Application of the Leray-Shauder principle to the analysis of a nonlinear integral equation

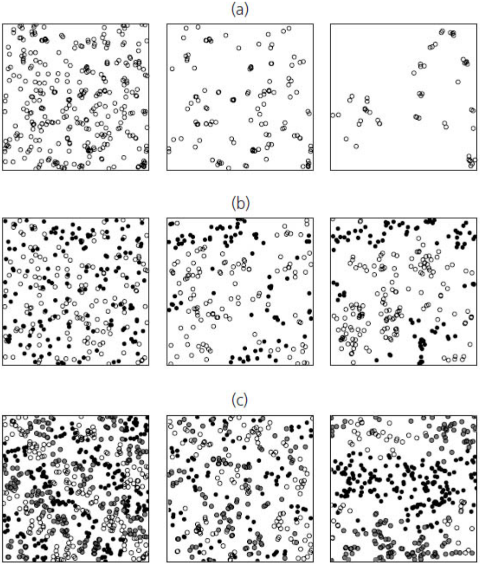
Nikitin A.A., Nikolaev M.V.

Singular Problems, Blow-up and Regimes with Peaking in Nonlinear PDEs.

Moscow,
November, 2019.

Описание модели

Описание модели



Уравнение равновесия

$$
\begin{aligned}
(b + d'\,w(x))\,\mathbf{C}(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} b\,m(y)\,\mathbf{C}(x+y)\,dy\, + \\
+ \frac{b}{(b-d)}\,m(x) \int\limits_{-\infty}^{\infty} d'\,w(y)\,\mathbf{C}(y)\,dy.
\end{aligned} \tag{1}
$$

Ulf Dieckmann, *"IIASA's Spring Workshop on Methodology"*, 2005

Описание модели

Рассматривается модель с одним видом растений обитающих в области A. Характеристики модели:

- $\mathbf{C}(x)$ - второй момент, ожидаемая плотность пар на расстоянии x (pairwise density).
- b, d, d' - темпы рождаемости (birth rate), смертности (death rate) и смертности от конкуренции (competition rate)
- $w(x), m(x)$ - ядра конкуренции/разброса семян на расстоянии x (competition and dispersion kernels), плотности вероятностей

Выпишем все ограничения, накладываемые на функции w, m и параметры b, d, d':

$$m(x) > 0, \quad w(x) > 0, \quad m(x) = m(-x), \quad w(x) = w(-x),$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} w(x)\,dx = 1, \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} m(x)\,dx = 1,$$

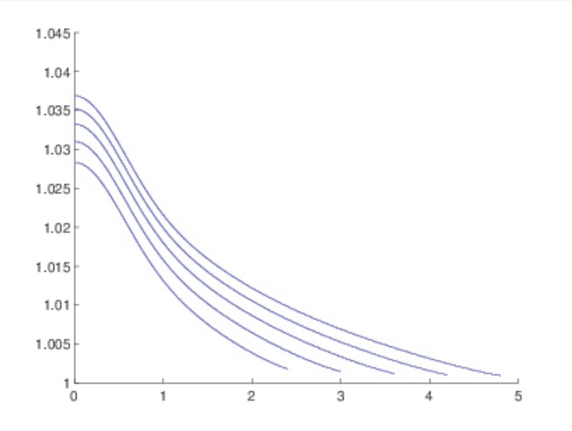
$$\lim_{|x|\to\infty} m(x) = \lim_{|x|\to\infty} w(x) = 0,$$

$$\mathbf{C}(x) > 0; \qquad \lim_{|x|\to\infty} \mathbf{C}(x) = \mathbf{N}^2,$$

$$b > d > 0, \quad d' > 0.$$

Визуализация ограниченного случая при $d > 0$

Интересно посмотреть, как ведёт себя решение исходного уравнения при $d > 0$, если брать интеграл на конечном отрезке, который постепенно будет увеличиваться.



Уравнение «Близнец»

$$(1 + w(x))\mathbf{C}(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} m(y)\,\mathbf{C}(x+y)\,dy \; + \; m(x)\,\mathbf{Y}. \tag{2}$$

Twin equation, 2006.
А.А. Давыдов, В.И. Данченко, М.Ю. Звягин.

Y – управляющий параметр (control parameter).

Результаты для уравнения Близнеца

1. Отсутствие решения при $d > 0$;
2. Условия существования и единственности решения при $d = 0$;
3. Примеры с аналитическими решениями;
4. Разработка численного метода поиска решения уравнения-близнеца.

Дальнейшие пути исследования

Актуальные задачи

- Исследование многомерного уравнения (1) с нормальными ядрами w, m и $d = 0$;
- Исследование уравнений с другими типами ядер (Kurtosis);
- Случай $d > 0$;
- Рассмотрение альтернативных "замыканий" пространственных моментов;
- Исследование модели с двумя видами сообществ;

Ulf Dieckmann, 2014.

⋆ Проведение компьютерных биологических симуляций.

Определение

Конфигурацией сообщества называется множество позиций всех индивидов.

Определение

Корелляционная плотность порядка m в области $A \subset \mathbb{R}^n$ — это среднее по области количество групп из m особей с заданными сдвигами индивидов относительно друг друга.

Определение

Корелляционная плотность называется скорректированной, если она равна нулю для всех групп особей, в которых есть повторяющиеся индивиды.

Моменты

Определение

Пространственным моментом порядка m называется математическое ожидание скорректированной корелляционной плотности порядка m по пространству всевозможных конфигураций сообщества в данный момент времени.

Первый момент

$N(t)$ — средняя плотность особей.

Второй момент

$C(\xi, t)$ — средняя плотность пар особей, в которых сдвиг второго индивида относительно первого равен ξ.

Третий момент

$T(\xi, \xi', t)$ — средняя плотность троек особей, в которых сдвиг второго индивида относительно первого равен ξ, а сдвиг третьего индивида относительно первого равен ξ'.

Рассмотрим систему интегро–дифференциальных уравнений, описывающую динамику первых двух пространственных моментов. Её вывод дан в статье **Dieckmann U., Law R. Relaxation projections and the method of moments, 2000**.

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{dt}(t) = (b-d)N(t) - d' \displaystyle\int\limits_{\mathbb{R}^n} C(\xi,\, t) w(\xi)\, d\xi, \\ \dfrac{\partial C}{\partial t}(\xi,\, t) = bm(\xi)N(t) + \displaystyle\int\limits_{\mathbb{R}^n} bm(\xi')C(\xi+\xi',\, t)\, d\xi' - \\ \qquad\qquad - \big(d + d'\omega(\xi)\big)C(\xi,\, t) - \displaystyle\int\limits_{\mathbb{R}^n} d'\omega(\xi')T(\xi,\xi',\, t)\, d\xi'. \end{cases} \tag{3}$$

Определение

Состоянием равновесия сообщества будем называть такое его состояние, при котором пространственные моменты перестают меняться во времени.

Метод замыканий

Основная проблема динамики моментов

Динамика моментов степени не выше $m-1$ зависит от m-го момента. Таким образом, в системах аналогичных системе (3) всегда будет на одно уравнение меньше, чем неизвестных величин.

Решение

В работе **Murrell D. J., Dieckmann U. On moment closures for population dynamics in continuous space, 2004** было предложено использовать метод замыканий моментов: момент степени m выражается через младшие моменты.

Параметрическое семейство замыканий второго порядка

$$
\begin{aligned}
T_\alpha(\xi, \xi') = &\frac{\alpha}{2}\left(\frac{C(\xi)C(\xi')}{N} + \frac{C(\xi)C(\xi'-\xi)}{N} + \frac{C(\xi')C(\xi'-\xi)}{N} - N^3\right) + \\
&+ (1-\alpha)\frac{C(\xi)C(\xi')}{N}, \ \alpha \in [0;\ 1].
\end{aligned} \tag{4}
$$

Уравнение равновесия

После подстановки замыкания (4) в систему (3) и приравнивания левых частей системы к нулю будем иметь следующее уравнение относительно неизвестной функции $Q(x)$:

$$\begin{aligned}\left(\overline{\omega}+b-\frac{\alpha}{2}\left(b-d-\frac{d'(b-d)}{Y}\right)\right)Q=\frac{Y\overline{m}}{b-d}-\overline{\omega}+[\overline{m}*Q]-\\-\alpha\frac{b-d}{2Y}\Big((Q+2)[\overline{\omega}*Q]+[\overline{\omega}Q*Q]\Big),\end{aligned}\tag{5}$$

где $Q=Q(x)=\dfrac{C(x)}{N^2}-1,\ Y=Y(Q)=\langle\overline{\omega},Q+1\rangle,\ \overline{\omega}=\overline{\omega}(x)=d'\omega(x),$ $\overline{m}=\overline{m}(x)=bm(x).$

Операторная форма уравнения равновесия

Перепишем уравнение (5) в операторной форме $\mathcal{A}Q = Q$, где

$$\mathcal{A}f = \frac{\dfrac{Y\overline{m}}{b-d} - \overline{\omega} + [\overline{m} * f] - \alpha\dfrac{b-d}{2Y}\Big((f+2)[\overline{\omega} * f] + [\overline{\omega}f * f]\Big)}{\overline{\omega} + b - \dfrac{\alpha}{2}\left(b - d - \dfrac{d'(b-d)}{Y}\right)}. \qquad (6)$$

Представим оператор (6) в виде суммы $\mathcal{A} = \mathcal{K} + \mathcal{S}$, где

$$\mathcal{K}f = \frac{\dfrac{Y\overline{m}}{b-d} - \overline{\omega} + [\overline{m} * f] - \alpha\dfrac{b-d}{Y}[\overline{\omega} * f]}{\overline{\omega} + b - \dfrac{\alpha}{2}\left(b - d - \dfrac{d'(b-d)}{Y}\right)},$$

$$\mathcal{S}f = -\alpha\frac{b-d}{2Y} \cdot \frac{f[\overline{\omega} * f] + [\overline{\omega}f * f]}{\overline{\omega} + b - \dfrac{\alpha}{2}\left(b - d - \dfrac{d'(b-d)}{Y}\right)}.$$

Определение

Компактным называется такое подмножество топологического пространства, что из любого его покрытия открытыми множествами можно выделить конечное подпокрытие. Множество называется предкомпактным, если его замыкание компактно.

Определение

Оператор $\mathcal{A}$ называется компактным, если он переводит ограниченные множества в предкомпактные.

Теорема (Лере–Шаудер)

Если оператор $\mathcal{A}$, определённый на замкнутом шаре B банахова пространства, является компактным и $\mathcal{A}[\partial B] \subset B$, то $\exists f \in B: \ f = \mathcal{A}f$.

Компактность оператора $\mathcal{K}$

Теорема

Пусть $b > d \geqslant 0$, $d' > 0$, $\alpha \in [0;\ 1]$, тогда, при условии, что $R < \dfrac{1}{\|\omega\|_C}$, оператор $\mathcal{K}$ определен, как действующий из $B(R)$ в $L_1(\mathbb{R})$ и является компактным.

Идея доказательства

- Показывается, что в рассматриваемом шаре выражения $\dfrac{1}{Y(f)}$ и $\dfrac{1}{\overline{\omega} + b - \dfrac{\alpha}{2}\left(b - d - \dfrac{d'(b-d)}{Y(f)}\right)}$ отделены от нуля и бесконечности равномерно по f.
- Доказывается компактность операторов $[\overline{m} * f]$, $[\overline{\omega} * f]$ и $\dfrac{Y(f)\,\overline{m}}{b-d} - \overline{\omega}$.

Существование неподвижной точки оператора $\mathcal{K}$

Теорема

В условиях теоремы о компактности оператора $\mathcal{K}$, если $\rho = 1 - R\|\omega\|_C > 0$ и $\alpha > 0$, то $\exists d' \in \left(0;\ \frac{3}{4}\rho\right)$ такое, что оператор $\mathcal{K}$ имеет в $B(R)$ неподвижную точку.

Идея доказательства

- Показывается, что в предположениях теоремы оператор $\mathcal{K}$ отображает шар $B(R)$ внутрь шара $B(R)$.
- Применяется теорема Лере–Шаудера.

Замечание

В условиях теоремы образ шара $B(R)$ под действием оператора $\mathcal{K}$ будет лежать в некотором подшаре $B' \subset B(R)$ таком, что

$$\inf_{f \in B',\, g \in B(R)} \|f - g\|_1 = \delta > 0.$$

Теорема о неподвижных точках возмущённого компактного оператора

Теорема

Пусть на области G банахова пространства задан компактный оператор с ненулевым вращением на границе, при этом он переводит область G в некоторую подобласть $H \subset G$, такую, что $d(\partial G, \partial H) = \delta > 0$. Если его возмутить липшецевым оператором, норма которого не превосходит δ, то возмущенный оператор будет иметь в G неподвижные точки.

Теорема сформулирована и доказана в монографии М.А.Красносельского **Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений**

Существование неподвижной точки оператора равновесия

Теорема

Пусть выполнены условия теоремы о существовании неподвижной точки оператора $\mathcal{K}$, тогда при достаточно малом d' оператор равновесия имеет в $B(R)$ неподвижную точку.

Идея доказательства

- Показывается, что оператор $\mathcal{S}$ липшицев в шаре $B(R)$, и его константа Липшица стремится к нулю, когда d' стремится к нулю.
- Показывается, что норма оператора $\mathcal{S}$, подчинённая норме $\|\cdot\|_1$ пространства $L_1(\mathbb{R})$, стремится к нулю, когда d' стремится к нулю.
- Используется теорема о неподвижных точках возмущённого компактного оператора.

Единственность неподвижной точки оператора равновесия

Теорема

В условиях теоремы о существовании неподвижной точки оператора равновесия найдутся такие константы $b > d \geqslant 0$ и настолько малое $d' > 0$, что оператор $\mathcal{A}$ имеет в шаре $B(R)$ единственную неподвижную точку.

Идея доказательства

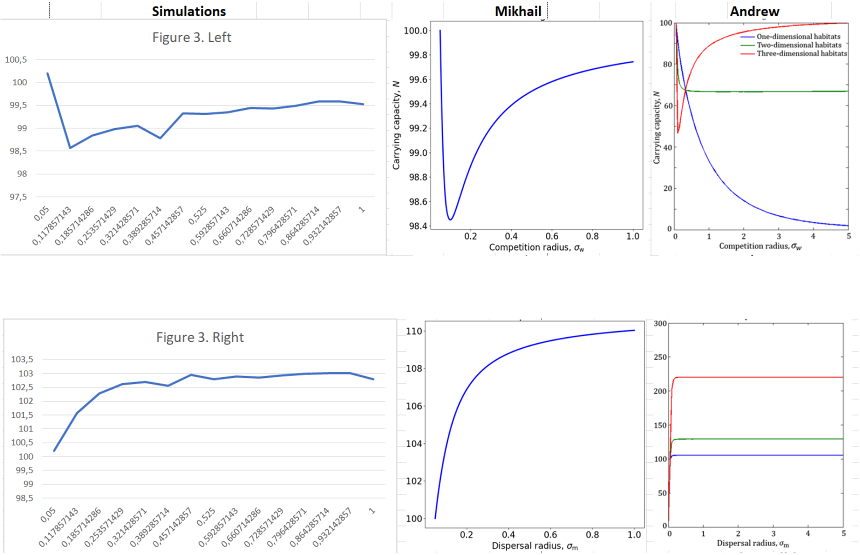
- Показывается, что оператор $\mathcal{K}$ является липшицевым.
- Показывается, что константа липшицевости оператора $\mathcal{K}$ будет меньше единицы при достаточно малом значении параметров b и d', если сохранить условие $b > d \geqslant 0$.
- Как следствие выводится утверждение о том, что оператор равновесия липшицев, а выбор достаточно малых значений b, d и d', при условии, что $b > d \geqslant 0$, может сделать константу липшицевости этого оператора меньше единицы.

Заключение

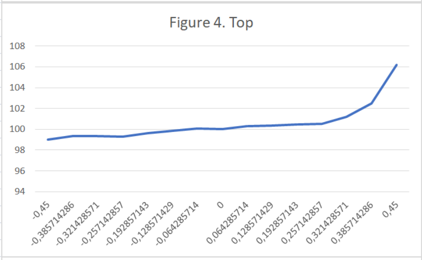
В работе были найдены достаточные условия существования решения уравнения равновесия в случае, когда ядра рождения и конкуренции непрерывны. Конкретно, если $b > d \geqslant 0$, $1 \geqslant \alpha > 0$, $1 - R\|\omega\|_C > 0$, то существует такое достаточно малое $d' > 0$, что оператор равновесия имеет неподвижную точку в шаре $B(R)$, а это равносильно существованию решения уравнения (5).

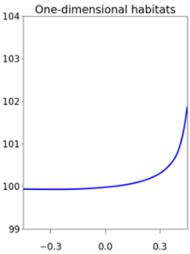
При дополнительном условии на малость константы b с сохранением отношения $b > d$ неподвижная точка будет единственной, а значит, и решение уравнения равновесия тоже.

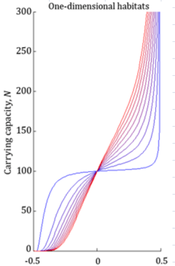
Также описаны достаточные условия того, что состояние равновесия сообщества будет ненулевым. А именно, если выполнены условия теоремы о существовании решения и $\dfrac{bm(x)}{b-d} - \omega(x) \not\equiv 0$, то сообщество имеет ненулевое состояние равновесия.

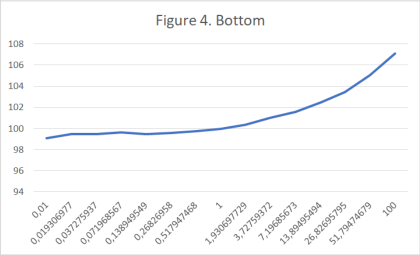

Simulations
Mikhail
Andrew
Figure 3. Left
100,5
100
99,5
99
98,5
98
97,5
0,05
0,117857143
0,185714286
0,253571429
0,321428571
0,389285714
0,457142857
0,525
0,592857143
0,660714286
0,728571429
0,796428571
0,864285714
0,932142857
1
Carrying capacity, N
Competition radius, σ_w
One-dimensional habitats
Two-dimensional habitats
Three-dimensional habitats
Figure 3. Right
103,5
103
102,5
102
101,5
101
100,5
100
99,5
99
98,5
Dispersal radius, σ_m

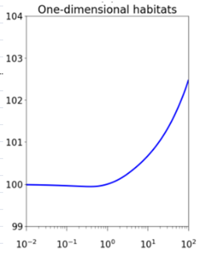
Компьютерные симуляции

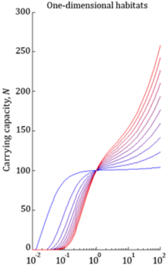




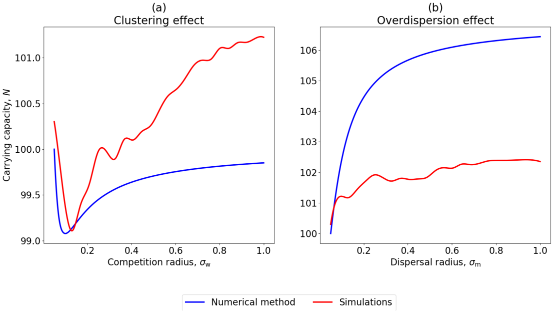


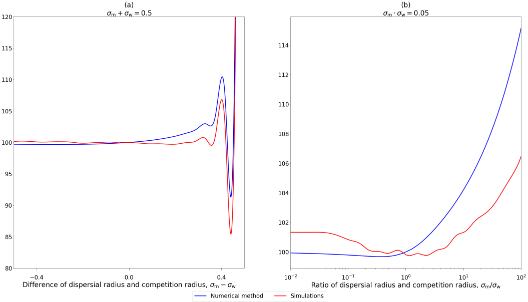




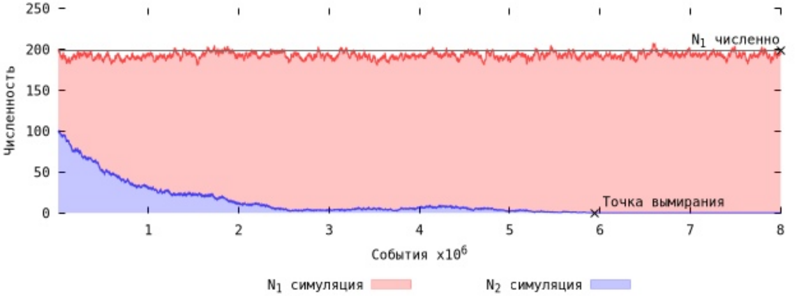


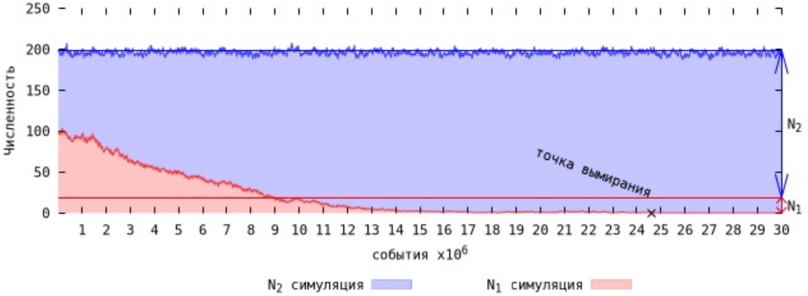
Компьютерные симуляции



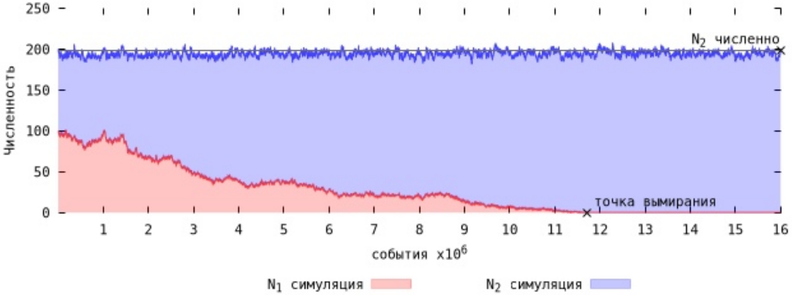


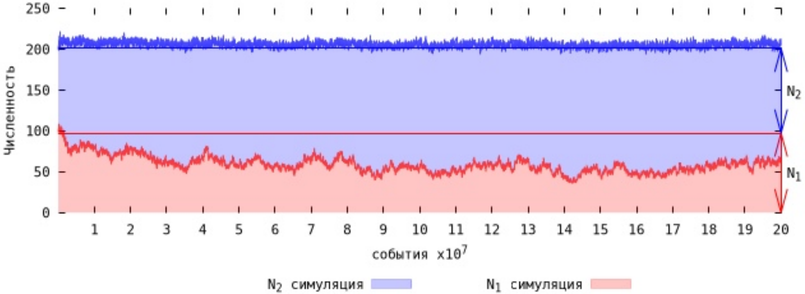
Компьютерные симуляции





Компьютерные симуляции





Список литературы

- *Dieckmann U., Law R.* Moment approximations of individual-based models // The Geometry of Ecological Interactions: Simplifying Spatial Complexity / Ed. by U. Dieckmann, R. Law, J. Metz. Cambridge University Press. P. 252–270. **2000**.
- *Dieckmann U., Law R.* Relaxation projections and the method of moments // The Geometry of Ecological Interactions: Simplifying Spatial Complexity / Ed. by U. Dieckmann, R. Law, J. Metz. Cambridge University Press. P. 412–455. **2000**.
- *Murrell D. J., Dieckmann U.* On moment closures for population dynamics in continuous space // J. Theor. Biology. 229. P. 421–432. **2004**.
- *Красносельский М.А.* Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. // М.: ГИТТЛ. **1956**.
- *Николаев М.В., Никитин А.А.* Принцип Лере-Шаудера в применении к исследованию одного нелинейного интегрального уравнения // Дифференциальные уравнения. — **2019**. — Т. 55, № 9. — С. 1209–1217.
- *Николаев М.В., Никитин А.А.* О существовании и единственности решения одного нелинейного интегрального уравнения // Доклады Академии наук. — **2019**. — Т. 488, № 6. — С. 501–507.