Принцип Лере-Шаудера в применении к исследованию одного нелинейного интегрального уравнения

Никитин А.А., Николаев М.В.

Москва

29 ноября, 2018г.

«**Тихоновские чтения-2018**»
МГУ, факультет ВМиК
Секция: «Теория дифференциальных уравнений»

Описание модели

Для описания состояния модели мы используем три основных функции-момента (spatial moments):

- **N** - первый момент, ожидаемая плотность популяции (population density).
- **C**(ξ) - второй момент, ожидаемая плотность пар на расстоянии ξ (pairwise density).
- **T**(ξ, ξ') - третий момент, ожидаемая плотность троек, первый член которых отстоит от второго и третьего на расстояниях ξ, ξ' соответственно (triplet density).

Динамика модели

Динамика первого момента

$$\dot{\mathbf{N}} = (b-d)\mathbf{N} - d' \int\limits_{\mathbb{R}^n} w(\xi)\mathbf{C}(\xi)d\xi$$

Динамика второго момента

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{C}}(\xi) = &+ bm(\xi)\mathbf{N} + b\int\limits_{\mathbb{R}^n} m(\xi')\mathbf{C}(\xi+\xi')d\xi' \\ &- d\mathbf{C}(\xi) - d'w(\xi)\mathbf{C}(\xi) - d'\int\limits_{\mathbb{R}^n} w(\xi')\mathbf{T}(\xi,\xi')d\xi'\end{aligned}$$

Замыкания (moment closures)

Свойства замыканий

1. $\lim\limits_{|\xi'|\to\infty} \mathbf{T}(\xi,\xi') = \mathbf{C}(\xi)N$.
2. $\lim\limits_{|\xi|\to\infty} \mathbf{T}(\xi,\xi') = \mathbf{C}(\xi')N$.
3. Если $\mathbf{C}(\xi) = N^2$, то $\mathbf{T}(\xi,\xi') = N^3$.

Примеры замыканий

1. $\mathbf{T}_1(\xi,\xi') \approx \mathbf{C}(\xi)\mathbf{C}(\xi')/N$;
2. $\mathbf{T}_2(\xi,\xi') \approx \mathbf{C}(\xi)\mathbf{N} + \mathbf{C}(\xi')\mathbf{N} + \mathbf{C}(\xi-\xi')\mathbf{N} - 2\mathbf{N}^3$;
3. $\mathbf{T}_3(\xi,\xi') \approx \dfrac{1}{2\mathbf{N}}\left(\mathbf{C}(\xi)\mathbf{C}(\xi') + \mathbf{C}(\xi)\mathbf{C}(\xi'-\xi) + \mathbf{C}(\xi')\mathbf{C}(\xi'-\xi) - \mathbf{N}^2\right)$;
4. $\mathbf{T}(\xi,\xi') \approx \alpha\mathbf{T}_1 + (1-\alpha)\mathbf{T}_3$.

Результирующее уравнение равновесия

Введённые обозначения

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(\xi)\cdot g(\xi)\,d\xi = \langle f, g\rangle; \qquad \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(\xi-\xi')\cdot g(\xi)\,d\xi = [f * g];$$

$$d' w(\xi) = \overline{w}(\xi); \quad bm(\xi) = \overline{m}(\xi);$$

$$\overline{\mathbf{Q}} = \frac{\mathbf{C}}{\mathbf{N}^2} - 1; \quad \langle \overline{\omega}, \overline{\mathbf{Q}} + 1\rangle = \mathbf{Y}.$$

Результирующее уравнение

$$\begin{aligned}\left(\overline{\omega} + b - \frac{\alpha}{2}\left(b - d - \frac{d'(b-d)}{\mathbf{Y}}\right)\right)\overline{\mathbf{Q}} = \frac{\mathbf{Y}\overline{m}}{b-d} - \overline{\omega} + [\overline{m} * \overline{\mathbf{Q}}] - \\ - \alpha\frac{(b-d)}{2\mathbf{Y}}\left((\overline{\mathbf{Q}}+2)[\overline{\omega} * \overline{\mathbf{Q}}] + [\overline{\omega}\overline{\mathbf{Q}} * \overline{\mathbf{Q}}]\right)\end{aligned} \tag{1}$$

Нелинейный интегральный оператор

Вид оператора

Исследуемое уравнение имеет вид:

$$\overline{\mathbf{Q}} = \mathcal{A}\overline{\mathbf{Q}},$$

где

$$\mathcal{A}\mathbf{f} = \frac{\dfrac{\mathbf{Y}\overline{m}}{b-d} - \overline{\omega} + [\overline{m} * \mathbf{f}] - \alpha \dfrac{b-d}{2\mathbf{Y}}\left((\mathbf{f}+2)[\overline{\omega} * \mathbf{f}] + [\overline{\omega}\mathbf{f} * \mathbf{f}]\right)}{\overline{\omega} + b - \dfrac{\alpha}{2}\left(b - d - \dfrac{d'(b-d)}{\mathbf{Y}}\right)}. \qquad (2)$$

Здесь $\mathbf{Y} = \langle \overline{\omega},\, \mathbf{f} + 1 \rangle$.

Нелинейный интегральный оператор

Представление в виде суммы

Представим оператор $\mathcal{A}$ в виде суммы $\mathcal{S} + \mathcal{K}$, где

$$S\mathbf{f} = \frac{\dfrac{\mathbf{Y}\overline{m}}{b-d} - \overline{\omega} + [\overline{m} * \mathbf{f}] - \alpha\dfrac{b-d}{\mathbf{Y}}[\overline{\omega} * \mathbf{f}]}{\overline{\omega} + b - \dfrac{\alpha}{2}\left(b - d - \dfrac{d'(b-d)}{\mathbf{Y}}\right)},$$

$$\mathcal{K}\mathbf{f} = -\alpha\frac{b-d}{2\mathbf{Y}} \cdot \frac{\mathbf{f}[\overline{\omega} * \mathbf{f}] + [\overline{\omega}\mathbf{f} * \mathbf{f}]}{\overline{\omega} + b - \dfrac{\alpha}{2}\left(b - d - \dfrac{d'(b-d)}{\mathbf{Y}}\right)}.$$

Компактность оператора $\mathcal{S}$

Теорема 1

Пусть $b > d \geq 0$, $d' \geq 0$, $\alpha \in [0;\ 1]$, тогда оператор $\mathcal{S}$ определён в шаре $B(R) = \left\{ f \in L_1(\mathbb{R}^n) :\ ||f||_1 \leq R < \dfrac{1}{||\omega||_C} \right\}$, действует в $L_1(\mathbb{R}^n)$ и является компактным.

План доказательства

- С помощью критерия Рисса в $L_1(\mathbb{R}^n)$ показывается, что свёртки $[\overline{m} * \mathbf{f}]$ и $[\overline{\omega} * \mathbf{f}]$ являются компактными операторами относительно функций $\mathbf{f}$.
- Доказывается, что выражение $\overline{\omega} + b - \dfrac{\alpha}{2}\left(b - d - \dfrac{d'(b-d)}{\mathbf{Y}}\right)$ и $\mathbf{Y}$ равномерно по $\mathbf{f}$ отделены от нуля.

Существование неподвижной точки оператора $\mathcal{S}$

Теорема Лере–Шаудера

Если оператор $\mathcal{S}$, определённый на замкнутом шаре B банахова пространства, является компактным и $\mathcal{S}[B] \subset B$, то $\exists f \in B: \ f = \mathcal{S}f$.

Теорема 2

Пусть $\alpha \in [0,1]$. Если R и d' выбраны так, что

$$d' \geqslant \frac{6\|\omega\|_C R - 2}{1 - \|\omega\|_C R} > 0, \quad R < \frac{1}{\|\omega\|_C},$$

то $\exists b > d'$ такое, что оператор $\mathcal{S}$ имеет в радиусе шара R неподвижную точку.

Существование неподвижной точки оператора $\mathcal{A}$

Теорема о неподвижных точках возмущенного компактного оператора

Пусть на области G задано вполне непрерывное векторное поле с ненулевым вращением на границе. Если это поле возмутить малым гладким оператором, то возмущенное поле будет иметь в G неподвижные точки.

[Красносельский, «Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнениях»]

Здесь под малым возмущением понимается возмущение таким оператором, который принимает значения достаточно малой нормы и который удовлетворяет условию Липшица с достаточно малой постоянной.

Существование неподвижной точки оператора $\mathcal{A}$

Теорема 3

В условиях теорем 1 и 2 оператор $\mathcal{A}$, заданный формулой (2) имеет в шаре $B(R)$ неподвижные точки.

План доказательства

- Показывается, что оператор $\mathcal{K}$ является липшицевым.
- Доказывается, что норма оператора $\mathcal{K}$ стремится к нулю, когда $||\overline{\varpi}||_C$ стремится к нулю.
- Применяется теорема о неподвижных точках возмущенного компактного оператора.

Существование нетривиального решения уравнения равновесия

Следствие теоремы 3

(Условие существования нетривиального решения.)

Если

$$\frac{d'\overline{m}}{b-d} - \overline{\omega} \not\equiv 0,$$

то уравнение равновесия имеет нетривиальное решение.

Конец

Спасибо за внимание!