

О проблеме замыкания пространственных моментов

Никитин Алексей Антонович

Москва

4 мая, 2018г.

МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМиК

Международная конференция
посвящённая 90-летию В.А. Ильина
"Современные методы теории краевых задач."

Уравнение равновесия

$$\begin{aligned}[b + d' w(x)] \mathbf{C}(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} b m(y) \mathbf{C}(x+y) dy + \\ &+ \frac{b}{(b-d)} m(x) \int_{-\infty}^{\infty} d' w(y) \mathbf{C}(y) dy.\end{aligned}$$

Можно ли найти аналитические решения, $\mathbf{C}(x)$ данного интегрального уравнения?

Ulf Dieckmann,

"IIASA's Spring Workshop on Methodology", 2005

Описание модели

Рассматривается модель с одним видом растений обитающих в области A . Параметры модели:

- $p(x)$ - пространственный паттерн (spatial pattern), сумма дельта-функций в позициях растений.
- b, d, d' - темпы рождаемости (birth rate), смертности (death rate) и смертности от конкуренции (competition rate)
- $w(\xi), m(\xi)$ - ядра конкуренции/разброса семян на расстоянии ξ (competition and dispersion kernels), плотности вероятностей

Описание модели

Для описания состояния модели мы используем три основных функции-момента (spatial moments):

- N - первый момент, ожидаемая плотность популяции (population density).
- $C(\xi)$ - второй момент, ожидаемая плотность пар на расстоянии ξ (pairwise density).
- $T(\xi, \xi')$ - третий момент, ожидаемая плотность троек, первый член которых отстоит от второго и третьего на расстояниях ξ, ξ' соответственно (triplet density).

Постановка задачи

Выпишем все ограничения, накладываемые на функции w , m и параметры b , d , d' :

$$m(x) > 0, \quad w(x) > 0, \quad m(x) = m(-x), \quad w(x) = w(-x),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(x) dx = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} m(x) dx = 1,$$

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} m(x) = \lim_{|x| \rightarrow \infty} w(x) = 0.$$

$$d \geq 0, \quad d' \geq 0, \quad b \geq 0.$$

Некорректность поставленной задачи



$$\tilde{f}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{2\pi i p t} dt.$$

$$b\tilde{C}(p) + d' \widetilde{w C}(p) = b\tilde{m}(p)\tilde{C}(p) + \frac{b}{(b-d)} \tilde{m}(p) \int_{-\infty}^{\infty} d' w(y) C(y) dy,$$

$$d' \frac{d}{(b-d)} \int_{-\infty}^{\infty} w(y) C(y) dy = 0.$$

Некорректность поставленной задачи



$$\tilde{f}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{2\pi i p t} dt.$$

$$b\tilde{C}(p) + d' \widetilde{w C}(p) = b\tilde{m}(p)\tilde{C}(p) + \frac{b}{(b-d)} \tilde{m}(p) \int_{-\infty}^{\infty} d' w(y) C(y) dy,$$

$$d' \frac{d}{(b-d)} \int_{-\infty}^{\infty} w(y) C(y) dy = 0.$$



$$(b + d' w(x))C(x) = \int_{-\infty}^{\infty} b m(y) C(x+y) dy + d' m(x) D$$

«Уравнение - близнец», Данченко В.И., Звягин М.Ю., 2006.

Уравнение равновесия

- Уравнение Данченко-Звягина

$$\begin{aligned}(b + d'\omega(x))C(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} bm(y)C(x+y)dy \\ &+ \frac{b}{b} \cdot m(x) \int_{-\infty}^{+\infty} d'\omega(y)C(y)dy.\end{aligned}$$

Случай $d > 0$

Уравнение равновесия

- Уравнение Данченко-Звягина

$$\begin{aligned}(b + d' \omega(x)) C(x) = & \int_{-\infty}^{+\infty} b m(y) C(x+y) dy \\ & + \frac{b}{b-d} \cdot m(x) \int_{-\infty}^{+\infty} d' \omega(y) C(y) dy.\end{aligned}$$

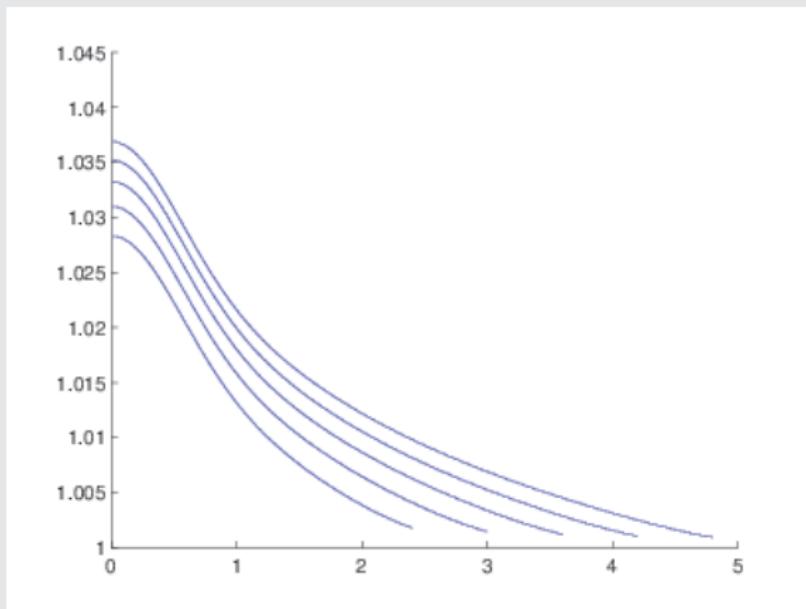
- Уравнение Дикмана

$$\begin{aligned}(b + d' \omega(x)) C(x) = & \int_{-\infty}^{+\infty} b m(y) C(x+y) dy \\ & + \frac{b}{b-d} \cdot m(x) \int_{-\infty}^{+\infty} d' \omega(y) C(y) dy.\end{aligned}$$

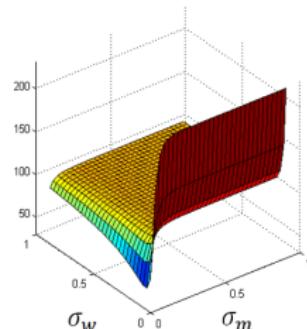
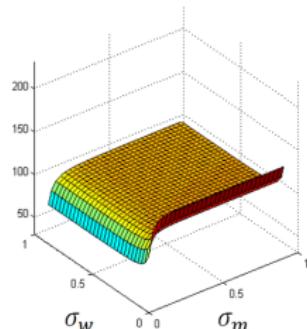
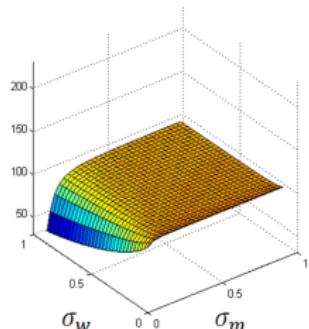
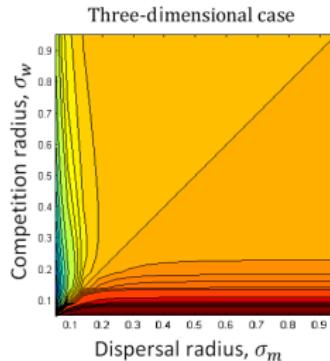
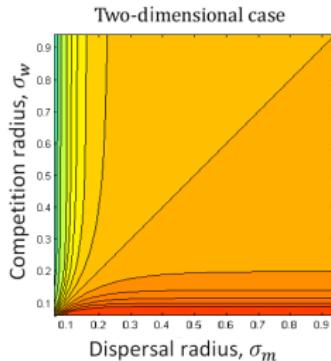
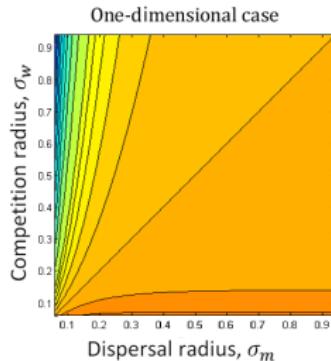
Случай $d > 0$

Визуализация ограниченного случая при $d > 0$

Интересно посмотреть, как ведёт себя решение исходного уравнения при $d > 0$, если брать интеграл на конечном отрезке, который постепенно будет увеличиваться.



Сравнительная визуализация N



Актуальные задачи

- Исследование многомерного уравнения Дикмана с нормальными ядрами w , m и $d = 0$;
- Исследование уравнений с другими типами ядер (Kurtosis);
- Случай $d > 0$;
- Рассмотрение альтернативных "замыканий" пространственных моментов;
- Исследование модели с двумя видами сообществ;

Ulf Dieckmann, 2014.

* Проведение компьютерных биологических симуляций.

Двухвидовая модель сообществ

Вторые моменты

Введём обозначение:

$$Y_{ij} = \int \omega_{ij}(\xi) C_{ij}(\xi) d\xi.$$

$$(b_1 + d'_{11}\omega_{11}(\xi)) C_{11}(\xi) =$$

$$b_1 [m_1 * C_{11}] (\xi) + \frac{b_1}{b_1 - d'_{12} Y_{12} N_2} m_1(\xi) d'_{11} Y_{11},$$

$$(b_2 + d'_{22}\omega_{22}(\xi)) C_{22}(\xi) =$$

$$b_2 [m_2 * C_{22}] (\xi) + \frac{b_2}{b_2 - d'_{21} Y_{21} N_1} m_2(\xi) d'_{22} Y_{22},$$

Динамика модели

Динамика первого момента

$$\dot{N} = (b - d)N - d' \int_{\mathbb{R}^n} w(\xi) C(\xi) d\xi$$

Динамика второго момента

$$\begin{aligned}\dot{C}(\xi) = & + b m(\xi) N + b \int_{\mathbb{R}^n} m(\xi') C(\xi + \xi') d\xi' \\ & - d C(\xi) - d' w(\xi) C(\xi) - d' \int_{\mathbb{R}^n} w(\xi') \mathbf{T}(\xi, \xi') d\xi'.\end{aligned}$$

Замыкания (moment closures)

Свойства замыканий

1. $\lim_{|\xi'| \rightarrow \infty} T(\xi, \xi') = \mathbf{C}(\xi)N.$
2. $\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} T(\xi, \xi') = \mathbf{C}(\xi')N.$
3. Если $C(\xi) = N^2$, то $T(\xi, \xi') = N^3.$

Примеры замыканий

1. $T_1(\xi, \xi') \approx C(\xi)C(\xi')/N;$
2. $T_2(\xi, \xi') \approx C(\xi)N + C(\xi')N + C(\xi - \xi')N - 2N^3;$
3. $T_3(\xi, \xi') \approx \frac{1}{2N}(C(\xi)C(\xi') + C(\xi)C(\xi' - \xi) + C(\xi')C(\xi' - \xi) - N^2);$
4. $T_4(\xi, \xi') \approx \frac{C(\xi)C(\xi')C(\xi' - \xi)}{N^3};$
5. $T(\xi, \xi') \approx \alpha T_1 + (1 - \alpha)T_3.$

Результирующее уравнение равновесия

Введённые обозначения

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\xi) \cdot g(\xi) d\xi = \langle f, g \rangle; \quad \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi - \xi') \cdot g(\xi) d\xi = [f * g];$$

$$d'w(\xi) = \tilde{w}(\xi); \quad bm(\xi) = \tilde{m}(\xi);$$

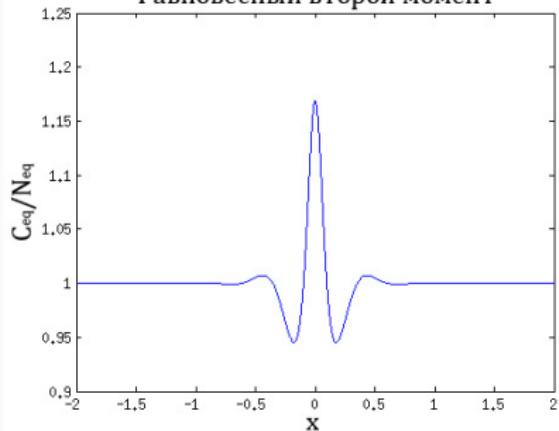
$$\overline{Q} = \frac{C}{N^2} - 1, \quad \langle \widehat{\omega}, \overline{C} \rangle = Y.$$

Результирующее уравнение

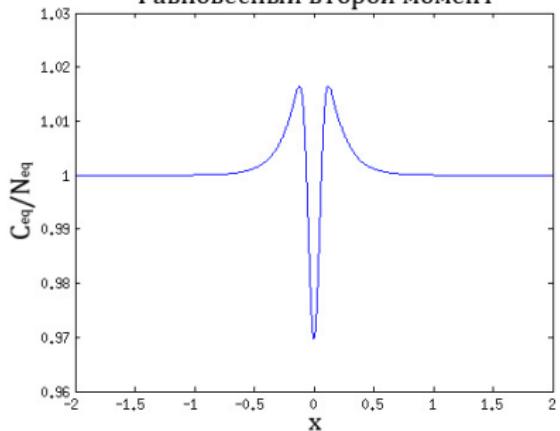
$$\begin{aligned} (\widehat{\omega} + b - \frac{\alpha}{2} \left(b - d - \frac{d'(b-d)}{Y} \right)) \overline{Q} &= \frac{Y \widehat{m}}{b-d} - \widehat{\omega} + [\widehat{m} * \overline{Q}] - \\ &- \alpha \frac{(b-d)}{2Y} \left((\overline{Q} + 2)[\widehat{\omega} * \overline{Q}] + [\widehat{\omega} \overline{Q} * \overline{Q}] \right), \end{aligned} \tag{1}$$

Существование решения при $d > 0$

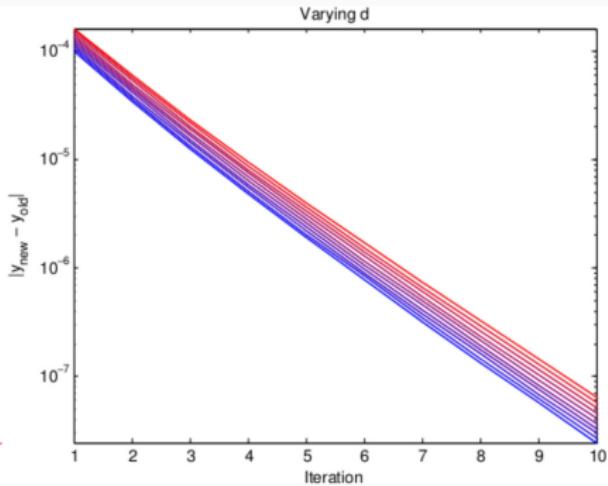
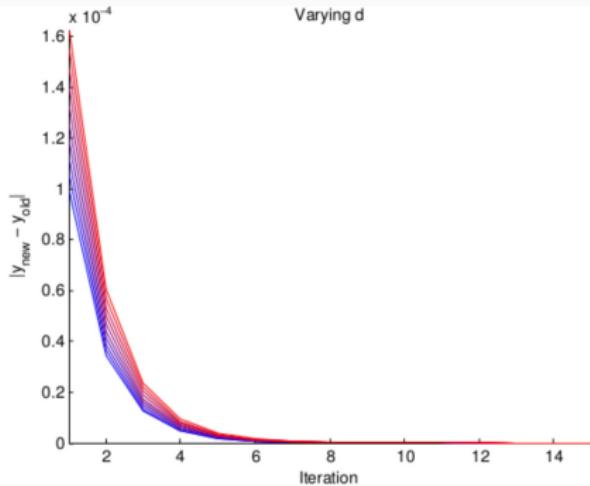
Равновесный второй момент



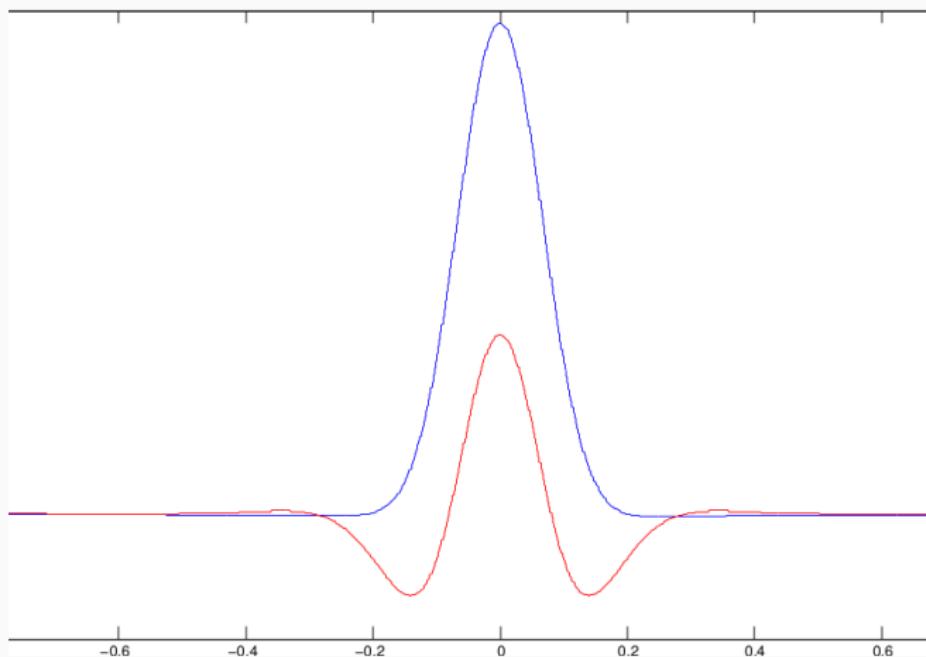
Равновесный второй момент



Существование решения при $d > 0$



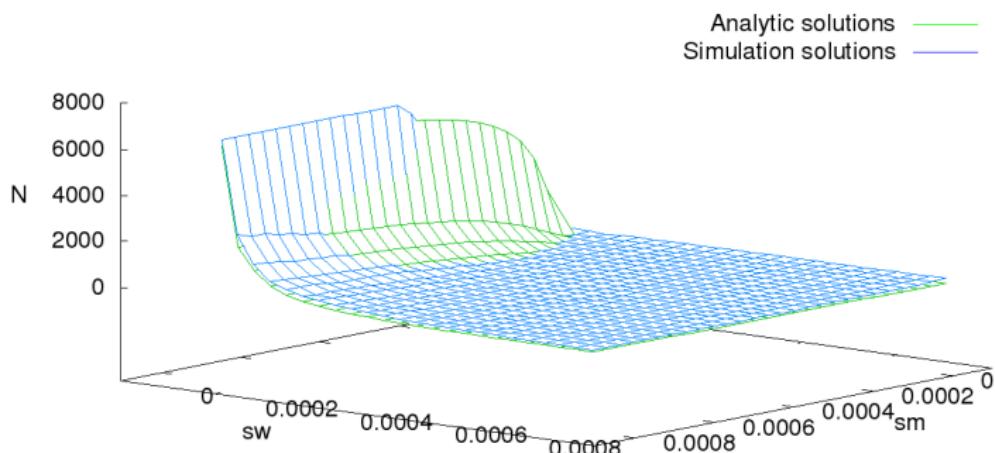
Решение получившегося ИУ



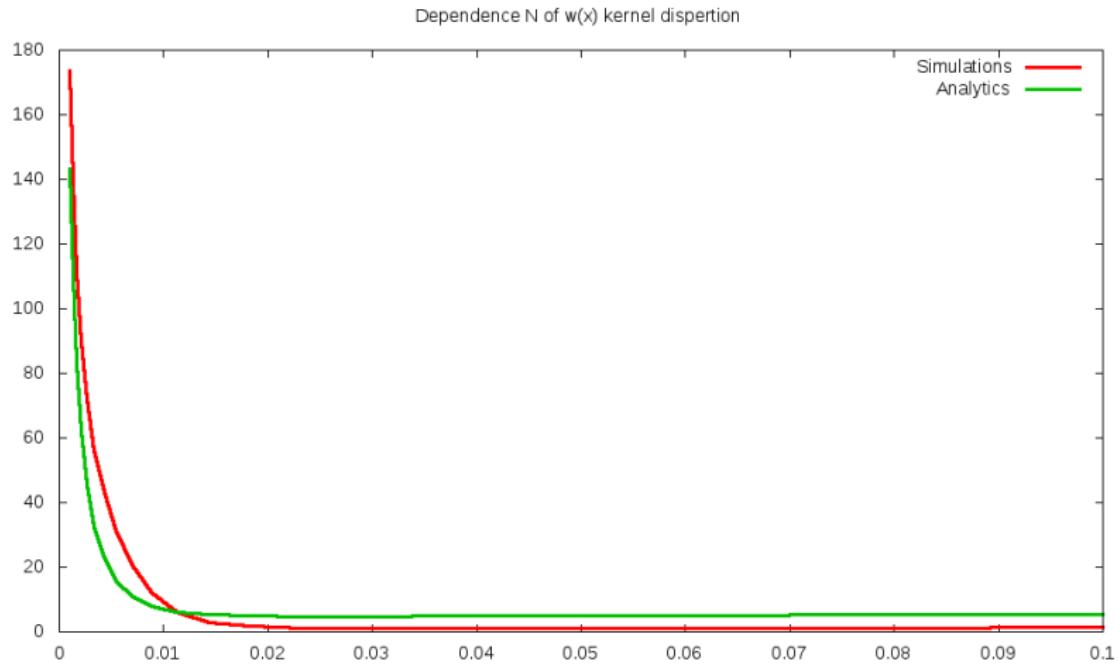
Решение для асимметричного замыкания (синий) и для симметричного замыкания (красный) при $d = 0$.

Проведение компьютерных симуляций

$$T(\xi, \xi') \approx \alpha \frac{C(\xi)C(\xi')}{N} + \\ + \frac{1-\alpha}{2N} (C(\xi)C(\xi') + C(\xi)C(\xi' - \xi) + C(\xi')C(\xi' - \xi) - N^2).$$



Проведение компьютерных симуляций



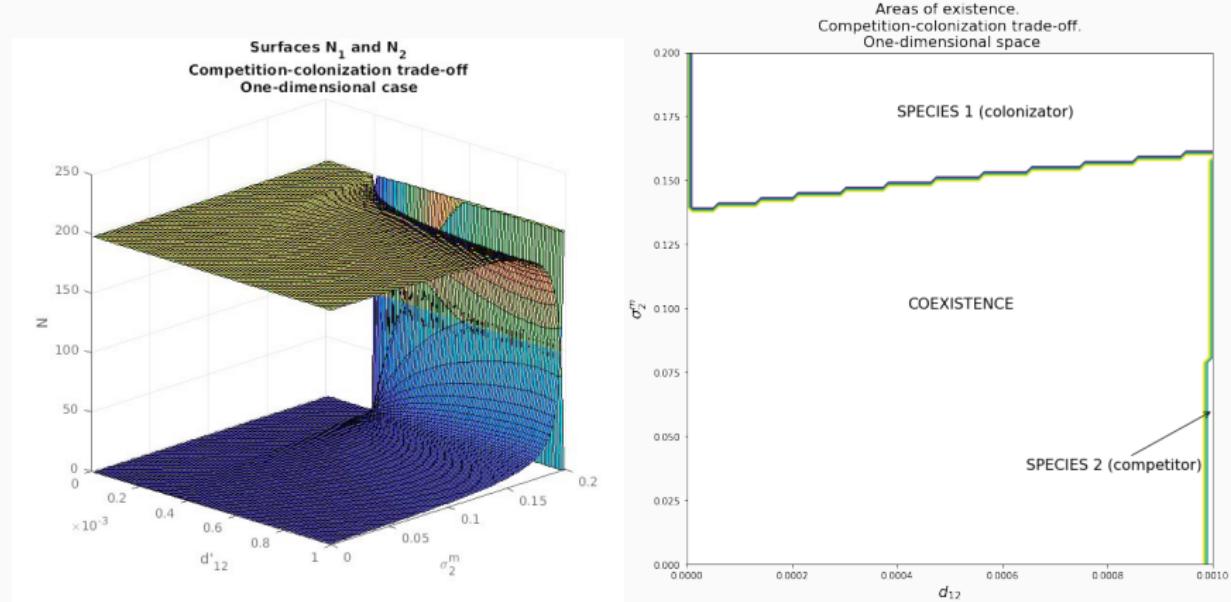
Определение механизма

Принцип Competition-colonization trade-off заключается в том, что если один из видов сильно конкурирует с другим ($d'_{12} > d'_{21}$), а другой способен дальше размножаться ($\sigma_2^m > \sigma_1^m$, радиус распространения), то виды способны сосуществовать;

В рамках численного эксперимента параметры выбраны следующим образом $b_1 = b_2 = 0.4$, $d_1 = d_2 = 0.2$, $d'_{11} = d'_{22} = d'_{21} = 0.001$, $\sigma_1^m = 0.04$, $\sigma_{11}^w = \sigma_{12}^w = \sigma_{21}^w = \sigma_{22}^w = 0.04$.

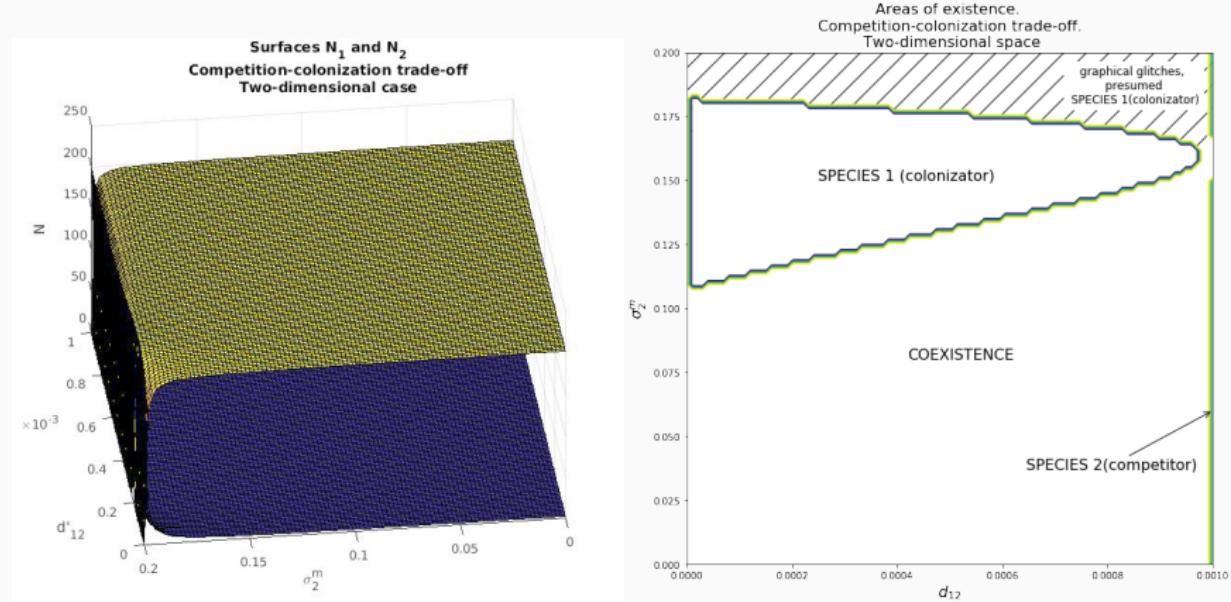
Итоги работы: механизмы сосуществования

Рис. 1: Competition-colonization trade-off в одномерной среде



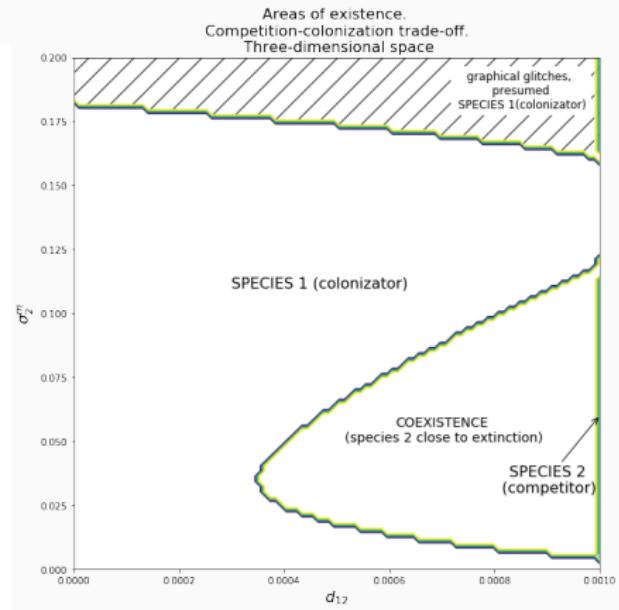
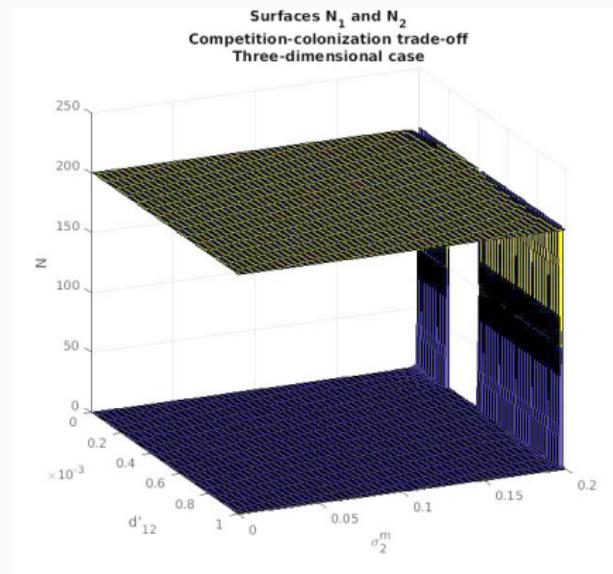
Итоги работы: механизмы сосуществования

Рис. 2: Competition-colonization trade-off в двумерной среде



Итоги работы: механизмы существования

Рис. 3: Competition-colonization trade-off в трехмерной среде



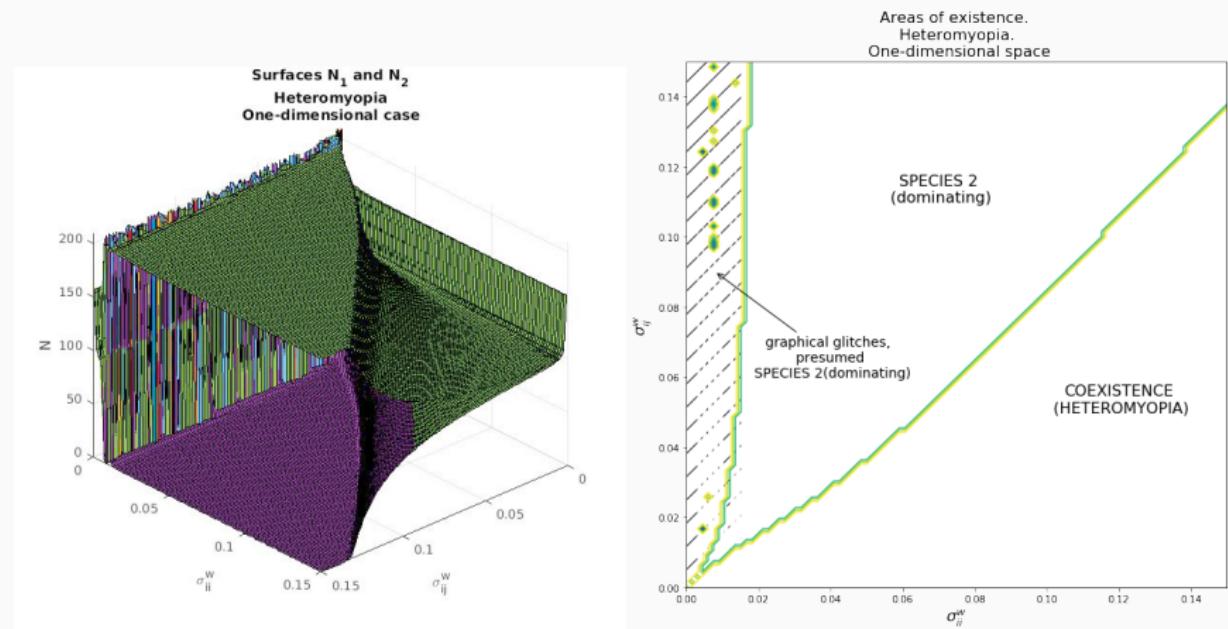
Определение механизма

Принцип **Heteromyopia** заключается в том, что виды конкурируют с особями своего вида на большем расстоянии, чем с особями другого вида ($\sigma_{w11} = \sigma_{w22} \geq \sigma_{w12} = \sigma_{w21}$).

В рамках численного эксперимента оставшиеся параметры приняты равными $d_1 = d_2 = 0.2$, $d'_{11} = d'_{22} = d'_{21} = d'_{12} = 0.001$,
 $b_1 = b_2 = 0.4$, $\sigma_1^m = \sigma_2^m = 0.06$.

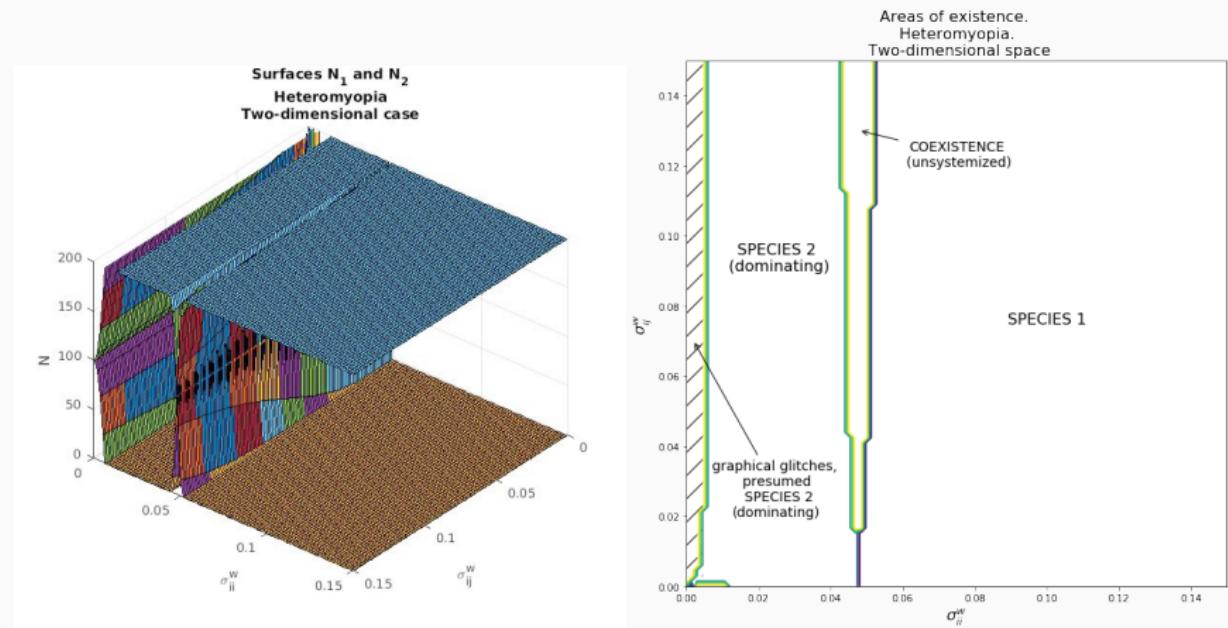
Итоги работы: механизмы сосуществования

Рис. 4: Heteromyopia в одномерной среде



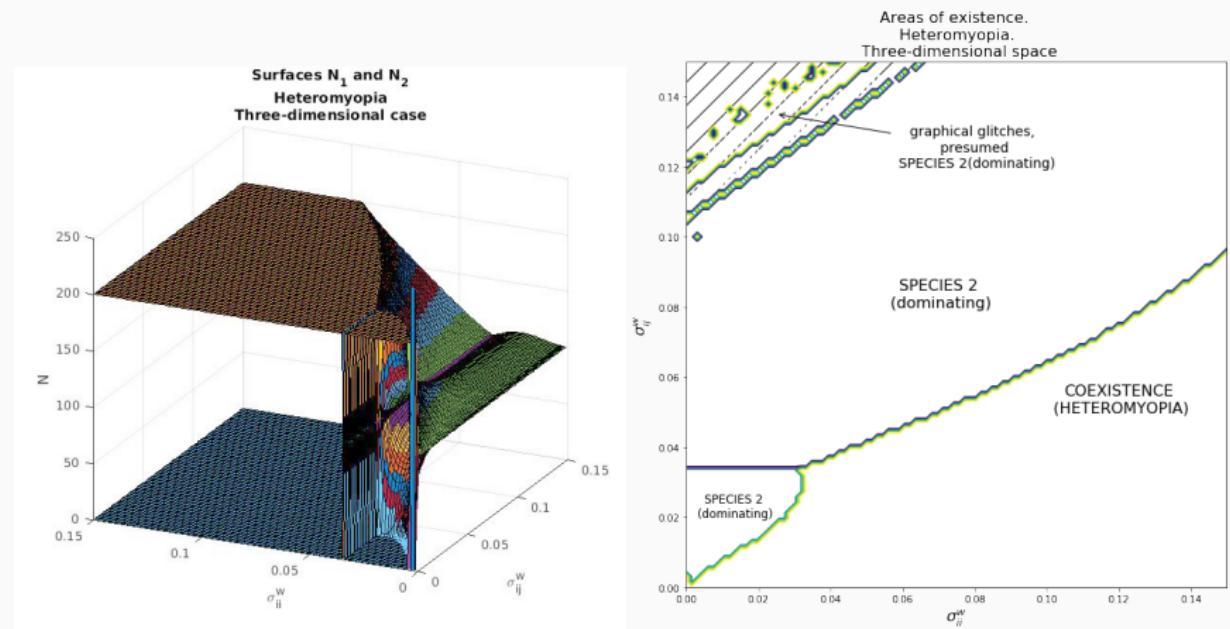
Итоги работы: механизмы сосуществования

Рис. 5: Heteromyopia в двумерной среде



Итоги работы: механизмы сосуществования

Рис. 6: Heteromyopia в трехмерной среде



Спасибо за внимание!