NATIONAL RESEARCH UNIVERSITY

НИУ ВШЭ
Статистическое моделирование и актуарные расчеты

ОПТИМАЛЬНОЕ МЕДИЦИНСКОЕ СТРАХОВАНИЕ В УСЛОВИЯХ ВСПЫШКИ ЭПИДЕМИИ

Шемендюк Александр Андреевич
Кельберт Марк Яковлевич

Москва, 30 мая 2019

ДАНИЭЛЬ БЕРНУЛЛИ [1760]

Первая эпидемиологическая модель

- $y(x)$ – количество людей возраста x
- $\mu(x)$ – естественная смертность
- β – постоянная интенсивность заражения оспой
- α – вероятность умереть от болезни
- $1-\alpha$ – вероятность получить иммунитет
- $w(x)$ – число людей, подверженных заболеванию (susceptible)
- $y_\beta(x)$ – число выживших людей возраста x (с или без иммунитета)
- После заболевания индивид сразу умирает или получает иммунитет

ДАНИЭЛЬ БЕРНУЛЛИ [1760]

Первая эпидемиологическая модель

Модель без инфекции: $y'(x) = -\mu(x)y(x) \Rightarrow y(x) = y_0 e^{-\int_0^x \mu(t)\,dt}$,
где y_0 - число вновь рожденных младенцев
Модель с инфекцией:

- $y_\beta(x)$ – размер популяции возраста x в модели с инфекцией
- $w(x)$ – число подверженных заболеванию
- $z(x)$ – число иммунизированных

$$\frac{dw(x)}{dx} = -\big(\beta + \mu(x)\big)w(x), \qquad w(0) = y_0$$

$$\frac{dz(x)}{dx} = -\mu(x)z(x) + (1-\alpha)\beta\, w(x), \qquad z(0) = 0$$

ДАНИЭЛЬ БЕРНУЛЛИ [1760]

Первая эпидемиологическая модель

$$\frac{dw(x)}{dx} = -\big(\beta + \mu(x)\big)w(x), \qquad w(0) = y_0$$

$$\frac{dz(x)}{dx} = -\mu(x)z(x) + (1-\alpha)\beta\, w(x), \qquad z(0) = 0$$

$$w(x) = y_0 e^{-\beta x - \int_0^x \mu(t)\,dt},$$

$$z(x) = y_0(1-\alpha)\big(1 - e^{-\beta x}\big)\, e^{-\int_0^x \mu(t)\,dt}.$$

Поскольку $y_\beta(x) = w(x) + z(x)$, имеем

$$\boxed{y_\beta(x) = y(x)\big[1 - \alpha + \alpha e^{-\beta x}\big],} \qquad y(x) = y_0 e^{-\int_0^x \mu(t)\,dt}$$

ЭПИДЕМИОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Современные модель

- SEIR (susceptible-exposed-infected-recovered)

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = -\beta SI \\ \dfrac{dE}{dt} = \beta SI - aE \\ \dfrac{dI}{dt} = aE - \mu I \\ \dfrac{dR}{dt} = \mu I \end{cases}$$

- MSIR (maternally−derived immunity)

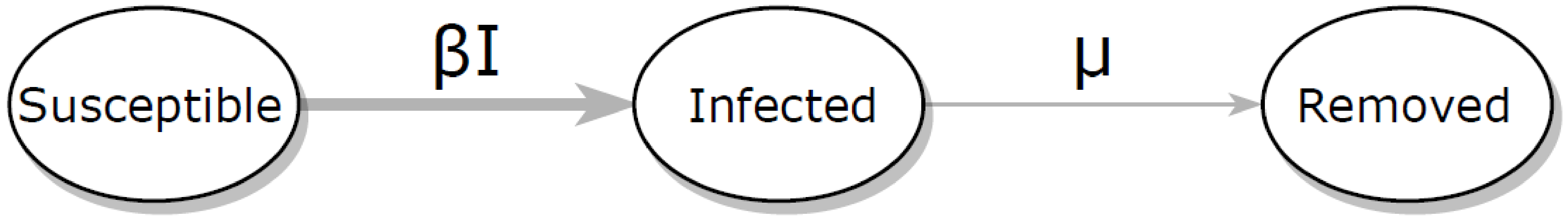
$$\begin{cases} \dfrac{dM}{dt} = B - \gamma M \\ \dfrac{dS}{dt} = \gamma M - \beta SI \\ \dfrac{dI}{dt} = \beta SI - \mu I \\ \dfrac{dR}{dt} = \mu I \end{cases}$$

ЭПИДЕМИОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Современные модель

- SIR (susceptible-infected-recovered)

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = -\beta SI \\ \dfrac{dI}{dt} = \beta SI - \mu I \\ \dfrac{dR}{dt} = \mu I \end{cases}$$



- MSEIRS

$$\begin{cases} \dfrac{dM}{dt} = B - \gamma M \\ \dfrac{dS}{dt} = \gamma M - \beta SI + \varepsilon R \\ \dfrac{dE}{dt} = \beta SI - aE \\ \dfrac{dI}{dt} = aE - \mu I \\ \dfrac{dR}{dt} = \mu I - \varepsilon R \end{cases}$$

SIR МОДЕЛЬ С МИГРАЦИЕЙ

для n центров

$$
\begin{cases}
\dfrac{dS_i}{dt} = -\beta S_i I_i - \sum_{j \neq i} k_{ij} S_i + \sum_{j \neq i} k_{ji} S_j \\
\dfrac{dI_i}{dt} = \beta S_i I_i - \mu I_i - \sum_{j \neq i} l_{ij} I_i + \sum_{j \neq i} l_{ji} I_j \\
\dfrac{dR_i}{dt} = \mu I_i
\end{cases}
$$

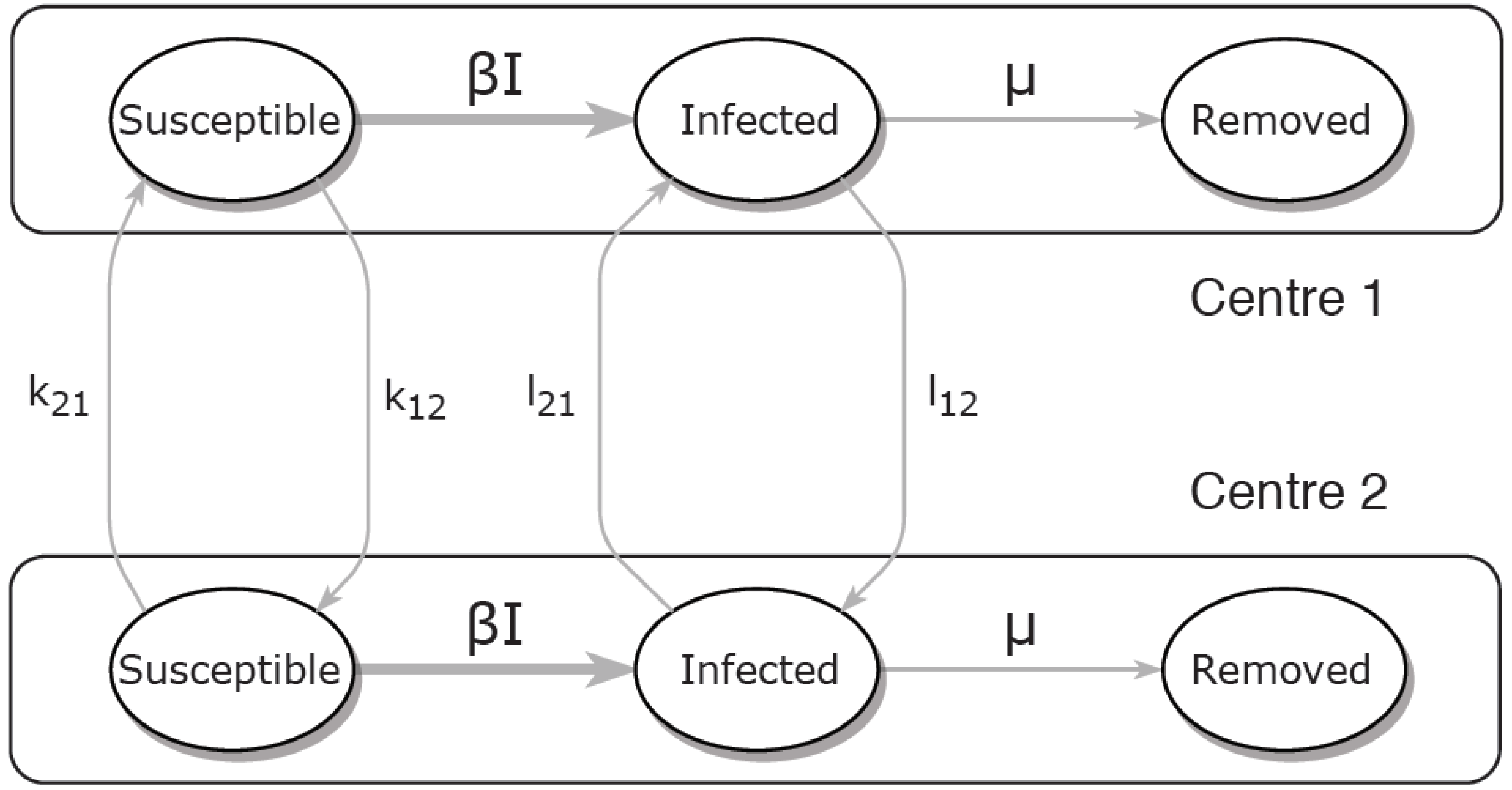
где k_{ij} - интенсивность миграции подверженных болезни из центра i в центр j,

l_{ij} - интенсивность миграции больных из центра i в центр j

$i, j = 1, \dots, n$

SIR МОДЕЛЬ С МИГРАЦИЕЙ

для 2 центров



$$\begin{cases} \dfrac{dS_1}{dt} = -\beta S_1 I_1 - k_{12} S_1 + k_{21} S_2 \\ \dfrac{dI_1}{dt} = \beta S_1 I_1 - \mu I_1 - l_{12} I_1 + l_{21} I_2 \\ \dfrac{dR_1}{dt} = \mu I_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{dS_2}{dt} = -\beta S_2 I_2 - k_{21} S_2 + k_{12} S_1 \\ \dfrac{dI_2}{dt} = \beta S_2 I_2 - \mu I_2 - l_{21} I_2 + l_{12} I_1 \\ \dfrac{dR_2}{dt} = \mu I_2 \end{cases}$$

$$S_1(0) = S_{1,0}, I_1(0) = I_{1,0}, R_1(0) = R_{1,0} \quad S_2(0) = S_{2,0}, I_2(0) = I_{2,0}, R_2(0) = R_{2,0}$$

SIR МОДЕЛЬ С МИГРАЦИЕЙ

для 2 центров

Пусть $S_0 = S_{1,0} + S_{2,0}$ и имеется объем вакцины $0 \leq V \leq S_0$.

Рассмотрим функционал (общее количество потерянных рабочих часов / дней)

$$A_T = \sum_{i=1}^{2} \int_0^T I_i(t)\, dt\,,$$

где T – время конца эпидемии.

<u>*Задача*</u> – распределить вакцину V между центрами так, чтобы минимизировать A_T.

SIR МОДЕЛЬ С МИГРАЦИЕЙ

для 2 центров

Задача – распределить вакцину V между центрами так, чтобы минимизировать A_T.

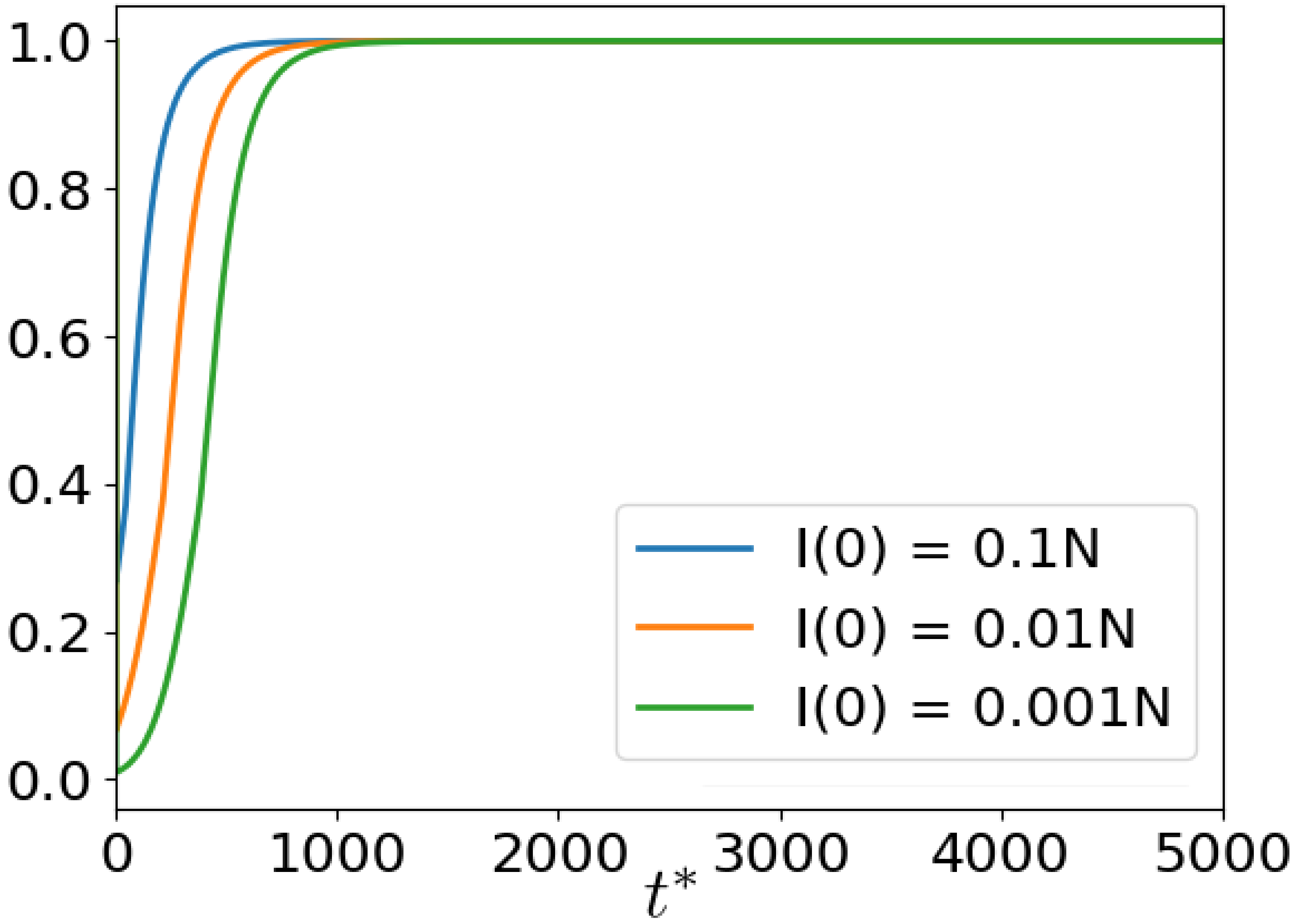
Пусть (ω_1, ω_2), $\omega_i \geq 0$, $\omega_1 + \omega_2 = 1$ распределение вакцины между 2 центрами.

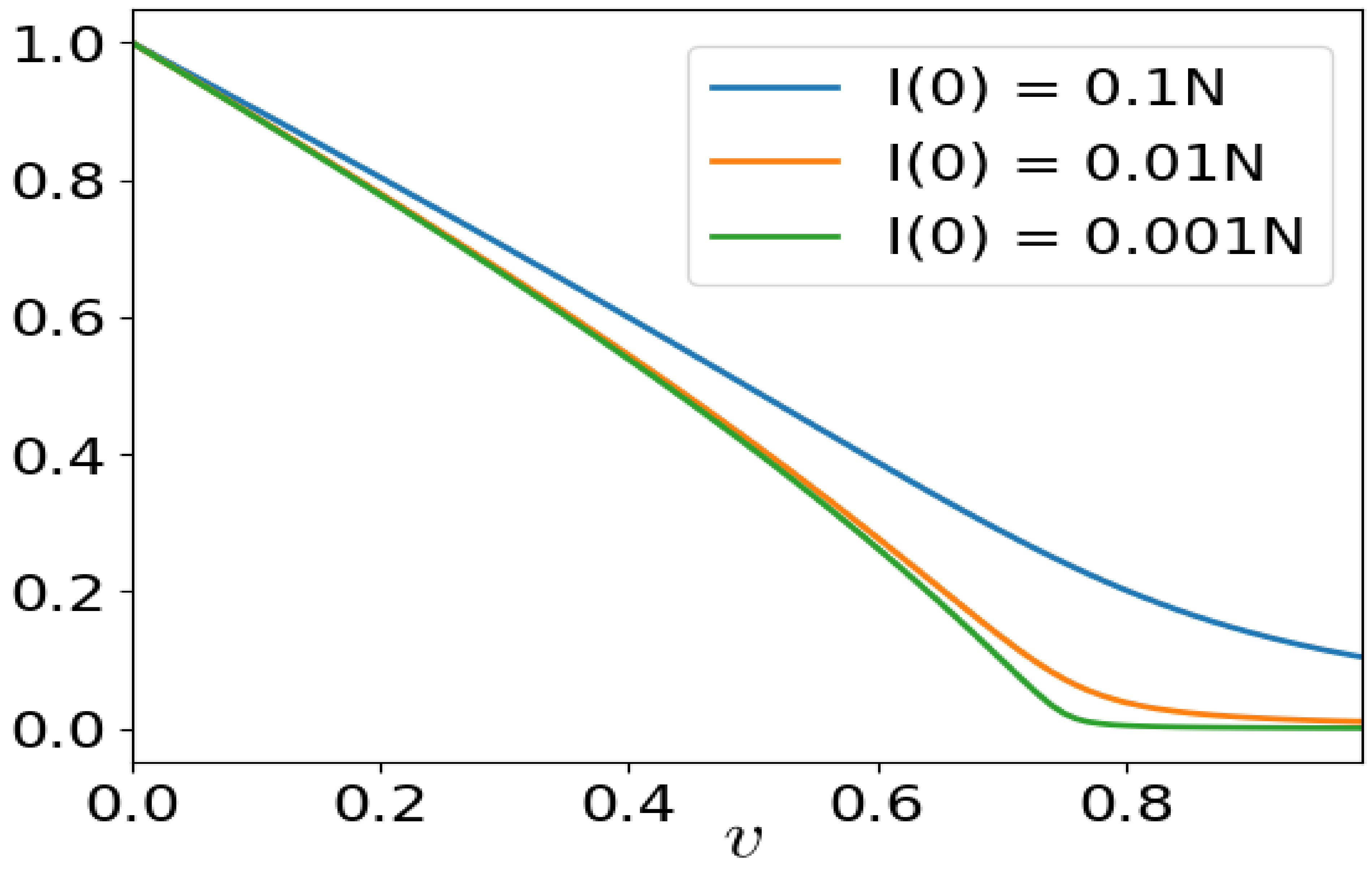
$$\begin{cases} \frac{dS_i}{dt} = -\frac{\alpha}{N_i} S_i I_i - \sum_{j \neq i} k_{ij} S_i + \sum_{j \neq i} k_{ji} S_j - \min\{\omega_i V, S_i\}\, \delta(t - t^*) \\ \frac{dI_i}{dt} = \frac{\alpha}{N_i} S_i I_i - \mu I_i - \sum_{j \neq i} l_{ij} I_i + \sum_{j \neq i} l_{ji} I_j \\ \frac{dR_i}{dt} = \mu I_i + \min\{\omega_i V, S_i\}\, \delta(t - t^*) \end{cases}$$

где δ – дельта функция Дирака, t^* – оптимальное время вакцинации

SIR МОДЕЛЬ С МИГРАЦИЕЙ

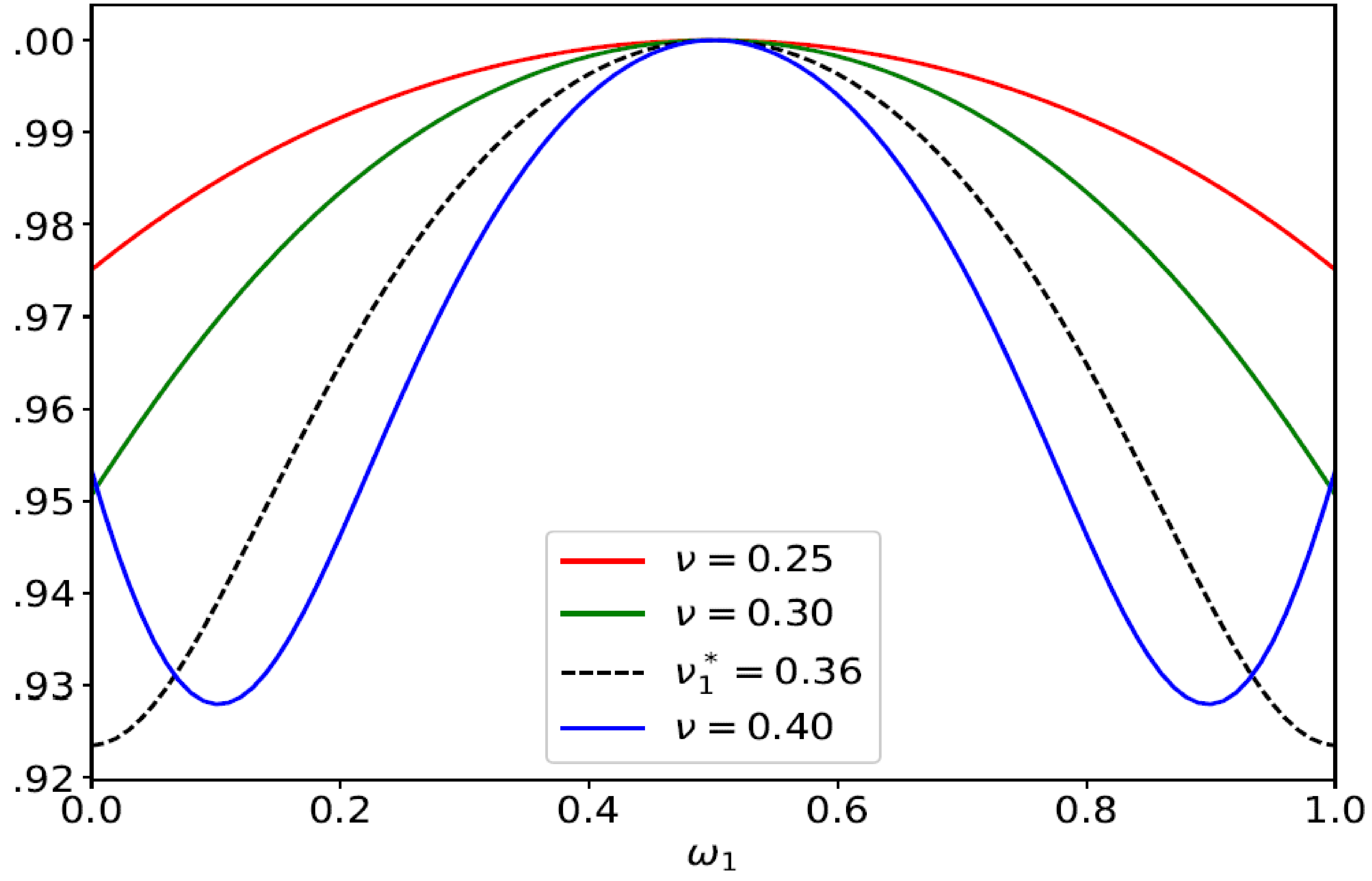
для 1 центра

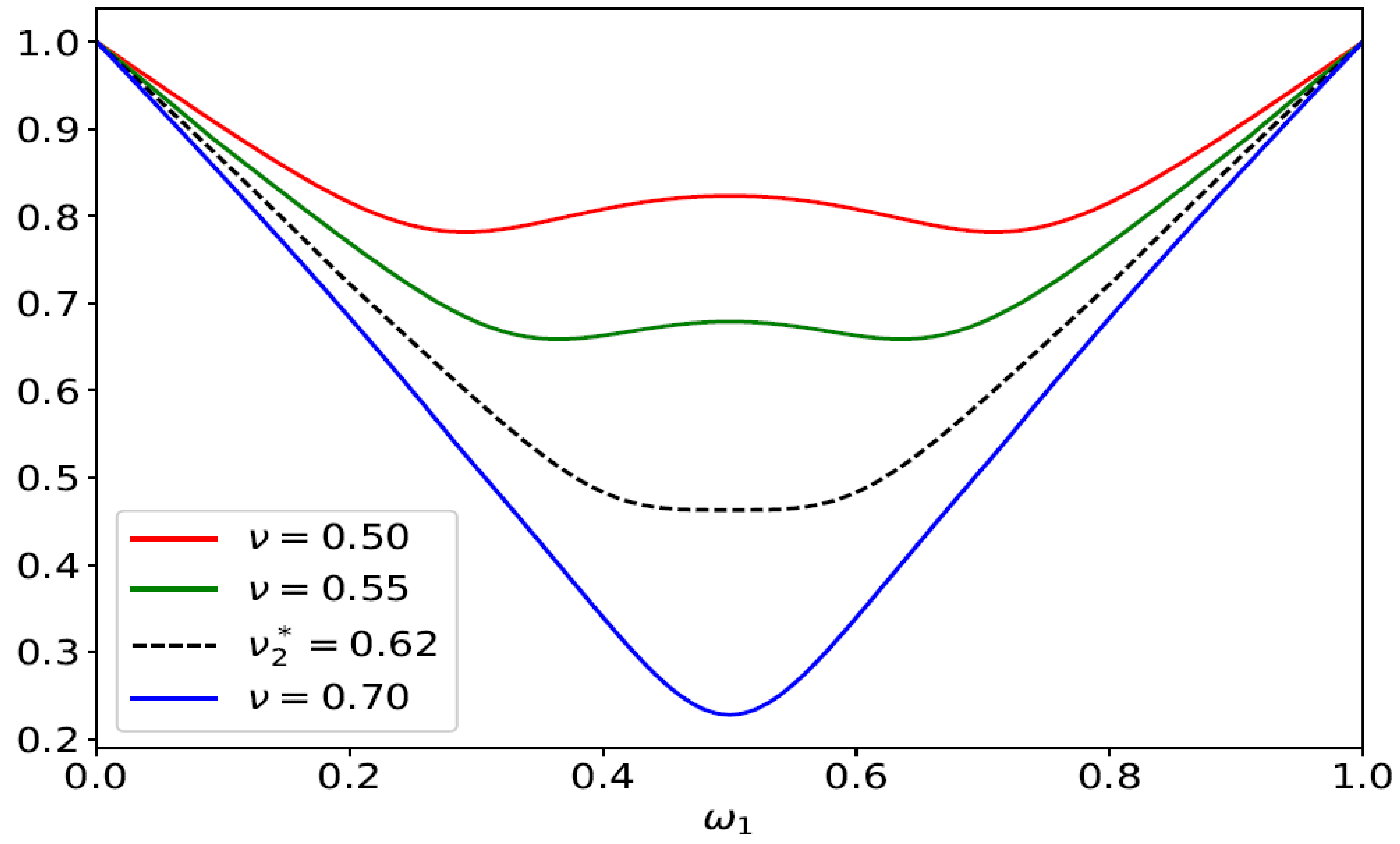




Слева функционал $A_T(t^*)$ для одного центра, нормализованный на своё максимальное значение.
Сверху – $A_T(0)$ с разным объемом вакцины

SIR МОДЕЛЬ С МИГРАЦИЕЙ
для 2 центров



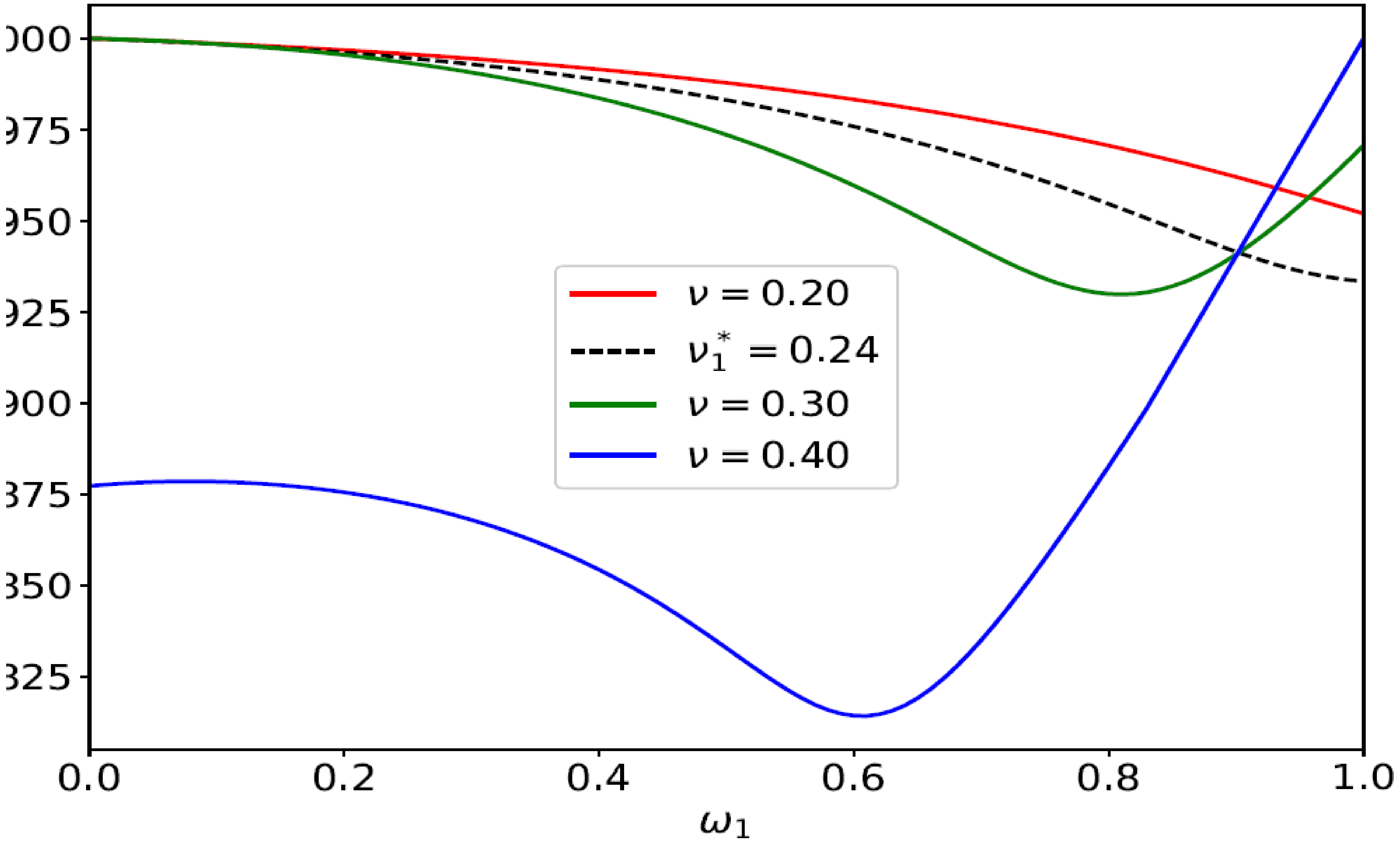


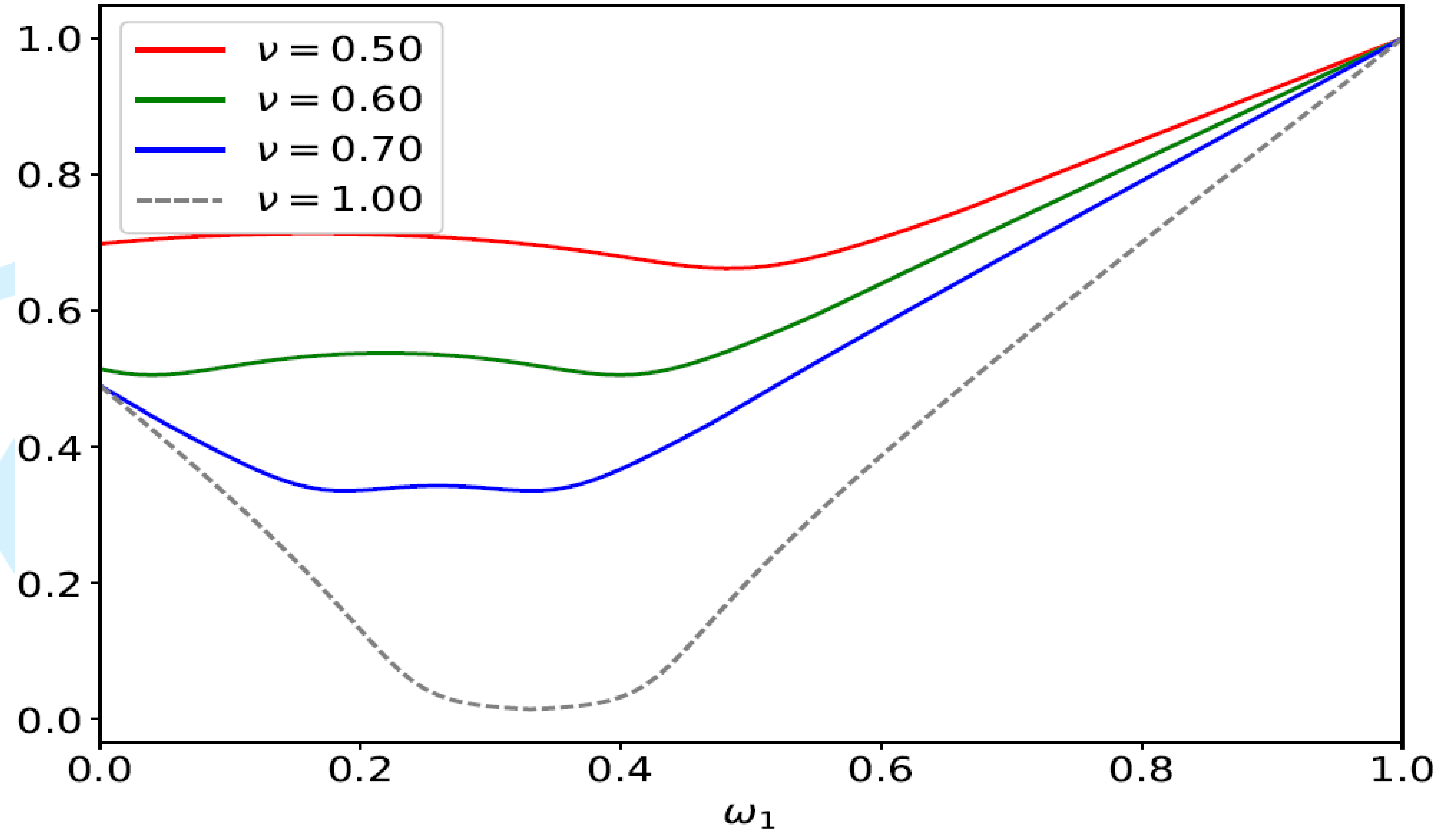
Функционал $A_T(\omega_1)$, нормализованный на своё максимальное значение.

$$\mu = 1, \alpha = 4, k_{12} = k_{21} = 0.01, l_{12} = l_{21} = 0.001,$$
$$I_{i,0} = 0.01\ N$$

SIR МОДЕЛЬ С МИГРАЦИЕЙ

для 2 центров





Функционал $A_T(\omega_1)$, нормализованный на своё максимальное значение.

$$\mu = 1, \alpha = 4, k_{12} = k_{21} = 0.01, l_{12} = l_{21} = 0.001,$$

$$I_{i,0} = 0.005(N_1 + N_2), N_2 = 2N_1$$

ПРИНЦИП ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

Равенство средних доходов и средних расходов

Принцип эквивалентности:

$$\mathbb{E}[\text{доход}] = \mathbb{E}[\text{расход}]$$

Расходы

$$\mathbb{E}[\text{расход}] = c_1 A_T + c_2 \sum_{i=1}^{2} R_i(T) + c_3 V$$

Доходы

$$\mathbb{E}[\text{доход}] = \pi B_T + c_4 V_{sold}$$

где $B_T = \sum_{i=1}^{2} \int_0^T S_i(t)\, dt$, π – страховая премия.

Тогда имеем

$$\pi = \frac{1}{B_T}\left[c_1 A_T + c_2 \sum_{i=1}^{2} R_i(T) + c_3 V - c_4 V_{sold} \right]$$

ОПТИМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВАКЦИНЫ

с разных точек зрения

Минимизация премии:

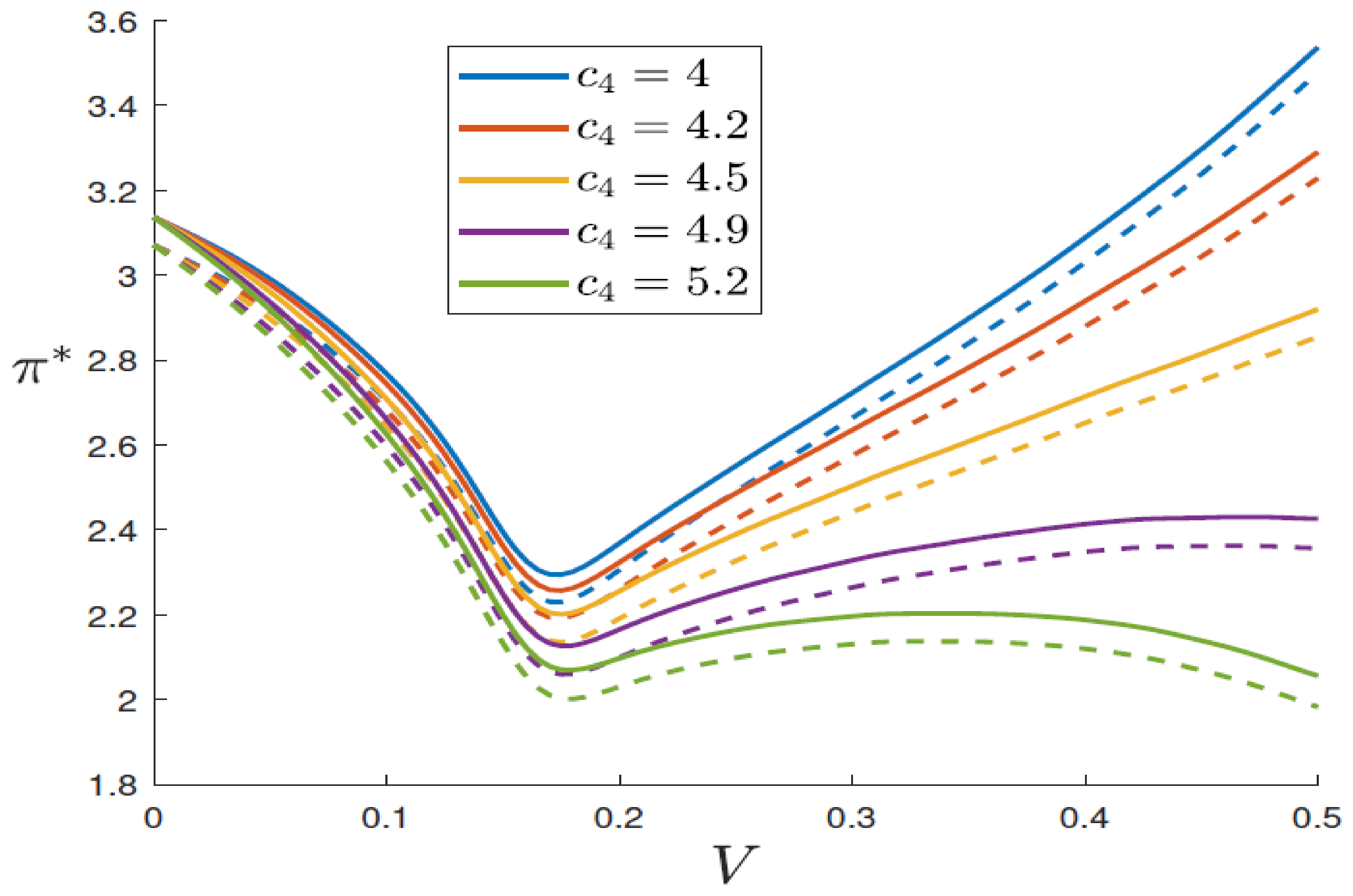
$$\pi^* = \min_{\omega_1} \frac{1}{B_T}\left[c_1 A_T + c_2 \sum_{i=1}^{2} R_i(T) + c_3 V \ - c_4 V_{sold}\right]$$

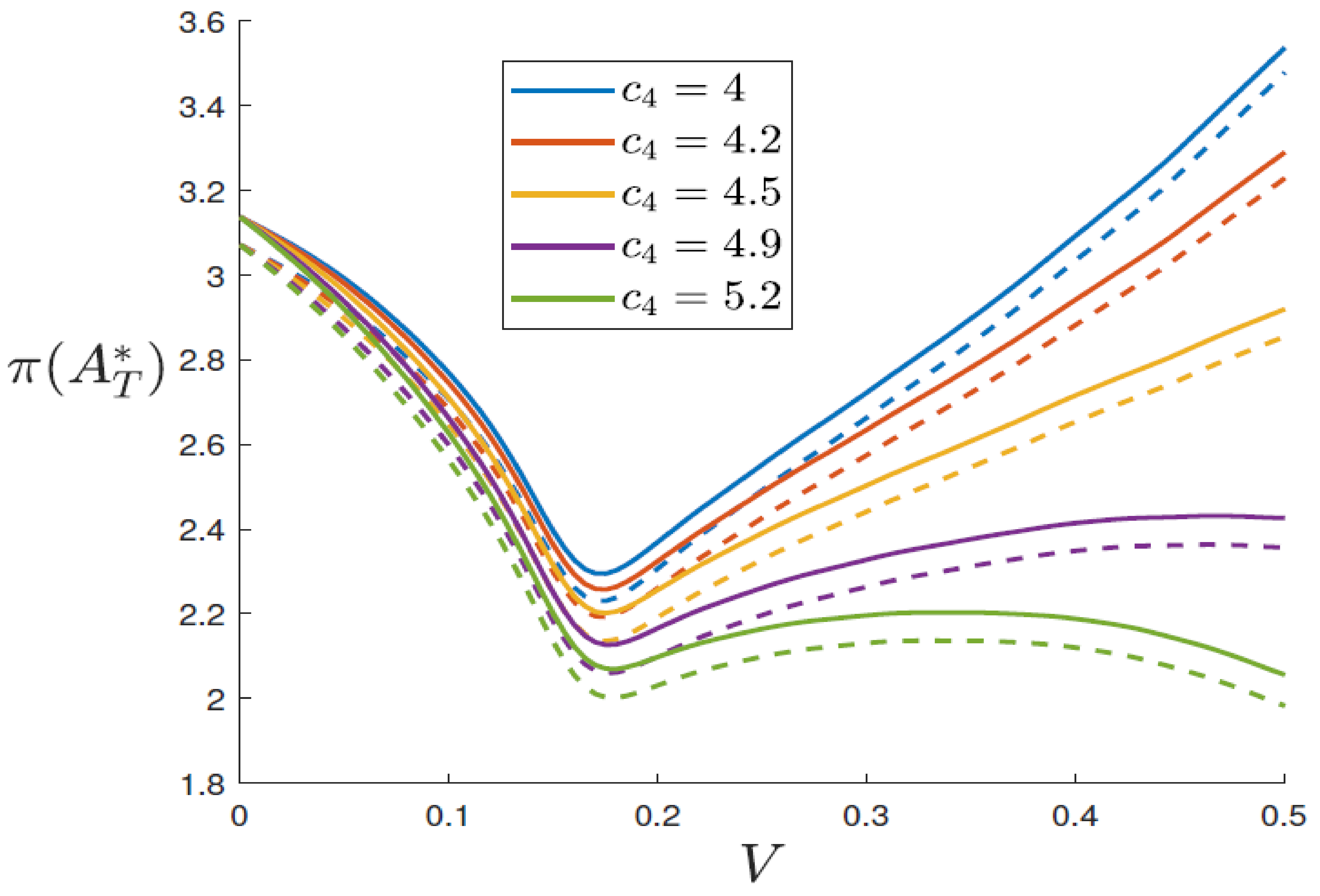
Минимизация общих потерянных рабочих часов:

$$A_T^* = \min_{\omega_1} A_T \ ,$$

тогда рассматриваем премию $\pi(A_T^*)$.

SIR МОДЕЛЬ С МИГРАЦИЕЙ
для 2 центров





Оптимальная премия для двух разных центров

$$\mu_1 = 3, \mu_2 = 0.1, \alpha = 6, k_{12} = 0.1, k_{21} = 0.15, l_{12} = 0.05, l_{21} = 2.5,$$
$$S_{1,0} = 5000, S_{2,0} = 1000, I_{1,0} = 800, I_{2,0} = 200$$

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Chernov, M. Y. Kelbert, and A. A. Shemendyuk. Optimal vaccine allocation during the mumps outbreak in two SIR centres. Mathematical Medicine and Biology: A Journal of the IMA, 2019. In press.
2. C. Lefèvre, P. Picard, and M. Simon. Epidemic risk and insurance coverage. Journal of Applied Probability, 54(1):286 — 303, 2017.
3. W. O. Kermack and A. G. McKendrick. A contribution to the mathematical theory of epidemics. Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 115(772):700 – 721, 1927.