

КОМПАКТНАЯ РАЗНОСТНАЯ СХЕМА НА ТРЕУГОЛЬНОЙ СЕТКЕ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ. ТОК И ТЕМПЕРАТУРА В КАБЕЛЕ ТРЕУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

Д.А.Шадрин, Лицей «Вторая школа», г. Москва.

АННОТАЦИЯ

Численно изучается задача расчета температуры в кабеле треугольного сечения, по которому течет переменный ток; учитывается влияние скин-эффекта. Находится решение краевой задачи для уравнений Гельмгольца и Пуассона. Для расчета используется компактная разностная схема на треугольном шаблоне, которая обеспечивает более высокую точность решения, нежели классическая схема второго порядка, при том же количестве арифметических операций.

ВВЕДЕНИЕ

Скин-эффект - сосредоточение переменного тока вблизи поверхности проводника.

Уравнение

$$\Delta\Phi_0 + \eta_0^2\Phi_0 = 0; \quad \Delta\Psi_0 + \eta_0^2\Psi_0 = 0, \quad \text{где } \eta_0 = \frac{\varepsilon_0\mu\omega^2}{c^2} - h^2$$

$$\Delta\Phi + \eta^2\Phi = 0; \quad \Delta\Psi + \eta^2\Psi = 0, \quad \text{где } \eta = \frac{\varepsilon'\mu\omega^2}{c^2} - h^2 \quad (1)$$

Δ - оператор Лапласа, c – скорость света, Φ и Ψ - потенциалы электрического и магнитного полей, σ - проводимость, μ - магнитная проницаемость, ω - частота периодического тока. Величины, относящиеся к диэлектрику, обозначены индексом 0,

Область решения – бесконечный кабель постоянного сечения G , находящийся в слое диэлектрика (рис 1). В литературе (см., например, [Ландау-1982]). В случае бесконечного кабеля произвольного, но постоянного сечения можно предполагать, что вектор тока и напряженность электрического поля E направлены вдоль оси кабеля, магнитное поле H направлено перпендикулярно этой оси. Считаем их зависимость от t (времени) характеризуется множителем $\exp[-i\omega t]$, а по коорд. z (длине проводника) $\exp[-ikz]$. Впрочем, для наших параметров зависимости от z нет, т. е. $k=0$.

Решим уравнения (1) относительно функций Φ и Ψ , система двумерная и рассматривается для произвольного сечения проводника. Разумеется, на концах проводника картина будет не двумерной, а существенно трехмерной, но нас интересует ситуация вдали от концов длинного (длина много больше диаметра) кабеля. Поэтому далее рассматривается двумерный оператор Лапласа:

$$\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2.$$

После того как уравнение относительно скалярных комплекснозначных функций Φ и Ψ решено, определяем вектор напряженности электрического поля E по формулам (3), а потом находим амплитуду тока j .

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \text{rot}(\Phi \vec{e}_z) + \frac{ci}{\omega \varepsilon'} \text{rotrot}(\Psi \vec{e}_z) \\ \vec{H} &= \text{rot}(\Psi \vec{e}_z) - \frac{ci}{\omega \mu} \text{rotrot}(\Phi \vec{e}_z)\end{aligned}\quad (3)$$

Затем нужно решить уравнение теплопроводности с источником. По прошествии длительного времени установится стационарное решение уравнения теплопроводности, т. е. удовлетворяющее уравнению Пуассона

$$\Delta T = A |j(x, y)|^2. \quad (4)$$

Особый интерес представляет случай малых углов треугольника, где из-за скин-эффекта ток, а значит и температура, могут быть весьма велики.

Граничные условия

В этой работе описано решение задачи, которая состоит в том, чтобы найти потенциалы электрического и магнитного поля для двух сред: проводника и диэлектрика вокруг него (см. Рис 1). Впоследствии также находится распределения температуры в двух средах, с учетом разрыва коэффициента теплопроводности. На внешней границе для температуры поставлены граничные условия Дирихле.

Модель:

- 1) кабель и диэлектрик имеют треугольную форму
- 2) слой диэлектрика достаточно большой по сравнению с проводником.



На внешней границе поступаем, как в случае круглого кабеля. На больших расстояниях от проводника раскладываем потенциалы в ряд по r и используем асимптотику по первому члену разложения:

$$\Phi_0 = C_{00} H_0^{(1)}(\eta_0 r)$$

$$\Psi_0 = H_0^{(1)}(\eta_0 r) \quad (5),$$

где $H_0^{(1)}$ - функция Ханкеля, C_{00} - константа. r - расстояние от центра проводника.

Все формулы выводятся из уравнений Максвелла.

В случае внутренней границы имеем стыковочные условия:



Функция Φ имеет скачок на границе, следовательно, схема удобнее для функции

$$\Theta_0 = \varepsilon_0 \Phi_0$$

$$\Theta = \varepsilon' \Phi, \text{ где на внутренней границе}$$

Аналогично для функции Ψ :

КОМПАКТНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ

Решение эллиптических задач здесь производится на треугольных сетках, см. Рис.2. Получены результаты численного решения ур. Гельмгольца и Пуассона, при помощи компактной разностной схемы на 9-ти точечном треугольном шаблоне, см. Рис.2. Первый этап – расчет коэффициентов разностной схемы, аппроксимирующей уравнение $L[u]=f$ во внутренней точке сетки $\langle x_*, y_* \rangle$. Для этой точки записываем уравнение:

$$\sum k_{ij} u(x_* + i, y_* + j) = \sum l_{ij} f(x_* + i, y_* + j) \quad (9)$$

где k_{ij} и l_{ij} - веса с которыми мы берем значения для решения и правой части уравнения в некоторых точках сетки, окружающих $\langle x_*, y_* \rangle$. Эти точки указаны на шаблонах (Рис. 2,3). На рисунках веса обозначены k_{ij} и l_{ij} обозначены другими буквами, подробнее написано в подписях под рисунками.

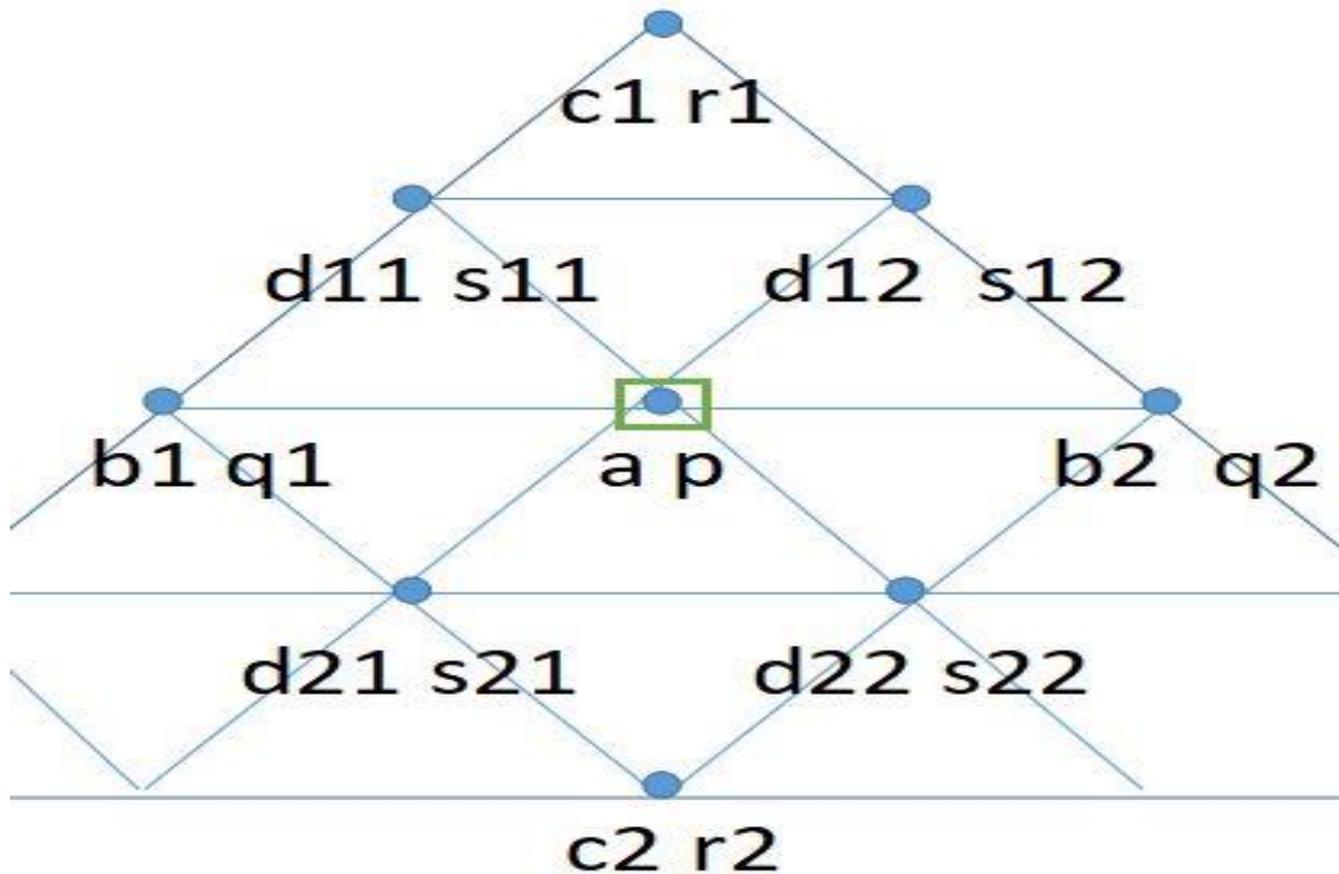


Рис. 2. Веса в центральной точке девятиточечного шаблона (выделенные точками) обозначены a – для неизвестной функции и p – для правой части уравнения. Точка, для которой записано равенство (9), выделена квадратом.

Исключение составляет ряд точек, ближайший к основанию равнобедренного треугольника, где шаблоны состоят из восьми (или десяти) точек, а веса схемы должны быть пересчитаны заново.

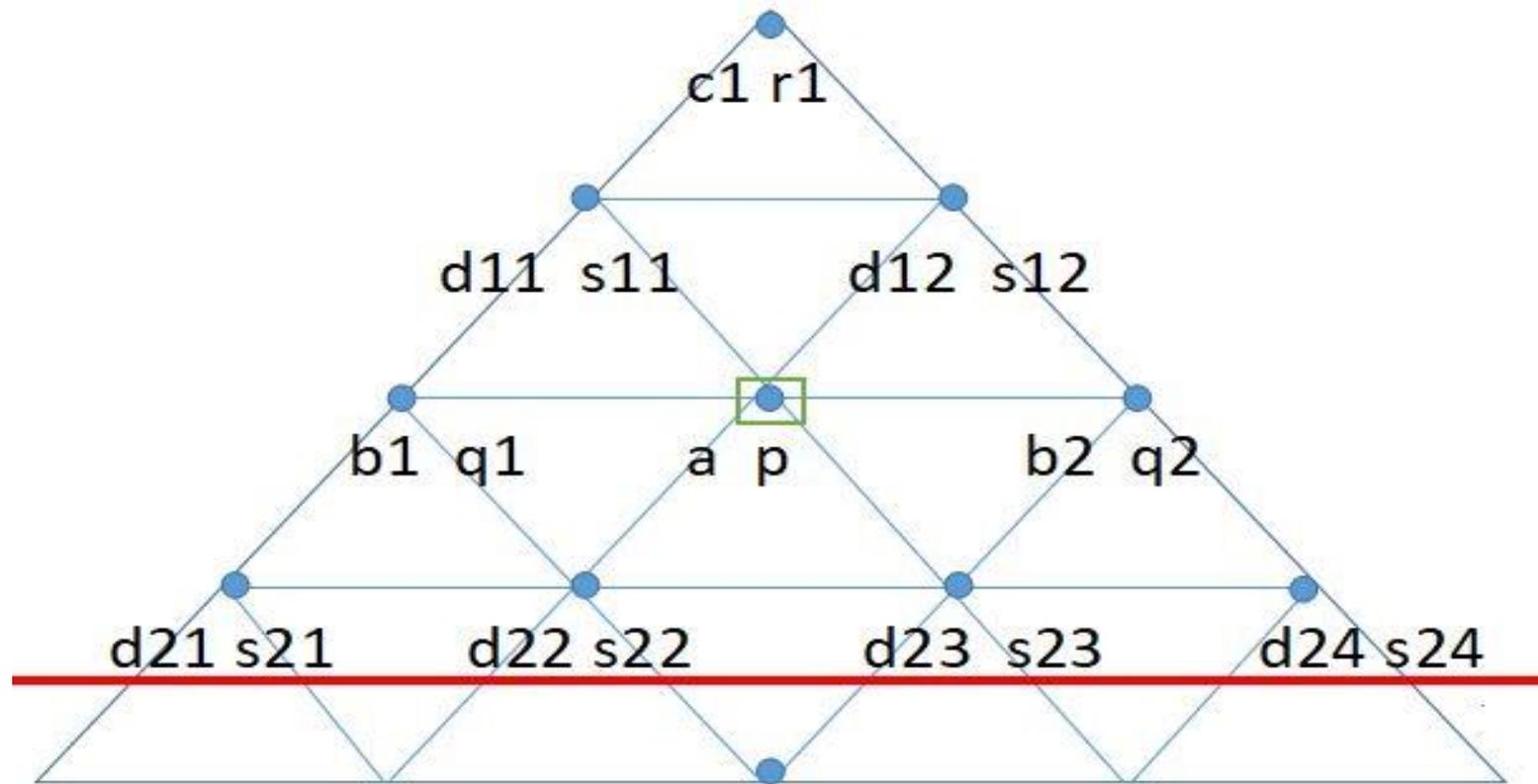


Рис.3. Для точки из нижнего приграничного слоя используется 10-точечный шаблон. Отметим, что попытка использовать 10-точечный шаблон для всех точек сетки понижает порядок аппроксимации разностной схемы с 4-го до 3-го. Красным обозначил границу, так как шаблон используется для точек близких к горизонтальной границе проводник-диэлектрик и внешней границе диэлектрика.

Веса в соотношении (9) определяются из условий аппроксимации: если функция u совпадает с одной из следующих: $1, x^2, x^4, y^2, y^4, x^2 y^2, (x^2 + y^2)^3$, а функция f получается по формуле $L[u]=f$ (L – дифференциальный оператор), то можно подобрать коэффициенты схемы так, чтобы формула (9) была верна. В силу симметрии все коэффициенты не зависят от нижнего индекса.

Если центральная точка шаблона находится в нижнем приграничном ряду, то формула (9) должна быть модифицирована, поскольку нижняя точка шаблона, см. Рис.2, должна быть исключена из формулы (9) – последняя сумма в обеих ее частях состоит только из одного («верхнего») слагаемого. Здесь коэффициенты схемы зависят от индекса, так как верх и низ шаблона в этом случае неравноправны. Сохраняется равенство между коэффициентами для точек шаблона слева и справа от центральной точки, находящихся на одной «высоте». Тестовые функции:

Поскольку и уравнение, и шаблон не меняются при замене $x \Rightarrow -x$ на любом мономе, содержащем нечетную степень x , разностное уравнение будет выполняться. Этот набор мономов графически показан на Рис 4.

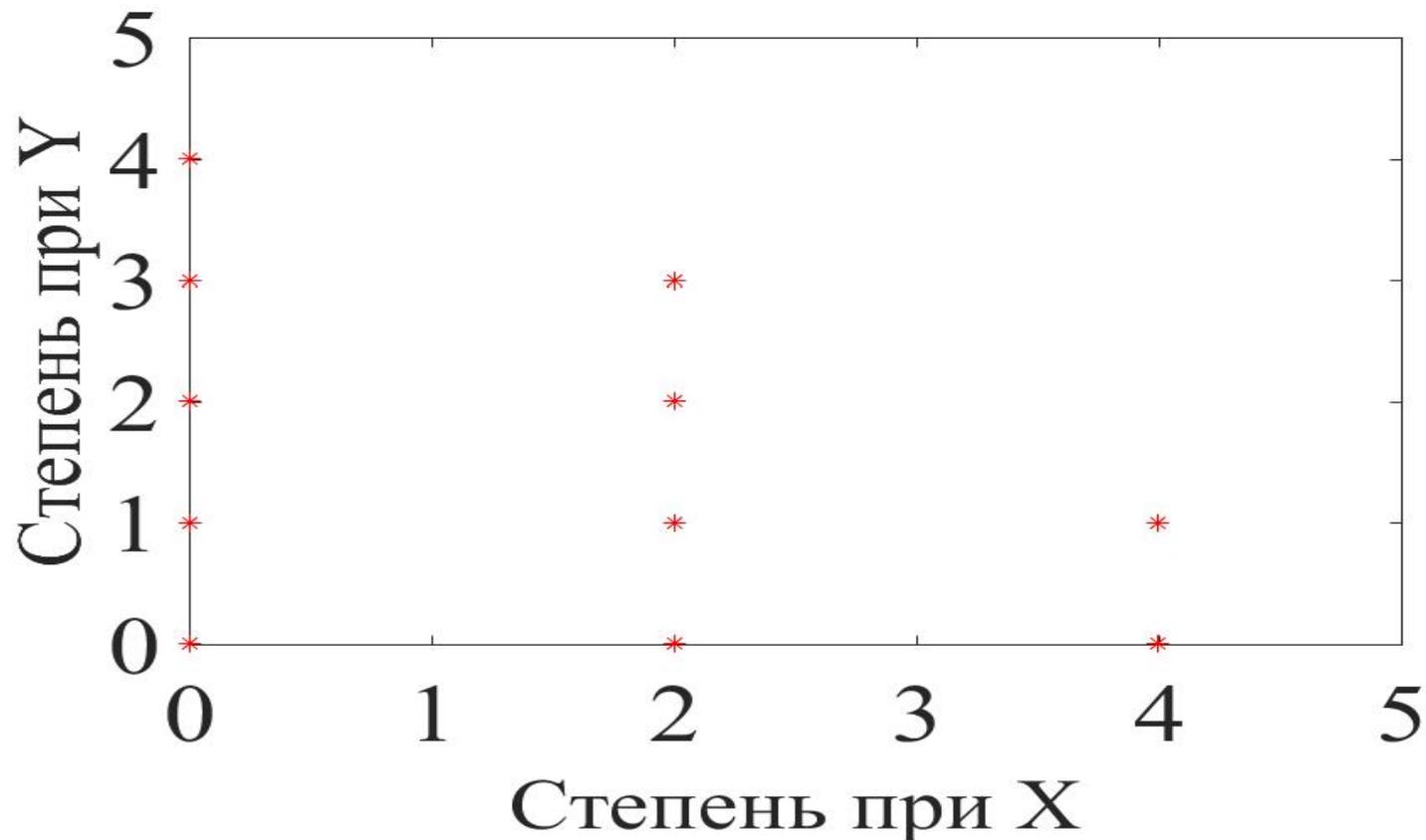


Рис 4. Диаграмма Ньютона для тестовых функций.

Разумеется, коэффициенты схемы зависят от размера области G , от N - числа отрезков на основании равнобедренного треугольника, от того, какое именно решается уравнение, (1) или (4), а также от коэффициентов уравнения (т. е. от свойств материала кабеля и частоты вынуждающего напряжения).

АППРОКСИМАЦИЯ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

На внешней границе диэлектрика рассчитываем значения потенциалов по формулам (5)

Для точек внутренней границы берем другой набор тестовых функций, перейдем в систему координат (s, n) s - направлен по касательной к границе, n - по нормали.

Из условий стыковки следует, что производная по нормали n в точке внутренней границы (x_0, y_0) терпит разрыв. Так как производная функций со степенью не равной 1 в точке (x_0, y_0) равна 0, то нам достаточно, чтобы линейные по n функции удовлетворяли стыковочным условиям.

Тестовые функции для нижней части внутренней границы:

$$1, x^2, x^4, \mathcal{I}_{\pm} y, \mathcal{I}_{\pm} y * x^2, y^2, y^2 * \text{sign}(y), x^2 * y^2, x^2 * y^2 * \text{sign}(y), y^3, y^3 * \text{sign}(y)$$

Для боковой границы берем функции:

$$1, s, s^2, s^3, s^4, \mathcal{I}_{\pm} n, \mathcal{I}_{\pm} n * s, \mathcal{I}_{\pm} n * s^2, \mathcal{I}_{\pm} n * s^3, n^2, n^2 * \text{sign}(y), \\ s * n^2, s * n^2 * \text{sign}(y), s^2 * n^2, s^2 * n^2 * \text{sign}(y), n^3, n^3 * \text{sign}(y)$$

Используем стандартный 9-точечный шаблон (Рис. 2) для всех точек внутренней границы, кроме узлов.

Стыковочные условия в углах.

В углах переходим в полярную систему координат (φ, r) , $-\varphi$ - угол, r – радиус.

В качестве тестовых функций беру:

$$1, r^2, r^4, r^{s_1} Q_{s_1}(\varphi), r^{s_1+2} Q_{s_1}(\varphi), r^{s_2} Q_{s_2}(\varphi), r^{s_2+2} Q_{s_2}(\varphi), r^{s_3} Q_{s_3}(\varphi), r^{s_3+2} Q_{s_3}(\varphi)$$

Здесь Q_s обобщенно-собственные функции оператора $\partial_\varphi \mathcal{G}_\varphi(u)$,

где $\mathcal{G} = \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{G}_+ \Leftarrow \varphi \in [0, \alpha] \\ \mathcal{G}_- \Leftarrow \varphi \in [\alpha - 2\pi, 0] \end{array} \right\}$. Здесь действовал аналогично методу Фурье: искал

собственные функции оператора $\partial_\varphi^2(u)$, которые имеют вид:

$$\begin{cases} C_{1+} \exp(\sqrt{\lambda} * \varphi) + C_{1-} \exp(-\sqrt{\lambda} * \varphi) & \varphi \in [0, \alpha] \\ C_{2+} \exp(\sqrt{\lambda} * \varphi) + C_{2-} \exp(-\sqrt{\lambda} * \varphi) & \varphi \in [\alpha - 2\pi, 0] \end{cases}$$

Из условий стыковки получил константы C , и параметры s из условия существования не нулевого решения.

$$\begin{cases} Q_s = a \sin(s\varphi) + b \cos(s\varphi) & \varphi \in [0, \alpha] \\ Q_s = A \sin(s\varphi) + B \cos(s\varphi) & \varphi \in [\alpha - 2\pi, 0] \end{cases}$$

Для углов используем специальные шаблоны.

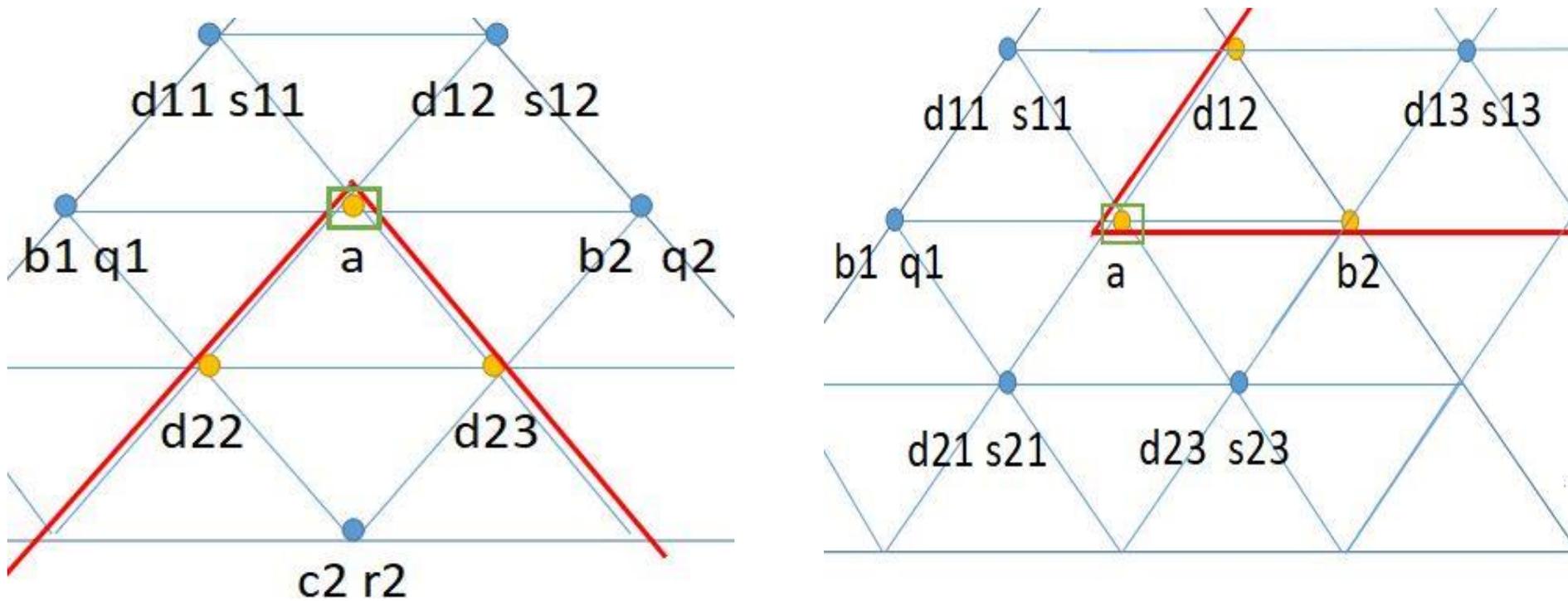


Рис.5 Шаблон для верхнего и левого углов внутренней границы. Красным отмечена граница между проводником и диэлектриком. В точках, отмеченных желтым, задается неизвестная функция, но не правая часть уравнения.

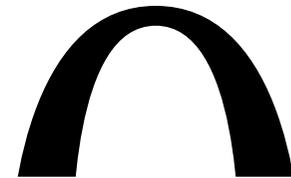
Решение

Зная коэффициенты компактной схемы, получаем систему линейных алгебраических уравнений $A * u = B * f$ (для каждой точки сетки свое уравнение), аппроксимирующую уравнение Пуассона и граничных условий.

Переход к уравнению Гельмгольца (1): $(A - B * K) * u = B * f$, где K – коэффициент уравнения.

Пример матриц A и B для сетки из 20 точек:

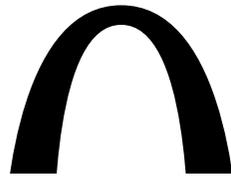
1



1



1



Результаты

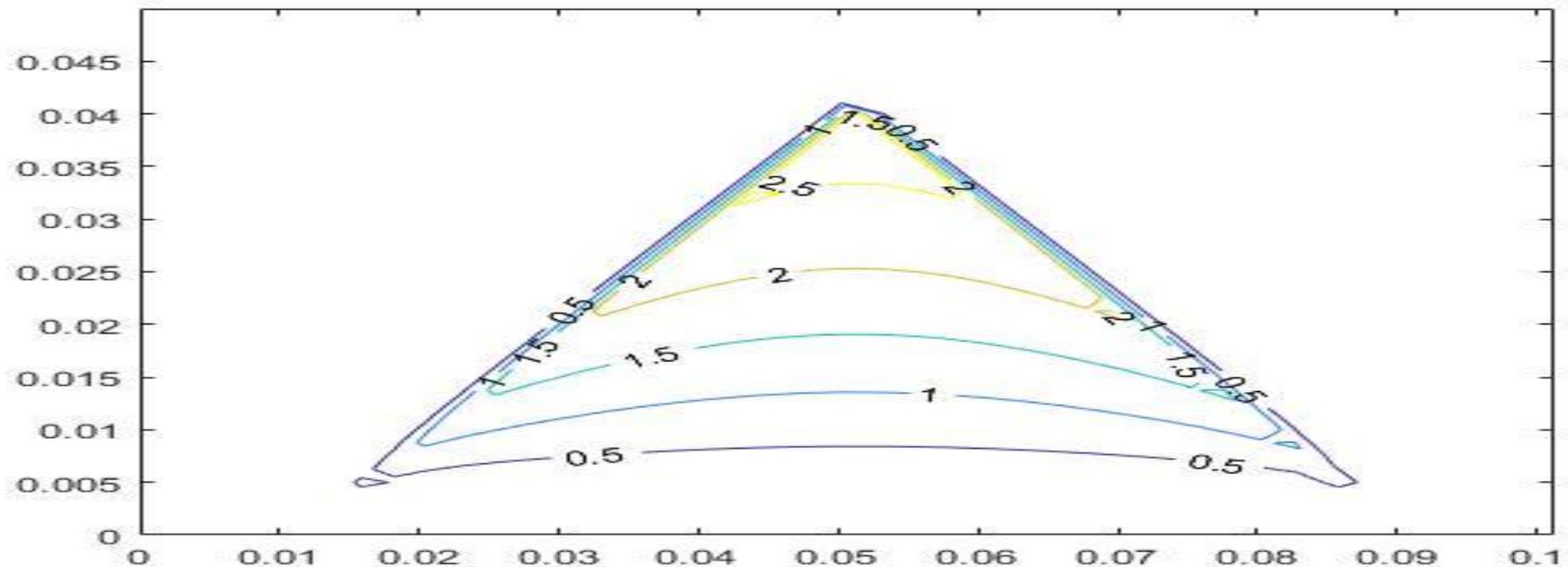


Рис.5. Распределение плотности тока.

После того, как решение электрической задачи найдено, а значит, согласно закону Джоуля – Ленца, определено тепловыделение, вычислим стационарное распределение температуры. Хотя тепловыделение происходит только в проводнике, уравнение Пуассона, как и систему уравнений Гельмгольца, в будущем следует решать на всей плоскости с условиями стыковки на ∂G . В диэлектрике тепловыделения нет, но теплообмен с проводником имеет место. На большом удалении от проводника температура диэлектрика стремится к температуре окружающей среды, которую примем за нулевую.

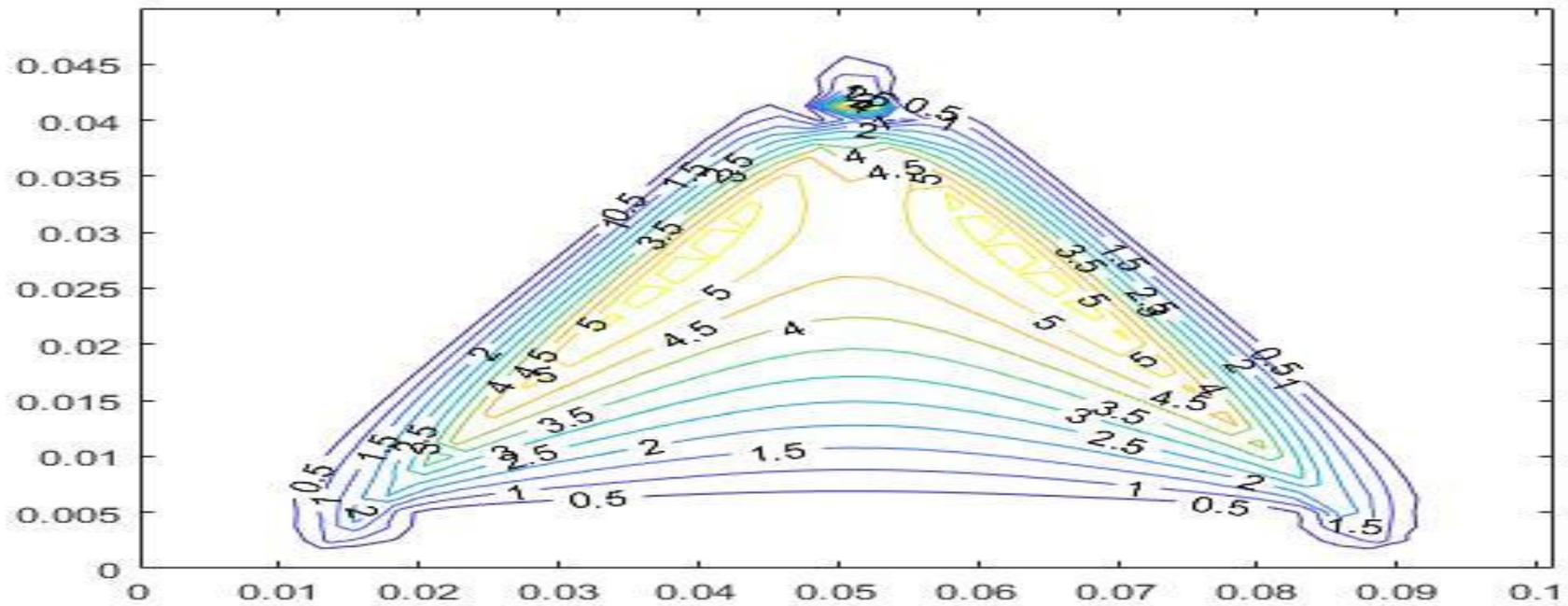


Рис.6 Распределение температуры в проводнике.

Здесь мы полагаем $N = 100$, $\nu = 50$ КГц, $\alpha = 45^\circ$ - угол при основании треугольника, материал проводника - медь.

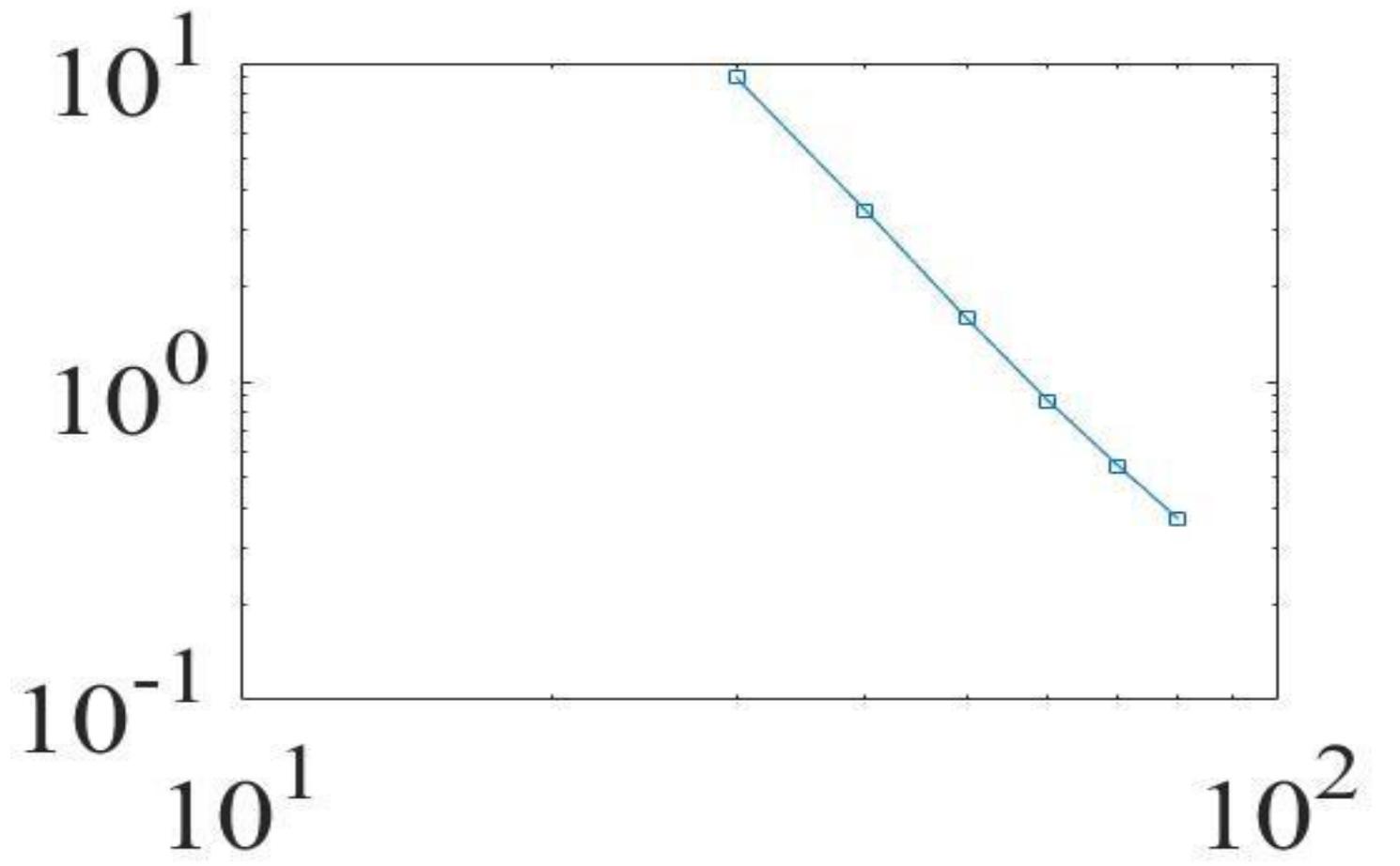


Рис. 7 График в билог-шкале зависимости погрешности от числа точек сетки на основании треугольника N.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработан алгоритм вычисления компактной схемы для решения эллиптических уравнений на треугольных сетках. Компактные схемы, вычислительно более эффективны, чем классические второго порядка. Тут они применяются для аппроксимации двумерных уравнений Пуассона и Гельмгольца с разрывными коэффициентами. В качестве области решения выбран треугольник, что позволяет изучить электрические и тепловые последствия скин-эффекта в областях с острыми углами.