

# Комплексный коэффициент турбулентного обмена и поворот направления ветра в приземном слое атмосферы. Вариационно-статистический подход



XXVIII сессия Научного совета по нелинейной динамике РАН 17 декабря 2019г.

Ф.Л.Быков (Гидрометцентр РФ),  
В.А.Гордин (НИУ – ВШЭ,  
Гидрометцентр РФ)

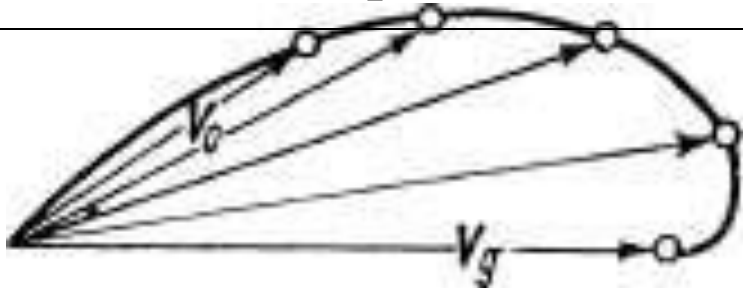
*Москва, 2019*

**Модель Аккерблома - Экмана** описывает стационарное решение уравнений газовой динамики в пограничном слое атмосферы (ПСА). Учитывает: турбулентность и силу Кориолиса. Примерные пространственные масштабы: 1 км по вертикали и 100км по горизонтали:

$$\begin{cases} \frac{d}{dz} \left[ k(z) \frac{du}{dz} \right] = -l (v - v_g), \\ \frac{d}{dz} \left[ k(z) \frac{dv}{dz} \right] = l (u - u_g), \end{cases} \quad (1)$$

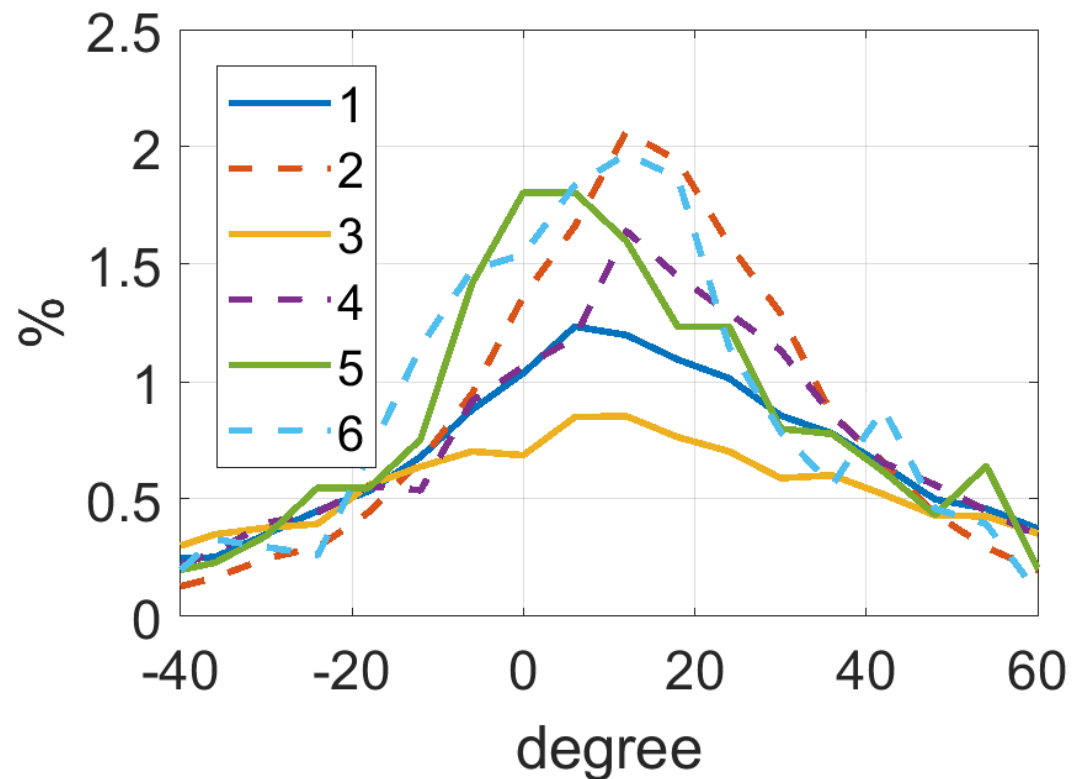
где  $u, v$  – искомые горизонтальные компоненты ветра в пограничном слое,  $u_g, v_g$  – основной (геострофический) ветер,  $z \in [0, H]$  – высота над поверхностью Земли,  $H$  – толщина пограничного слоя,  $l = 1,45842 \cdot 10^{-4} \sin(\varphi) \text{ c}^{-1}$  – параметр Кориолиса,  $\varphi$  – широта,  $k(z) > 0$  – коэффициент турбулентного обмена.

Граничные условия:  $u(H) = u_g, v(H) = v_g, u(0) = 0, v(0) = 0$ . Если коэффициент  $k(z_0) = 0$  для некоторого  $z_0 \in (0, H)$ , то задача может не иметь решения.



Если  $k(z) = const$ , то, согласно (1), угол поворота ветра в ВЛ равен  $45^\circ$

# Распределение углов поворота ветра в погранслое с высотой



1, 3, 5 – южнее  $50^{\circ}$  с.ш. средний угол поворота  $\sim 14^{\circ}$

2, 4, 6 – севернее  $50^{\circ}$  с.ш. средний угол поворота  $\sim 19^{\circ}$

1, 2 – все высоты VL, 3, 4 – высокий VL, 5, 6 – устойчивая стратификация

Задача: найти наиболее согласующийся с измерениями коэффициент  $k(z)$ , возможно зависящий от параметров атмосферы.

## Обобщенная модель Аккерблома - Экмана

Модель (1) инвариантна относительно группы поворотов вокруг вертикальной оси. Будем так же рассматривать модифицированную систему

$$\begin{cases} \frac{d}{dz} \left[ \gamma(z) \sin(\varphi) \frac{dv}{dz} + k(z) \frac{du}{dz} \right] = -l (v - v_g), \\ \frac{d}{dz} \left[ -k(z) \frac{dv}{dz} + \gamma(z) \sin(\varphi) \frac{du}{dz} \right] = -l (u - u_g), \end{cases} \quad (2)$$

где  $\gamma(z)$  играет роль регуляризатора, если  $k(z)$  близко к 0. Мотивировка модели

(2): только матрицы вида  $\begin{pmatrix} \gamma & -k \\ k & \gamma \end{pmatrix}$  перестановочны с группой поворотов

плоскости **SO(2)**, т. е. линейный дифференциальный оператор второго порядка только такого вида инвариантен относительно поворотов системы координат вокруг вертикальной оси. Задача (2) теряет решение, только если  $k(z_0) = \gamma(z_0) \sin \varphi = 0$  для некоторого  $z_0 \in (0, H)$ . В общем положении так не бывает!

Если обозначить  $w = u + iv$  и  $\kappa = k - i\gamma \sin(\varphi)$ , где  $i = \sqrt{-1}$ , то (2) можно переписать как

$$\frac{d}{dz} \left[ \kappa(z) \frac{dw}{dz} \right] = il (w - w_g).$$

## Интегрирование системы по вертикали

При измерениях скорость ветра определяется дифференцированием координат зонда:  $u(t, x, y, z) = d_t x = d_z x \cdot d_t z$ ,  $v(t, x, y, z) = d_t y = d_z y \cdot d_t z$ . Численное дифференцирование дискретно заданных функций, может приводить к шумам.

Чтобы уменьшить порядок дифференцирования, проинтегрируем по вертикальной переменной систему (2) и получим:

$$\begin{cases} \gamma(z) \sin(\varphi) \frac{dv}{dz} + k(z) \frac{du}{dz} = -l \int_0^z (v - v_g) dz + c_1, \\ k(z) \frac{dv}{dz} - \gamma(z) \sin(\varphi) \frac{du}{dz} = l \int_0^z (u - u_g) dz + c_2, \end{cases} \quad (3)$$

где  $c_{1,2}$  – константы интегрирования.

По заданному профилю ветра  $\langle u(z), v(z) \rangle$  не всегда можно найти такие функции  $k(z)$  и  $\gamma(z)$ , чтобы были выполнены уравнения (3). В частности, если при каком-то  $z_1$  выполнено  $\frac{d}{dz} u(z_1) = \frac{d}{dz} v(z_1) = 0$  и  $\langle u(z_1), v(z_1) \rangle \neq \langle u_g, v_g \rangle$ , то никакие  $k(z)$  и  $\gamma(z)$  не смогут удовлетворить системе (3): левые части будут равны нулю, а правые будут линейными функциями с ненулевой производной.

## Интегрирование по вертикали в комплексной форме

Эквивалентная запись зависимости сноса зонда по горизонтали от вещественной вертикальной координаты  $z$  в комплексной форме:

$$\kappa(z) \frac{dw}{dz} = -\psi + c, \quad \frac{d\psi}{dz} = il(w_g - w),$$

где константу  $c \in \mathbb{R}$  выберем так, чтобы  $\int_0^H \psi(z) dz = 0$ .

## Минимизируемый функционал

Предположим, что  $\kappa(z)$  не зависит от времени и горизонтальных переменных, т. е. являются универсальными функциями. Тогда по данным  $N$  вертикальных профилей ветра, будем искать  $\kappa(z)$  как функцию (возможно, зависящую от высоты и параметров атмосферы), минимизирующие среднюю невязку системы уравнений (3) по  $N$  профилям:

$$L(\kappa(z), c_j) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{1}{W_j} \int_0^{H_j} \left| \kappa(z) \frac{dw_j}{dz} + \psi(z) - c_j \right|^2 dz \rightarrow \min_{\kappa(z), \{c_j\}},$$

где  $j$  – номер профиля,  $W_j = \int_0^{H_j} |\psi(z)|^2 dz$ . При такой нормировке получаем

$\min_{c_j} L(0, c_j) = 1$ . Минимум функционала обозначим  $0 < \Lambda < 1$ . Значения  $100\%(1 - \Lambda)$  покажем в Табл. 2.

Задача минимизации  $L(\kappa(z), c_j)$  легко сводится к задаче квадратичного программирования, при этом можно обеспечить выполнение дополнительных соотношений, например,  $k(z) > 0$ . Интегралы по  $z$  заменяются суммами по уровням наблюдений  $\{z_i\}_{i=1}^{M_j}$  для данного зонда с номером  $j$ .

## Толщина погранслоя

Толщину  $H$  оцениваем, решая уравнение

$$\Theta(H) = \Theta_v(0), \quad (5)$$

где  $\Theta$  – потенциальная температура и  $\Theta_v$  – потенциальная виртуальная температура. Это максимальная высота, на которую частица воздуха с поверхности Земли может подняться адиабатически.

Рассматриваем профили ветра в коде BUFR, удовлетворяющие условиям:

1. Дискретность измерений ветра 0.1 м/с
2. Как минимум 25 измерений в слое 0-1000 м
3. Пограничный слой более 100 м. Вертикальное разрешение наших данных (~20 м) не позволяет находить качественные оценки модели при более тонких слоях
4. Изменчивость скорости ветра в ПСА более 2.5 м/с

Из 182232 профилей по этим условиям отобрали 26142 профиля

Таким образом, найденные оценки могут быть не универсальными для использования в прогностической модели, однако они, по-прежнему, важны для понимания физики турбулентных явлений в пограничном слое.



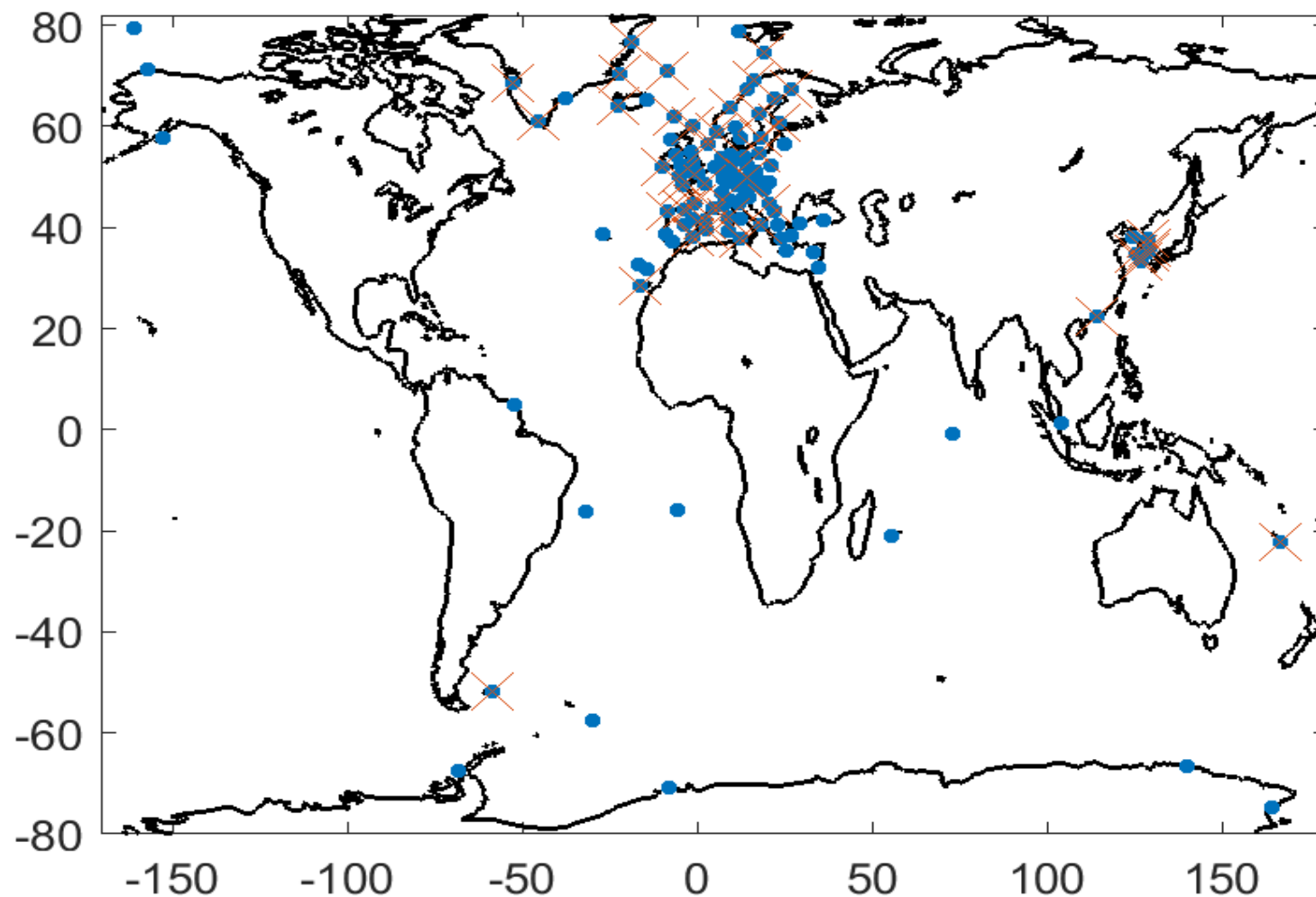
## Число Ричардсона

Число Ричардсона (точнее функция) вычисляется по формуле

$$Ri(z) = \frac{g}{\Theta} \frac{\frac{\partial \Theta}{\partial z}}{\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2}. \quad (7)$$

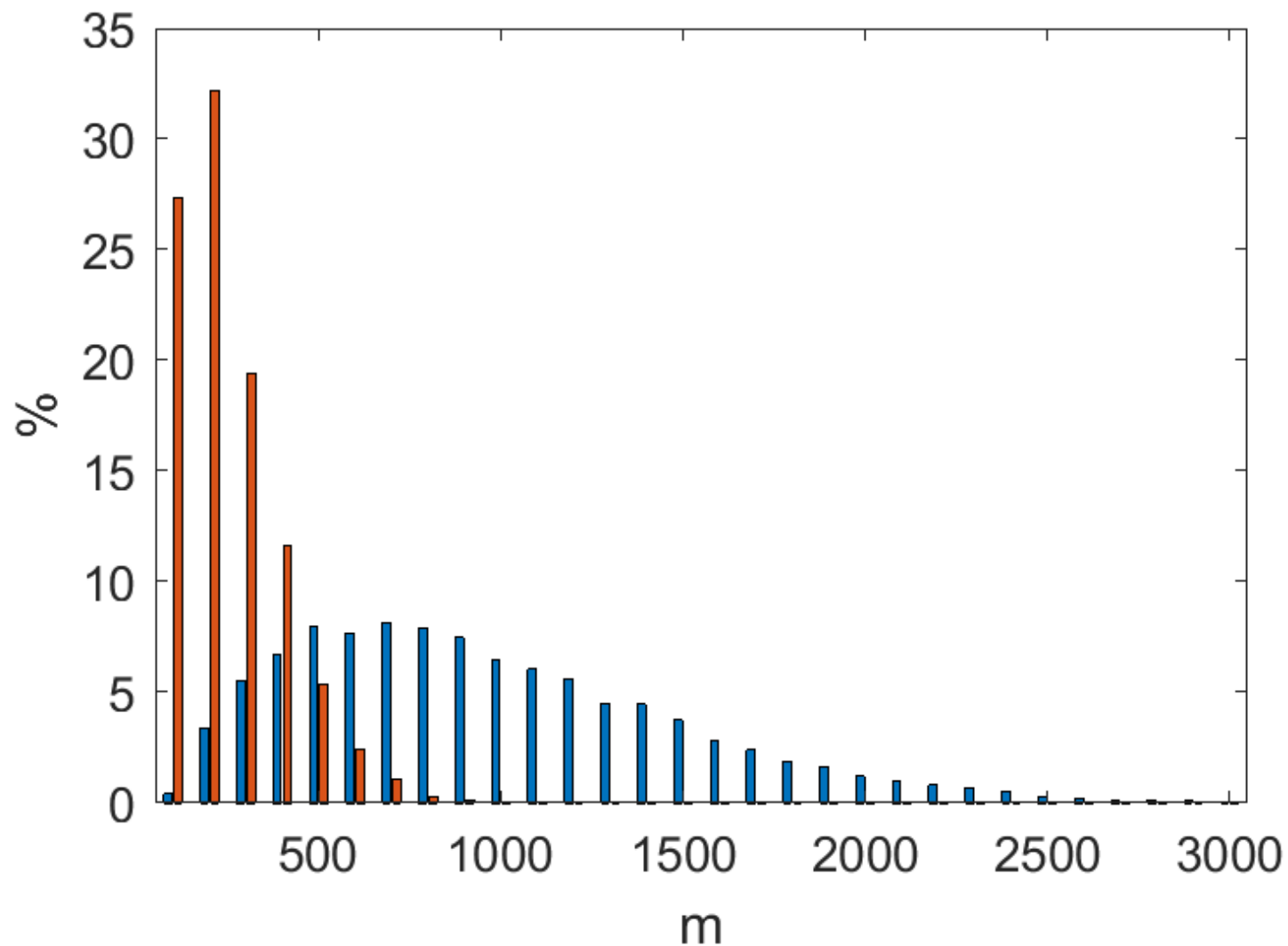
Значения  $Ri > Ri_c = 0.25$  соответствуют устойчивой стратификации,  $Ri < Ri_c$  - неустойчивой,  $Ri < 0$  - сильно неустойчивой (существует слой инверсии).

# Расположение станций, присылающих данные BUFR высокого разрешения



Крестиком помечены станции с большим числом запусков

## Распределение толщин пограничного слоя



Синие – профили с неустойчивой стратификацией. Красные – с устойчивой

## Подвыборки

	Дополнительное условие	$N$	$H_j$
Full	Нет	26142	671±516m
Deep	$H_j > 1000m$	8462	1592±454m
Thin	$H_j < 500m$	12051	270±115m
Stable	$Ri(z) > 0.3$ для всех $z \in [0; H_j]$	2622	201±105m
Unstable	$Ri(z_0) < 0.2$ в некоторой $z_0 \in [0; H_j]$	22584	742±517m

## Постановка задачи квадратичного программирования

Будем искать  $\kappa(z)$  как кусочно-линейные функции одной переменной  $\kappa(z) = \kappa(S(z))$  от некоторого параметра атмосферы  $S(z)$ .  $S$  - любой параметр атмосферы, который можно вычислить по данным радиозонда. Например, высота, разность потенциальных температур, сдвиг ветра и т.д.

Будем искать значения  $K_i = \kappa(S_i)$ , где  $S_i$  - регулярная дискретная сетка из  $M$  точек, покрывающая все возможные значения  $S$ , значения  $\kappa(S)$ ,  $\gamma(S)$  в других точках будем вычислять линейной интерполяцией.

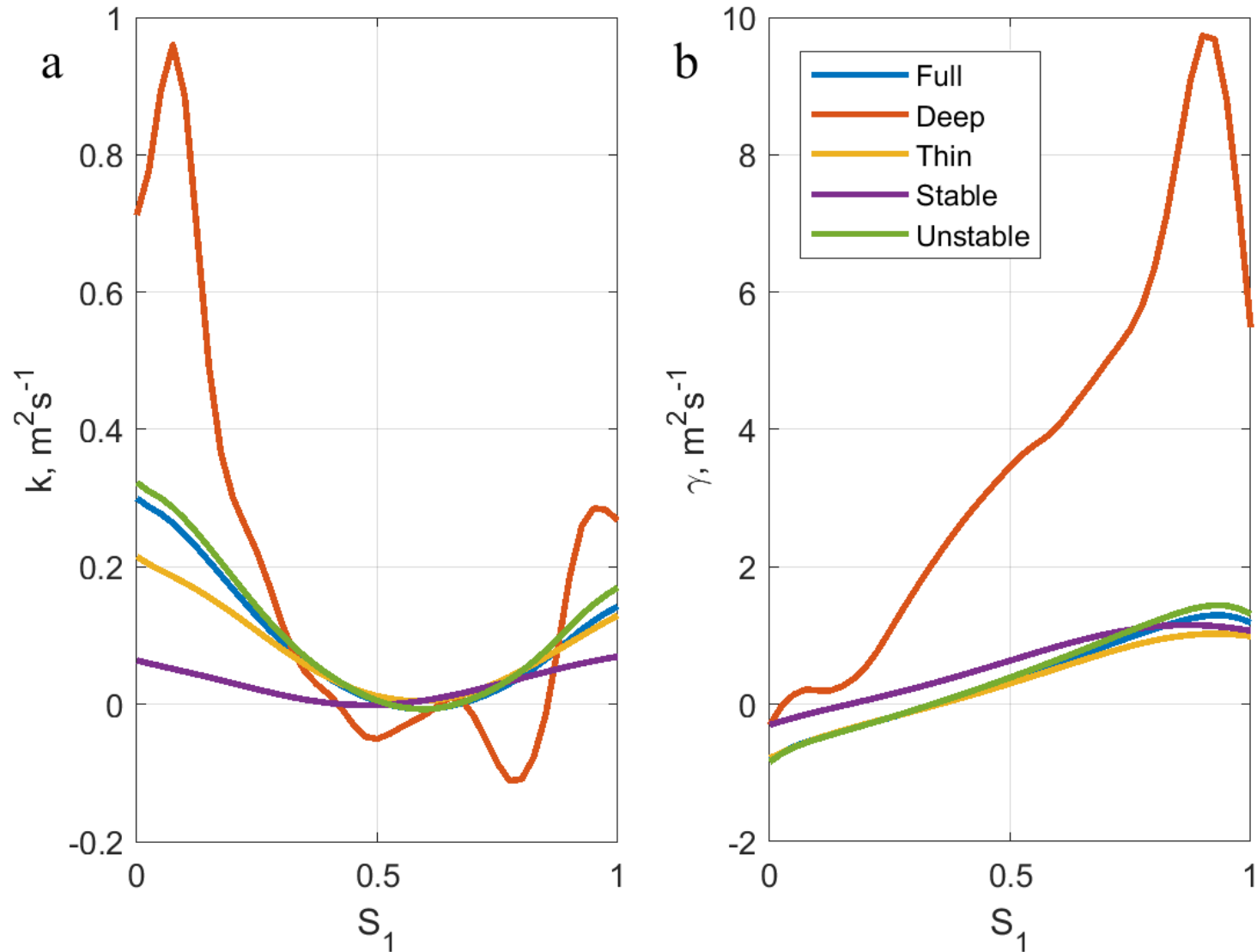
Вместо оптимизации функционала (4) будем численно минимизировать квадратичную функцию от  $M + N$  комплексных переменных:

$$L_s(K_i, c_j) = \sum_{j=1}^N \frac{1}{W_j} \sum_q \left| \left( \kappa(S_j(z)) \frac{d\tilde{w}_j}{dz} + \psi_j \right) \Big|_{z=z_{qj}} - c_j \right|^2 + \alpha \sum_{i=2}^{D-1} \left| \frac{K_{i-1} - 2K_i + K_{i+1}}{D-2} \right|^2 + \frac{\omega}{N} \sum_{j=1}^N |c_j|^2 \quad (8)$$

где  $\alpha = 10c^{-1}$ ,  $\omega = 10^{-10}$  - параметры регуляризации. Слагаемое с  $\alpha$  ограничивает изменчивость  $\kappa(S)$ , а слагаемое с  $\omega$  обеспечивает строгую положительную определенность квадратичного функционала  $L_s$ , а значит и единственность решения задачи минимизации.

Задача минимизации (8) является задачей квадратичного программирования (действительной) размерности  $2M+2N$  с матрицей ковариаций, имеющей до  $8MN+o(MN)$  ненулевых элементов, для точного решения (8) при  $N \gg M$  потребуется  $O(NM^2)$  арифметических операций.

# Результаты оптимизации в зависимости от относительной высоты $S_1=z/H$

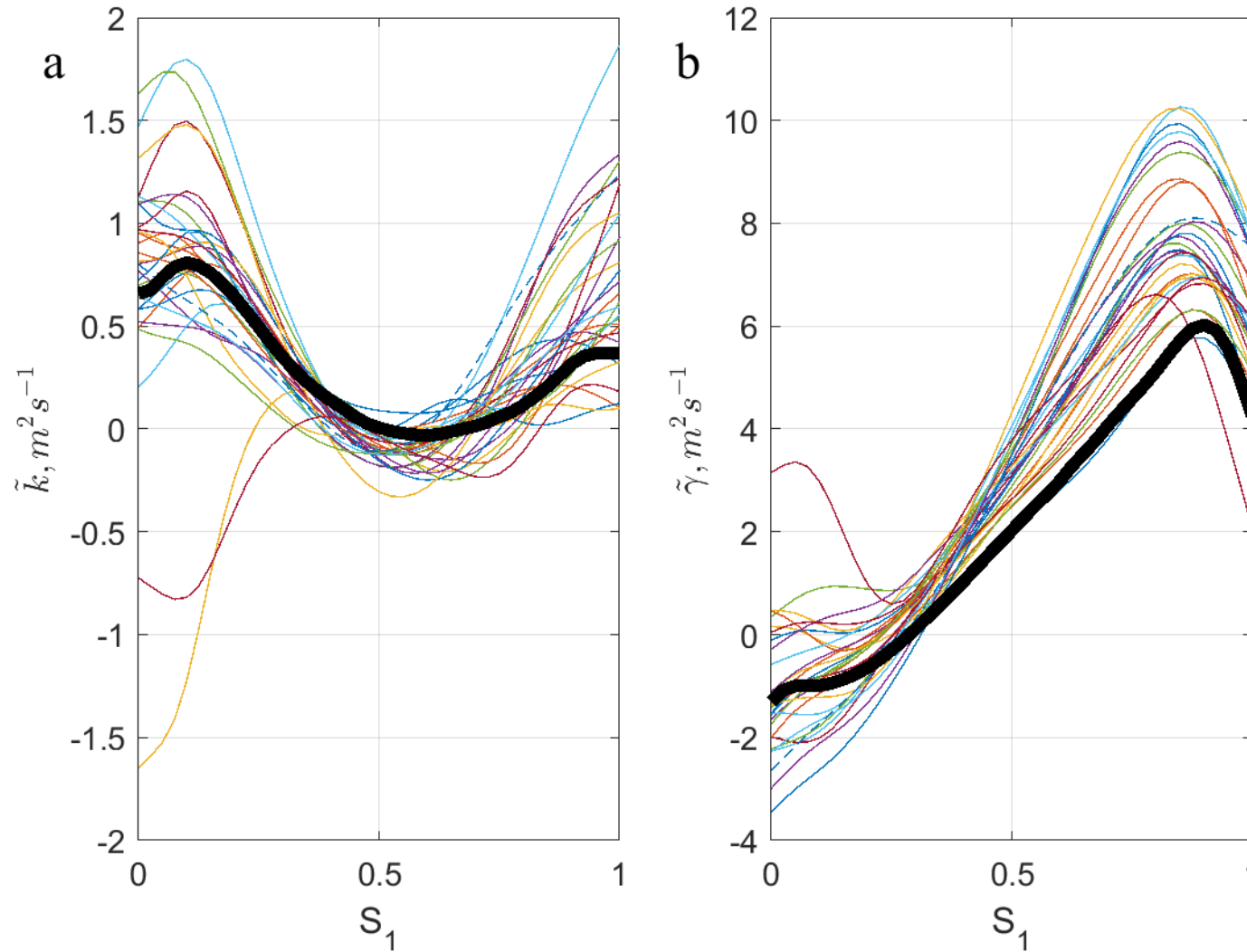


Далее используем нормированные коэффициенты:  $\tilde{k} = k \cdot \frac{H_j}{1000m}$ ,  $\tilde{\gamma} = \gamma \cdot \frac{H_j}{1000m}$

# Отдельно для 28 станций (более 400 профилей с каждой)

a) the real part  $\tilde{k}(S_1)$ ,

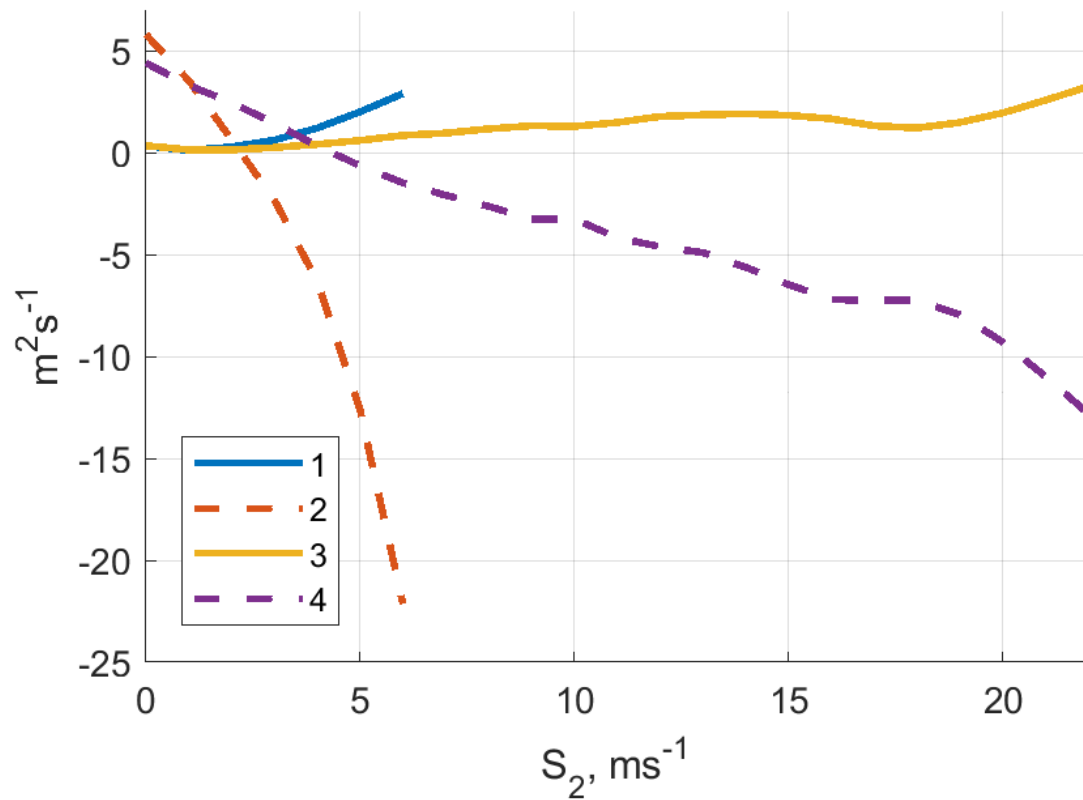
b) the imaginary part  $\tilde{\gamma}(S_1)$ .



Жирные кривые – средние по всем профилям. Пунктир – станция в Южном полушарии.



$\tilde{K}$  в зависимости от сдвига ветра  $S_2 = shear(z) = \sqrt{(u(z) - u_g)^2 + (v(z) - v_g)^2}$

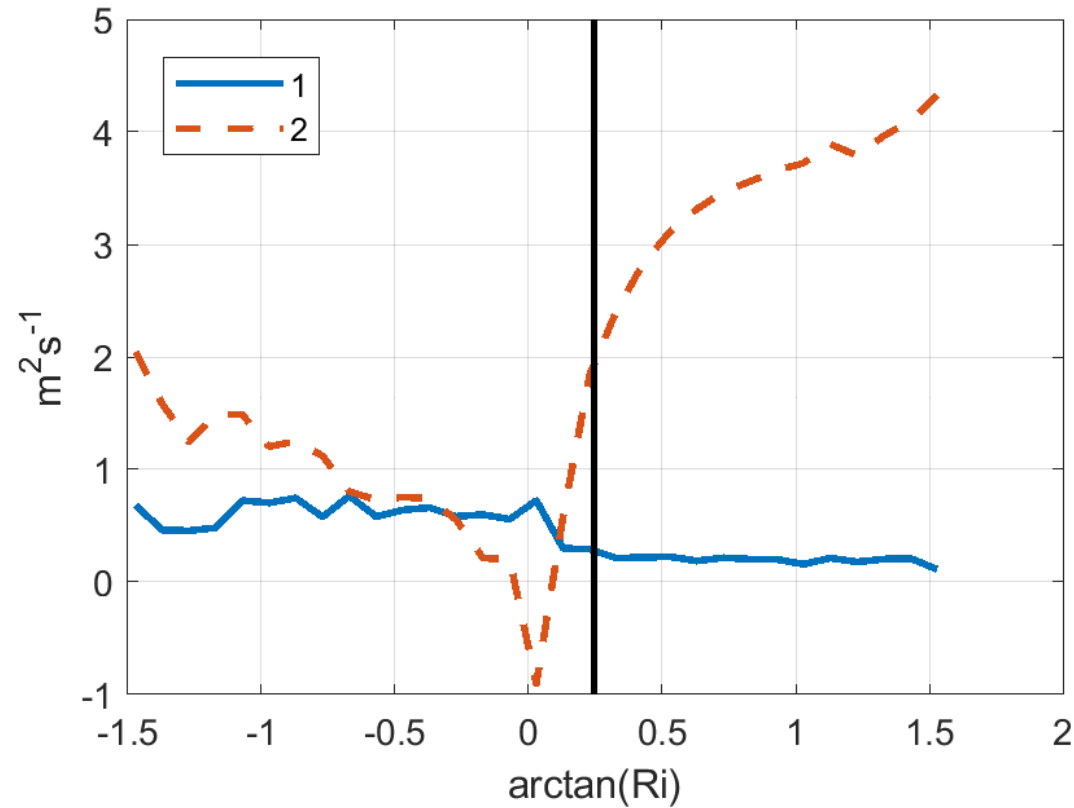


Оптимальный коэффициент  $\tilde{K}$  в зависимости от  $S_2$  ( $m \cdot s^{-1}$ ) Вещ. часть – сплошные линии, мнимые – пунктир.

Устойчивый случай (1, 2),  
неустойчивый (3,4)

При устойчивой и неустойчивой стратификациях получаем сравнительно похожие зависимости. В устойчивом случае больших сдвигов не бывает, поэтому кривые короче.

$\tilde{K}$  в зависимости от числа Ричардсона  $Ri$ ,  $S_3 = \arctan(Ri)$



1 –  $\tilde{k}(S_3)$ , 2 –  $\tilde{\nu}(S_3)$ . Вертикальная линия (граница устойчивости)  $Ri = Ri_c = 0.25$

**Заметим:**

**новая, мнимая часть намного больше классической вещественной**

# Оценки качества моделей величиной $1 - \Lambda$ для различных параметризаций

	Optimized coefficients	$\kappa$	$k > 0, \gamma = 0$	$\tilde{\kappa}$	$\tilde{k} > 0, \gamma = 0$
Subsample	Atmospheric parameter(s) $S$	$100\% \cdot (1 - \Lambda)$			
Full	Relative height $S_1$	38,5%	11,7%	48,3%	13,8%
Deep		34,6%	7,7%	35,0%	8,0%
Thin		62,3%	17,4%	72,6%	20,9%
Stable		65,9%	10,2%	77,5%	11,6%
Unstable		38,9%	12,3%	48,2%	14,0%
Full	Wind shear modulus $S_2$	37,6%	12,2%	46,3%	15,1%
Deep		29,2%	8,3%	29,8%	8,6%
Thin		59,9%	18,2%	67,7%	22,4%
Stable		59,7%	11,6%	67,8%	13,5%
Unstable		39,1%	12,6%	46,7%	15,3%

	Optimized coefficients	$\kappa$	$k > 0, \gamma = 0$	$\tilde{\kappa}$	$\tilde{k} > 0, \gamma = 0$
Full	Richardson number $Ri$	24,4%	11,4%	34,1%	12,6%
Deep		29,2%	7,4%	29,9%	7,5%
Thin		36,0%	16,8%	43,0%	19,8%
Stable		33,0%	9,7%	39,4%	10,3%
Unstable		28,6%	11,8%	35,3%	12,8%
Full	Relative height $S_1$ and wind shear modulus $S_2$	41,2%	12,7%	<b>53,4%</b>	15,4%
Deep		35,2%	8,7%	<b>35,7%</b>	9,1%
Thin		65,2%	18,9%	<b>76,7%</b>	22,9%
Stable		66,3%	11,7%	<b>78,1%</b>	13,5%
Unstable		42,0%	13,1%	<b>53,4%</b>	15,7%
Full	Relative height $S_1$ and Richardson number $Ri$	39,5%	12,4%	50,3%	13,8%
Deep		34,7%	7,9%	35,1%	8,1%
Thin		63,6%	18,4%	74,7%	21,4%
Stable		65,9%	10,2%	77,5%	11,6%
Unstable		40,6%	12,9%	50,1%	14,1%

## Выводы

Предложен эффективный метод оценки коэффициентов турбулентного обмена в зависимости от параметров атмосферы, сводящий задачу к задаче квадратичного программирования.

При добавлении в модель Аккерблома - Экмана дополнительного коэффициента турбулентного обмена  $\gamma$  :

1. Проще обеспечить существование и единственность решения
2. Корреляция с данными измерений увеличивается в **2,5 - 6 раз**
3. Второй дополнительный коэффициент  $\gamma$  как правило **больше (!)** по величине чем первый коэффициент  $k$

Работа была поддержана грантом № 18-05-0011 в рамках Программы «Научный фонд Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» (НИУ ВШЭ)» 2018 - 2019 гг. и в рамках государственной поддержки ведущих университетов Российской Федерации "5-100".

### Литература

- 1.Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. т.1, Гидрометеоиздат, Л.: 1992, т.2, 1996, М.: «Наука».
- 2.Лайхтман Д.Л. (ред.) Динамическая метеорология. Гидрометеоиздат, Л.: 1976.
- 3.P L.Bykov, V.A.Gordin. Big data and inverse problem for Ekman - Akerblom model. Research Activities in Atmospheric and Oceanic Modeling, 2018.

*Это, гады – физики на пари  
Раскрутили шарик наоборот*

*Спасибо за внимание!*