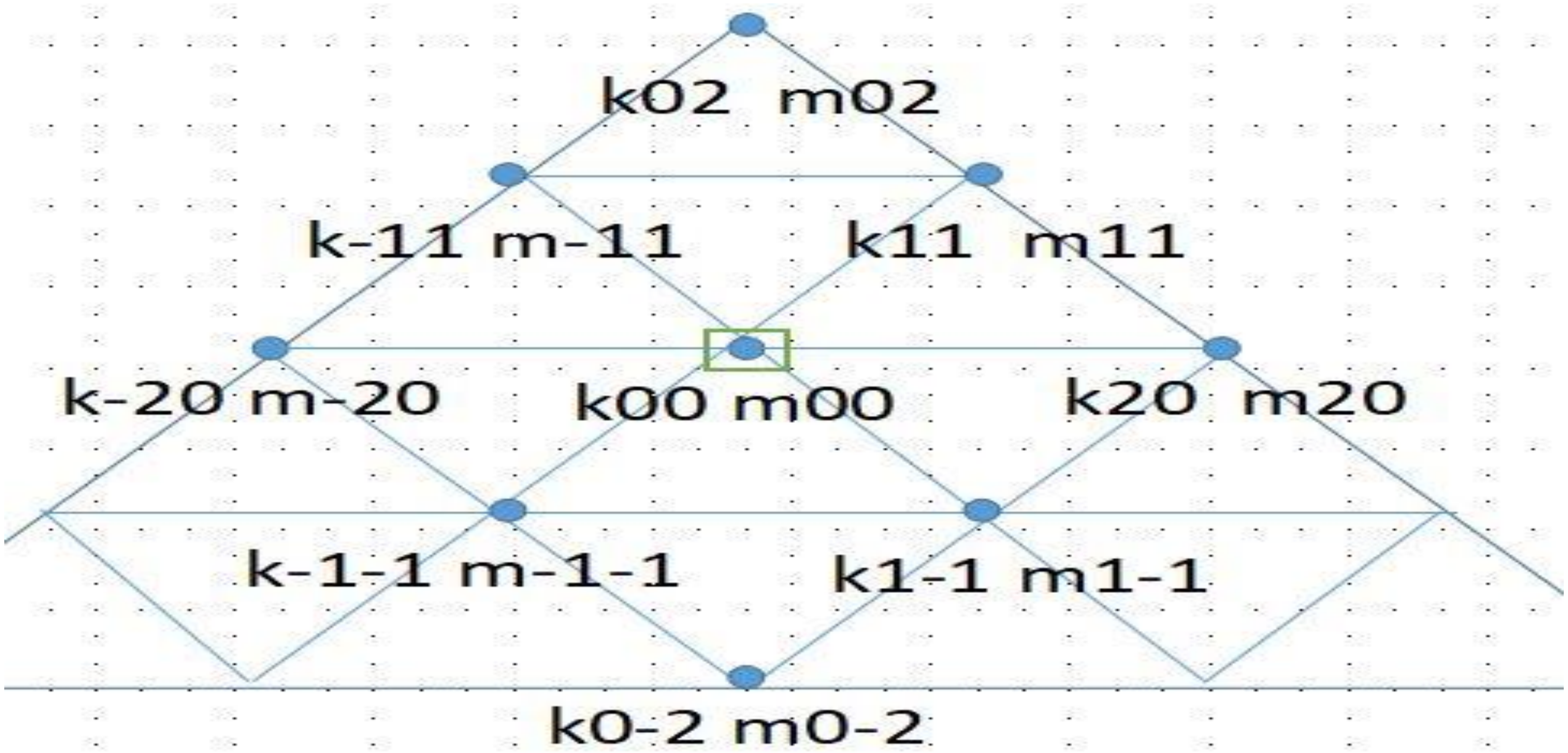

Рис. 2. Веса в центральной точке девятиточечного шаблона (выделенные точками) обозначены а – для неизвестной функции и р – для правой части уравнения.

Важно отметить, что из-за наличия границ сред этот шаблон нельзя использовать в каждой точке сетки. Подробное описание всех видов шаблонов есть в отдельном файле.

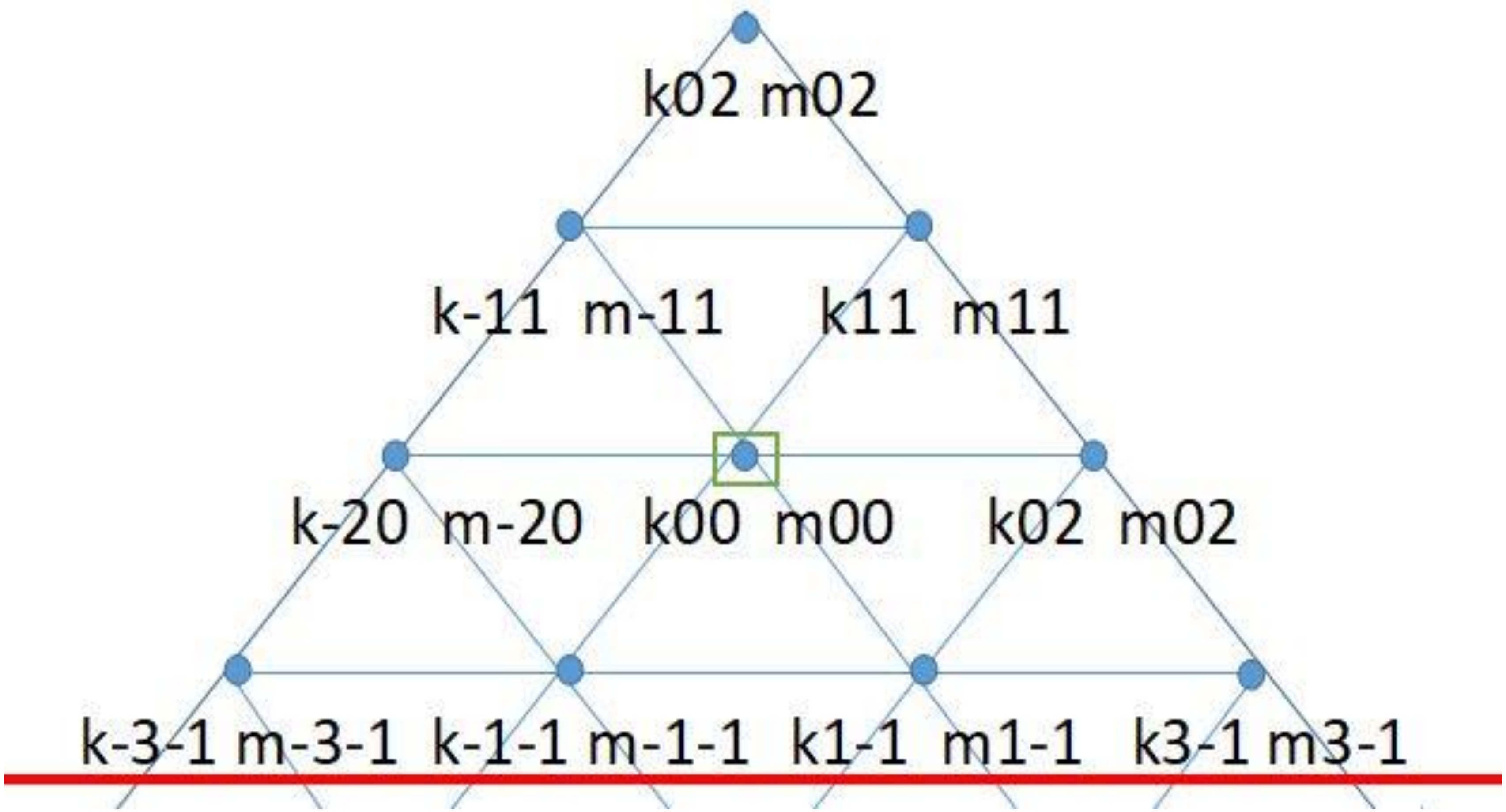

Рис.3 Для нижнего приграничного слоя используется 10-точечный шаблон. Отметим, что попытка использовать 10-точечный шаблон для всех точек понижает порядок аппроксимации разностной схемы с 4-го до 3-го.

Векторы в (9) берем в соответствии с шаблоном, см. альбом шаблонов. Коэффициенты в соотношении (9) определяются из условий аппроксимации: если функция u совпадает с одной из тестовых функций, а функция f получается по формуле $L[u]=f$, то мы можем подобрать коэффициент так, чтобы формула 9 была верна. Роль тестовых функций u исполняют мономы $x^{\alpha} y^{\beta}$.

Заметим, что в каждой отдельной среде аппроксимируется уравнение, а на границе сред – стыковочные условия. Шаблоны для каждой точки должны включать точки только из этой же среды. В связи с этим было необходимо создать большое количество различных шаблонов. На рис. 2, 3 приведены примеры некоторых из них.

Аппроксимация Граничных условий

В точках находящихся на границе сред аппроксимируются стыковочные условия. Действовал как при аппроксимации уравнения: брал тестовые функции u, удовлетворяющие стыковочным условиям (7, 8), функции f вычислял, как $L[u]=f$.

Так как стыковочные условия требуют непрерывность решения вдоль нормали к границе, а также непрерывность потока вдоль нормали, то тестовые функции были записаны в нормальной системе координат (орт n – направлен вдоль нормали к границе сред, орт s – по касательной).

Тестовые функции будут иметь вид мономов: $s^{\alpha} n^{\beta}$, где α и β целые положительные степени, $\beta \neq 1$. В случае, когда степень n единица, берем функции $u = \begin{cases} \frac{1}{\theta_+} s^{\alpha} n & \textit{внутри} \quad \textit{угла} \\ \frac{1}{\theta_-} s^{\alpha} n & \textit{снаружи} \end{cases}$.

Аппроксимация граничных условий в точках угла.

В качестве тестовых функций будем рассматривать обощенно-собственные функции $Y(r,\varphi)$ оператора Лапласа с переменным коэффициентом в полярной системе координат:

(10) $L = -\mathbf{div}\left[\vartheta(\varphi)\,\mathbf{grad} U(r,\varphi)\right]$

$$L = -\left(\vartheta(\varphi) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial}{\partial r} U) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\vartheta(\varphi) \frac{\partial}{\partial \varphi} U \right) \right)$$

Обобщенно-собственная функция (Y) по определению такая функция, что:

(11) $\begin{cases} L(Y) = \mu \vartheta_+ Y & \textit{в} \quad \textit{проводнике} \\ L(Y) = \mu \vartheta_- Y & \textit{в} \quad \textit{диэлектрике} \end{cases}$

Подставляя уравнение (10) в (11) получаем систему уравнений на функцию Y:

$$
(12)\quad \begin{cases} -\left(\vartheta(\varphi)\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(r\dfrac{\partial}{\partial r}Y)+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial\varphi}\left(\vartheta(\varphi)\dfrac{\partial}{\partial\varphi}Y\right)\right)=\mu\vartheta_+Y \quad \varphi\in[0;\alpha] \\ -\left(\vartheta(\varphi)\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(r\dfrac{\partial}{\partial r}Y)+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial\varphi}\left(\vartheta(\varphi)\dfrac{\partial}{\partial\varphi}Y\right)\right)=\mu\vartheta_-Y \quad \varphi\in[\alpha-2\pi;0] \end{cases}
$$

С учетом стыковочных условий:

$$
(13)\quad \begin{cases} Y_+(r,0)=Y_-(r,0)\ \textit{непрерывность } Y \textit{ при } \varphi=0 \\ Y_+(r,\alpha)=Y_-(r,\alpha-2\pi)\ \textit{стыковка по углу} \\ \vartheta_+\dfrac{\partial}{\partial\varphi}(Y_+(r,0))=\vartheta_-\dfrac{\partial}{\partial\varphi}(Y_-(r,0)) \\ \vartheta_+\dfrac{\partial}{\partial\varphi}(Y_+(r,\alpha))=\vartheta_-\dfrac{\partial}{\partial\varphi}(Y_-(r,\alpha-2\pi))\ \textit{условия непрерывности потока} \end{cases}
$$

Систему (12) решаю методом Фурье: ищем решение в виде $Y(r,\varphi)=A(\varphi)B(r)$.

$$
\left(A\vartheta(\varphi)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial}{\partial r}B)+B\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\vartheta(\varphi)\frac{\partial}{\partial\varphi}A\right)\right)=-\mu\vartheta(\varphi)AB
$$

$$
\boldsymbol{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial}{\partial r}B)+B\frac{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\vartheta(\varphi)\frac{\partial}{\partial\varphi}A\right)}{\vartheta(\varphi)A}+\mu B=0}
$$

Получаем уравнения на А и В:

$$(14a)\quad \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\vartheta(\varphi)\frac{\partial A}{\partial\varphi}\right) = -\vartheta(\varphi)\lambda A$$

$$(14b)\quad \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial}{\partial r}B) - B\frac{\lambda}{r^2} + \mu B = 0$$

Уравнение (14 а) – стандартное гармоническое уравнение. Его решение будет иметь вид:

$$A(\varphi) = \begin{cases} C_{1+}\sin(\sqrt{\lambda}\varphi) + C_{2+}\cos(\sqrt{\lambda}\varphi) & \Leftarrow \qquad \varphi \in [0,\alpha] \\ C_{1-}\sin(\sqrt{\lambda}\varphi) + C_{2-}\cos(\sqrt{\lambda}\varphi), & \Leftarrow \quad \varphi \in [\alpha - 2\pi, 0]. \end{cases}$$

Константы $C_{1+}, C_{2+}, C_{1-}, C_{2-}$ определяются из условия стыковки (13):

$$\begin{cases} A(+0) = A(-0) \\ \vartheta_+ A'(+0) = \vartheta_- A'(-0) \\ A(\alpha) = A(\alpha - 2\pi) \\ \vartheta_+ A'(\alpha) = \vartheta_- A'(\alpha - 2\pi) \end{cases}$$

Собственное число λ находим из условия вырожденности данной системы, так как должно существовать решение, отличное от 0.

В случае, когда λ=0 получаем, что А – константа.

Уравнение (14b) преобразуем в уравнение Бесселя в классическом виде:

$$r^2 \frac{\partial^2 B}{\partial r^2} + r\frac{\partial}{\partial r} B + (r^2\mu - \lambda)B = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\left(r\sqrt{\mu}\right)^2 \frac{\partial^2 B}{\partial\left(r\sqrt{\mu}\right)^2} + \left(r\sqrt{\mu}\right)\frac{\partial}{\partial\left(r\sqrt{\mu}\right)} B + (\left(r\sqrt{\mu}\right)^2 - \lambda)B = 0$$

Его решение – линейная комбинация функций Бесселя первого (J) и второго (Y) рода:

$$B = C_1 J_{\sqrt{\lambda}}(\sqrt{\mu} r) + C_2 Y_{\sqrt{\lambda}}(\sqrt{\mu} r)$$

Заметим, что Y стремится к бесконечности при $r \to 0$, интеграл этой функции в 0 не сходится.

Это решение не физично, поэтому будем рассматривать только B= $J_{\sqrt{\lambda}}(\sqrt{\mu} r)$.

В случае, когда λ=0 получаю, что B – функция Бесселя с индексом 0.

Для составления схемы четвертого порядка необходимо, чтобы остаточный член при разложении решения в ряд по тестовым функция убывал как $o(r^4)$. Члены разложении функции Бесселя в ряд Тейлора пропорциональны r^{s+2m}. Здесь s- индекс функции Бесселя, m = 0, 1, 2……

Соответственно, если $0 < s < 2$, то необходимо взять 2 тестовые функции для данного s: $A_S * J_S(\omega_1 r)$ $A_S * J_S(\omega_2 r)$ их линейная комбинация даст функции: $A_S * (r^s + o(r^4))$ $A_S * (r^{s+2} + o(r^4))$.

Если $2 \le s < 4$, берем одну тестовую функцию: $A_S * J_S(\omega_1 r)$ ~ $A_S * (r^s + o(r^4))$. Если $4 \le s$- ни одной.

При s = 0. Брал 3 тестовые функции: $A_S * J_S(\omega_1 r)$ $A_S * J_S(\omega_2 r)$ $A_S * J_S(\omega_3 r)$, линейные комбинации которых дадут: $1 + o(r^4), r^2 + o(r^4), r^4 + o(r^4)$.

Решение

Зная коэффициенты компактной схемы, получаем систему линейных алгебраических уравнений *A * u = B * f* (для каждой точки сетки свое уравнение), аппроксимирующую уравнение Пуассона и граничных условий.

Переход к уравнению Гельмгольца (1): *(A - B * K) * u = B * f*, где *K* – коэффициент уравнения.

Тесты

Проверка работы схемы и подтверждение её порядка проводилась следующим образом. Бралось решение, посчитанное для правой части равной константе на достаточно мелкой сетке N = 800. Здесь N – число шагов на основании большого треугольника. Далее для каждого N = 400, 200, 100, 50, 25 получал новое решение. Погрешностью здесь считается средний модуль разности решения на грубой сетке и решения на мелкой сетке. Затем строил графики зависимости погрешности от N в билогарифмической системе координат.

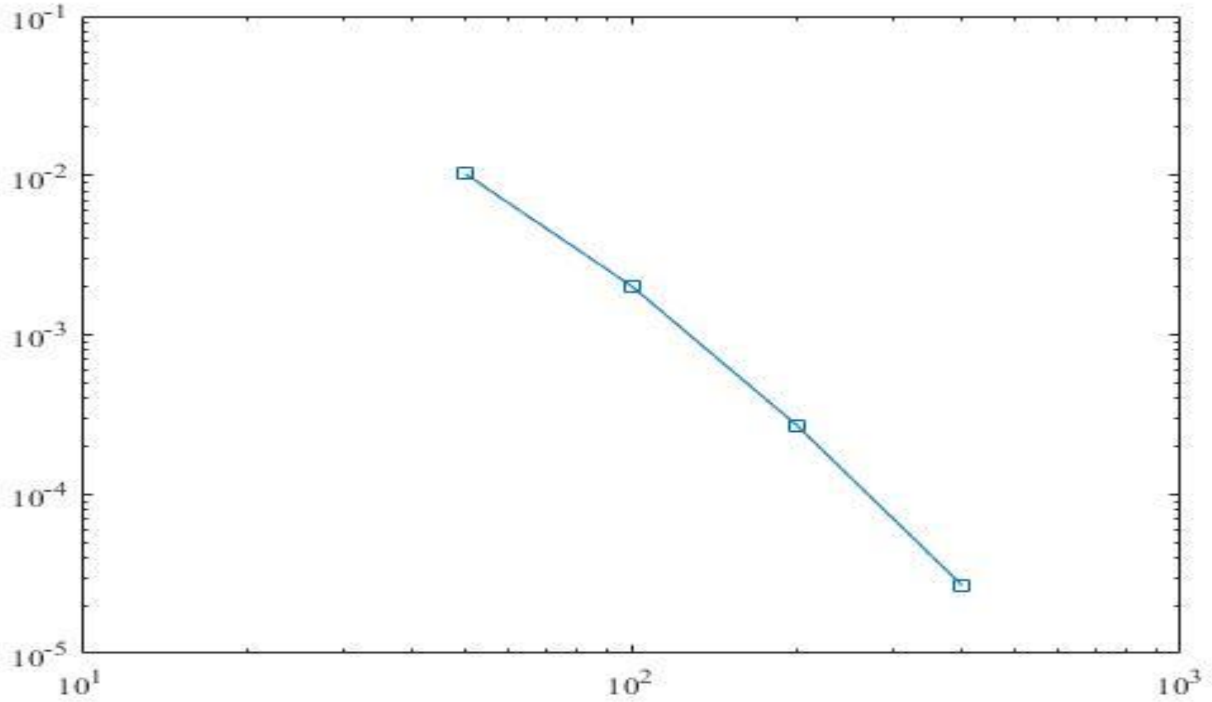

Рис 4. График зависимости погрешности в L1 норме от числа точек на основании треугольника (N). $\frac{\theta_+}{\theta_-} = 2$. *Порядок примерно третий.*

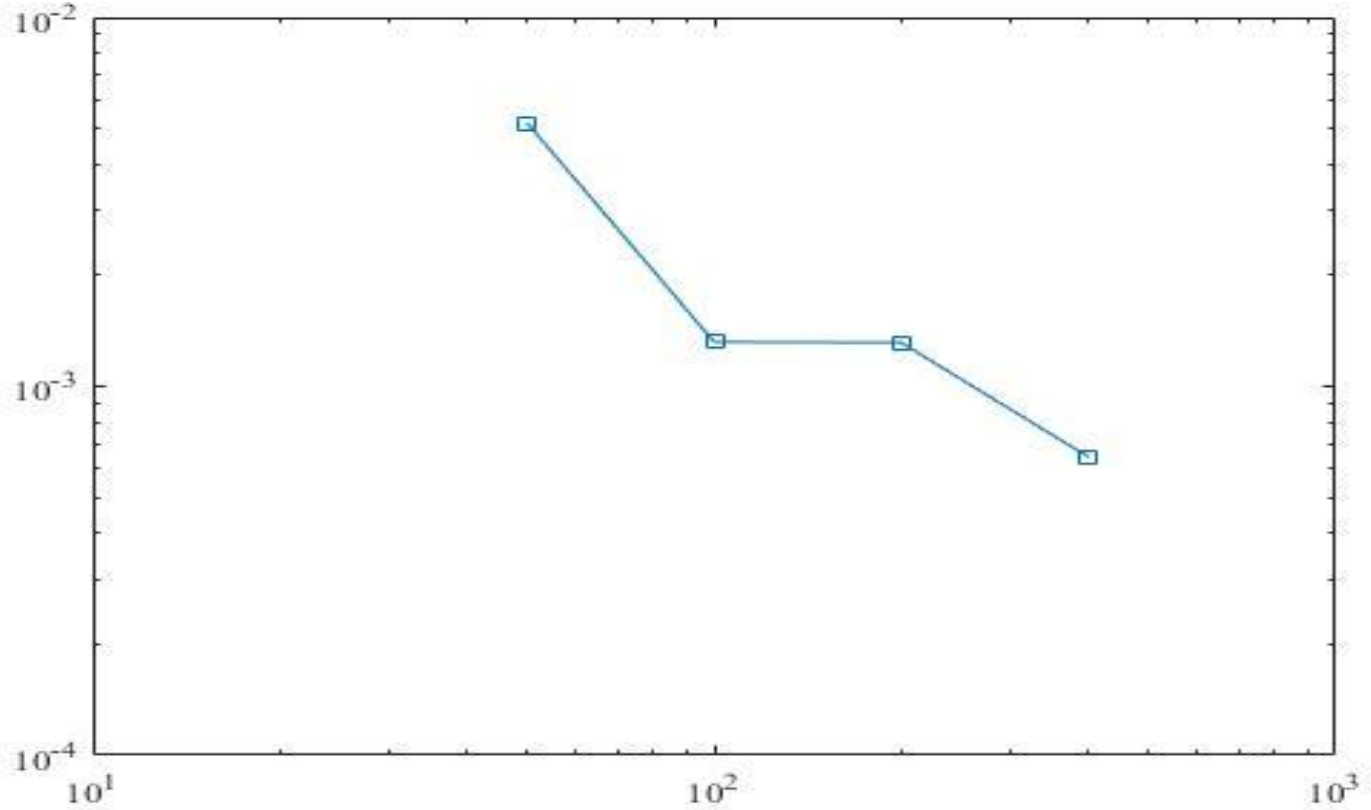

Рис 5. График зависимости погрешности в L1 норме от числа точек на основании треугольника (N). $\frac{\theta_+}{\theta_-} = 10$.

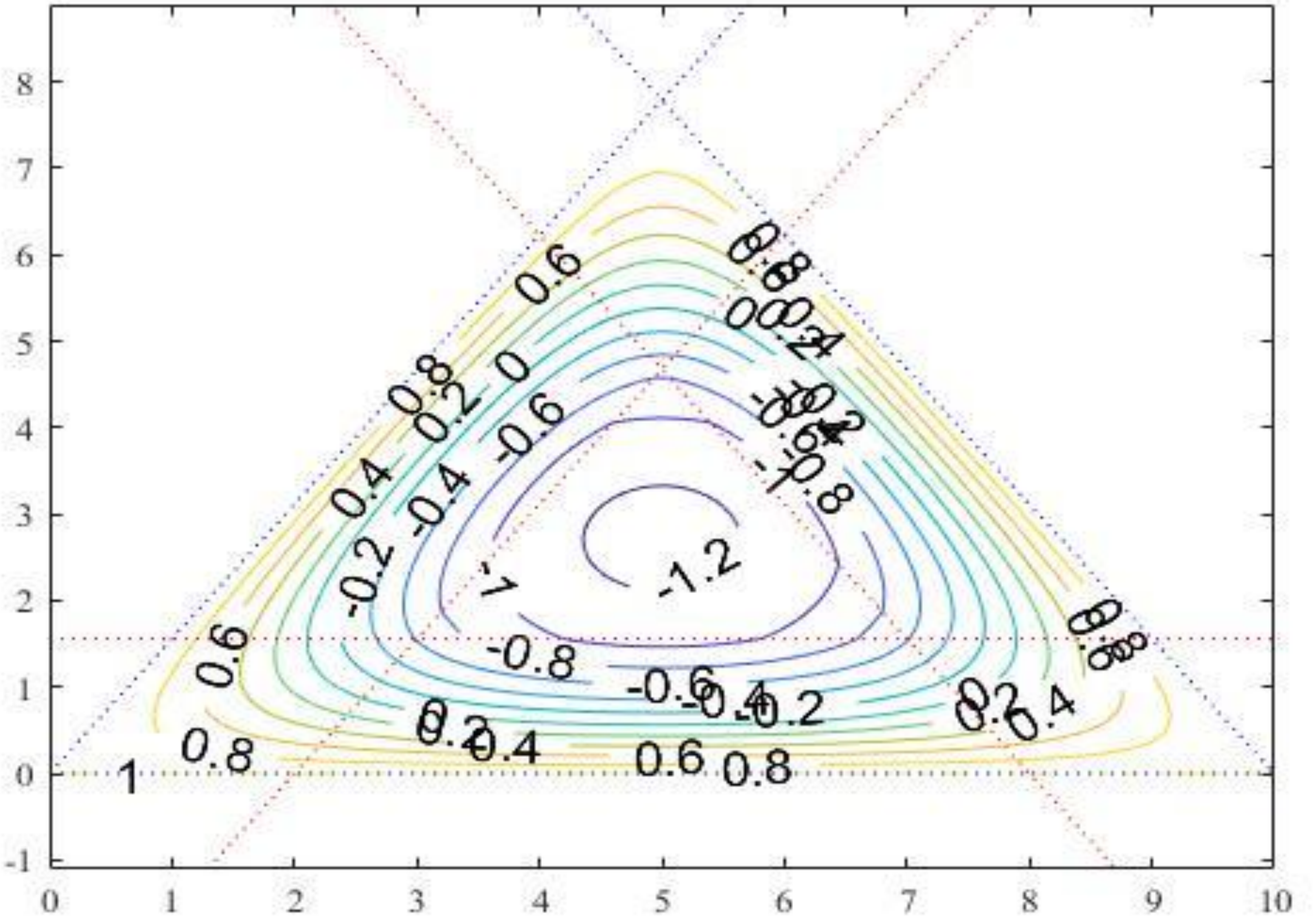

Рис 6. График решения схемы при N = 800. Угол при основании равен 1. $\frac{\theta_+}{\theta_-} = 10$.

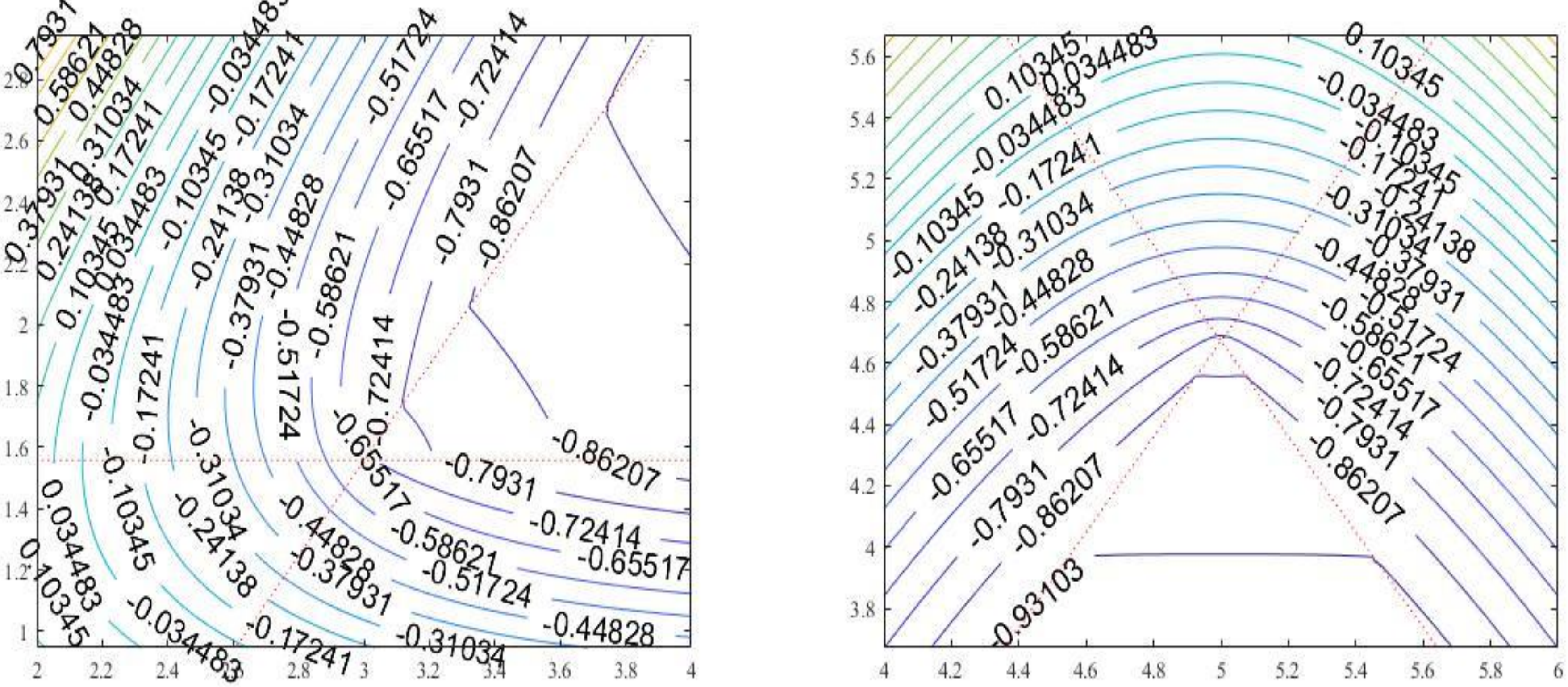

Рис 7. График решения схемы, приближенный в углах