

Исследование интегрального уравнения равновесия с ядрами-куртозианами

Никитин А.А., Николаев М.В.

Москва

23 апреля, 2018г.

«Ломоносовские чтения-2018»

МГУ, факультет ВМиК

Кафедры ОМ и ФАиП

Для описания состояния модели мы используем три основных функции-момента (spatial moments):

- \mathbf{N} - первый момент, ожидаемая плотность популяции (population density).
- $\mathbf{C}(\xi)$ - второй момент, ожидаемая плотность пар на расстоянии ξ (pairwise density).
- $\mathbf{T}(\xi, \xi')$ - третий момент, ожидаемая плотность троек, первый член которых отстоит от второго и третьего на расстояниях ξ, ξ' соответственно (triplet density).

Динамика первого момента

$$\dot{\mathbf{N}} = (b - d)\mathbf{N} - d' \int_{\mathbb{R}^n} w(\xi) \mathbf{C}(\xi) d\xi$$

Динамика второго момента

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{C}}(\xi) = & + bm(\xi)\mathbf{N} + b \int_{\mathbb{R}^n} m(\xi') \mathbf{C}(\xi + \xi') d\xi' \\ & - d\mathbf{C}(\xi) - d' w(\xi) \mathbf{C}(\xi) - d' \int_{\mathbb{R}^n} w(\xi') \mathbf{T}(\xi, \xi') d\xi'. \end{aligned}$$

Замыкания (moment closures)

Свойства замыканий

1. $\lim_{|\xi'| \rightarrow \infty} \mathbf{T}(\xi, \xi') = \mathbf{C}(\xi)N.$
2. $\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \mathbf{T}(\xi, \xi') = \mathbf{C}(\xi')N.$
3. Если $\mathbf{C}(\xi) = N^2$, то $\mathbf{T}(\xi, \xi') = N^3.$

Примеры замыканий

1. $\mathbf{T}_1(\xi, \xi') \approx \mathbf{C}(\xi)\mathbf{C}(\xi')/N;$
2. $\mathbf{T}_2(\xi, \xi') \approx \mathbf{C}(\xi)N + \mathbf{C}(\xi')N + \mathbf{C}(\xi - \xi')N - 2N^3;$
3. $\mathbf{T}_3(\xi, \xi') \approx \frac{1}{2N}(\mathbf{C}(\xi)\mathbf{C}(\xi') + \mathbf{C}(\xi)\mathbf{C}(\xi' - \xi) + \mathbf{C}(\xi')\mathbf{C}(\xi' - \xi) - N^2);$
4. $\mathbf{T}(\xi, \xi') \approx \alpha\mathbf{T}_1 + (1 - \alpha)\mathbf{T}_3.$

Результирующее уравнение равновесия

Введённые обозначения

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\xi) \cdot g(\xi) d\xi = \langle f, g \rangle; \quad \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi - \xi') \cdot g(\xi) d\xi = [f * g];$$

$$d'w(\xi) = \tilde{w}(\xi); \quad bm(\xi) = \tilde{m}(\xi);$$

$$\bar{Q} = \frac{C}{N^2} - 1, \quad \langle \hat{\omega}, \bar{C} \rangle = Y.$$

Результирующее уравнение

$$\begin{aligned} (\hat{\omega} + b - \frac{\alpha}{2} \left(b - d - \frac{d'(b-d)}{Y} \right)) \bar{Q} &= \frac{Y \hat{m}}{b-d} - \hat{\omega} + [\hat{m} * \bar{Q}] - \\ &- \alpha \frac{(b-d)}{2Y} \left((\bar{Q} + 2)[\hat{\omega} * \bar{Q}] + [\hat{\omega} \bar{Q} * \bar{Q}] \right), \end{aligned} \quad (1)$$

Ядра куртозианы

$$m(\xi) = c_m \exp\left(-\frac{s_0^m \xi^2 + s_1^m \xi^4}{2(1 + \xi^2)}\right),$$

$$\omega(\xi) = c_\omega \exp\left(-\frac{s_0^\omega \xi^2 + s_1^\omega \xi^4}{2(1 + \xi^2)}\right),$$

где константы c_m и c_ω находятся из условий:

$$\int_{\mathbb{R}^n} m(\xi) d\xi = 1, \quad \int_{\mathbb{R}^n} \omega(\xi) d\xi = 1.$$

мезокуртозианы, плэтикуртозианы и лептокуртозианы.

Будем называть уравнение (1) *уравнением равновесия*

Теорема

Если уравнение равновесия имеет какое-либо решение, то оно имеет и радиально-симметричное решение.

В дальнейшем мы будем искать исключительно такие решения.

Метод Неймана решения интегрального уравнения

Введем оператор

$$\mathcal{A}f = \frac{\mathbf{Y}\hat{m}}{b-d} - \hat{\omega} + [\hat{m} * f] - \alpha \frac{(b-d)}{2\mathbf{Y}} \left((f+2)[\hat{\omega} * f] + [\hat{\omega}f * f] \right) \left(\hat{\omega} + b - \frac{\alpha}{2} \left(b-d - \frac{d'(b-d)}{\mathbf{Y}} \right) \right). \quad (2)$$

Зададим какое-либо начальное приближение \mathbf{Q}_0 (например, $\hat{\omega}$ или \hat{m}). Далее каждое \mathbf{Q}_n , $n = 1, 2, 3, \dots$, вычисляется по формуле

$$\mathbf{Q}_n = \mathcal{A}\mathbf{Q}_{n-1}.$$

Ускорение свертки. Двумерный случай

Вспользуемся тем, что мы рассматриваем радиально - симметричные функции, т.е. $f(x, y) = f(\sqrt{x^2 + y^2}) = f(r)$, и перейдём в преобразовании Фурье к полярным координатам:

$$\begin{aligned} F[f](\omega_x, \omega_y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-i(\omega_x x + \omega_y y)} dx dy = \\ &= \int_0^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(r, \theta) e^{-ir\rho \cos(\psi - \theta)} r dr d\theta = 2\pi \int_0^{+\infty} r f(r) J_0(r\rho) dr, \end{aligned}$$

что известно как **преобразование Ханкеля** и может быть ускорено до $O(K \ln K)$ сведением к одномерной свертке, делая экспоненциальную замену:

$$\begin{aligned} H_0[f](\rho) &= \int_0^{+\infty} r f(r) J_0(\rho r) dr = \\ &= \frac{1}{e^{y/4}} [(f(e^{x/4}) \cdot e^{x/4}) * J_0(e^{x/4})](y) |_{x=\ln r, y=\ln \rho}. \end{aligned}$$

Ускорение свёртки. Трёхмерный случай

Рассмотрим задачу Лапласа на шаре:

$$\begin{cases} \Delta u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} = 0 \\ 0 < \rho < a, 0 < \theta < \pi, 0 < \phi < 2\pi \\ u(a, \theta, \phi) = f_0(\theta, \phi) \equiv 0 \end{cases}$$

Решая поставленную задачу методом Фурье, и полагая

$$u(\rho, \theta, \phi) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=-n}^n R_n^k(\rho) Y_n^k(\theta, \phi), \text{ получаем:}$$

$$Y_n^k(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{(2n+1)(n-k)!}{4\pi(n+k)!}} P_n^k(\cos \theta) e^{ik\phi},$$

$$R_n^k(\rho) = A_n^k \rho^n + B_n^k \rho^{-n}$$

где $P_n^k(x)$ — присоединенные полиномы Лежандра:

$$P_n^k(x) = \frac{(-1)^n}{n! 2^n} (1-x^2)^{k/2} \frac{d^{n+k}}{dx^{n+k}} [(1-x^2)^n]$$

Ускорение свёртки. Трёхмерный случай

Воспользуемся разложением ядра Фурье через Y_n^k :

$$e^{i(\vec{w}, \vec{r})} = 4\pi \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=-n}^n (-1)^n \sqrt{\frac{\pi}{2r\rho}} J_{n+1/2}(\rho r) \overline{Y_n^k(\phi, \psi)} Y_n^k(\theta, \eta),$$

где $\vec{r} = (r, \varphi, \psi)$ — старые переменные, $\vec{w} = (\rho, \eta, \theta)$ — двойственные переменные.

Подставляя полученное выражение в теорему о свертке:

$$[f *** g] = F^{-1}[F[f] \cdot F[g]] = \\ = \int_{\mathbb{R}^3} \left(\int_{\mathbb{R}^3} f(r) e^{i(\vec{w}, \vec{r})} r^2 \sin \psi \, dr d\psi \right) \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^3} g(r) e^{i(\vec{w}, \vec{r})} r^2 \sin \psi \, dr d\psi \right) e^{-i(\vec{w}, \vec{r})} \rho^2 \sin \theta \, d\rho d\theta d\eta.$$

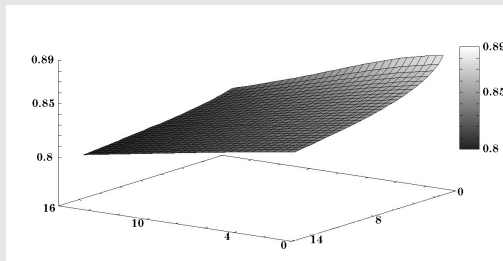
и меняя порядок суммирования с учётом ортогональности полиномов Лежандра, получаем:

$$[f *** g](\vec{r}) = 4\pi[(r \cdot f) * g](r)$$

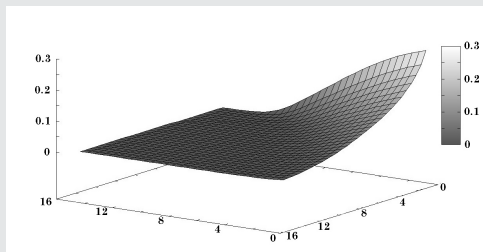
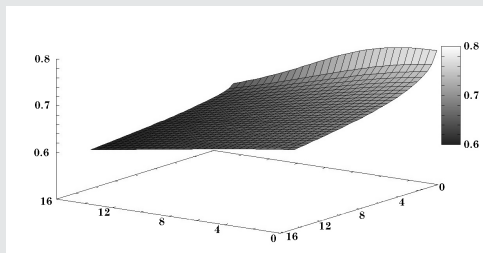
$$s_0^m = s_0^\omega = s_0, \quad s_1^m = s_1^\omega = s_1.$$

Зависимость первого момента (средней плотности индивидуумов) от параметров (куртозианов) ядер. Для визуализации результатов построим поверхности, задаваемые функциями $N = N(s_0, s_1)$, в пространствах трех различных размерностей

1D



2D, 3D



Спасибо за внимание!