

Поворот направления ветра в приземном слое атмосферы.

Спираль Экмана, и нет ли чего получше?

Вариационно-статистический подход

Модель Аккерблома-Экмана

Модель описывает стационарное решение уравнений газовой динамики в пограничном слое атмосферы (ПСА). Учитывает: турбулентность и силу Кориолиса. Примерные пространственные масштабы: 1 км по вертикали и 100 км по горизонтали.

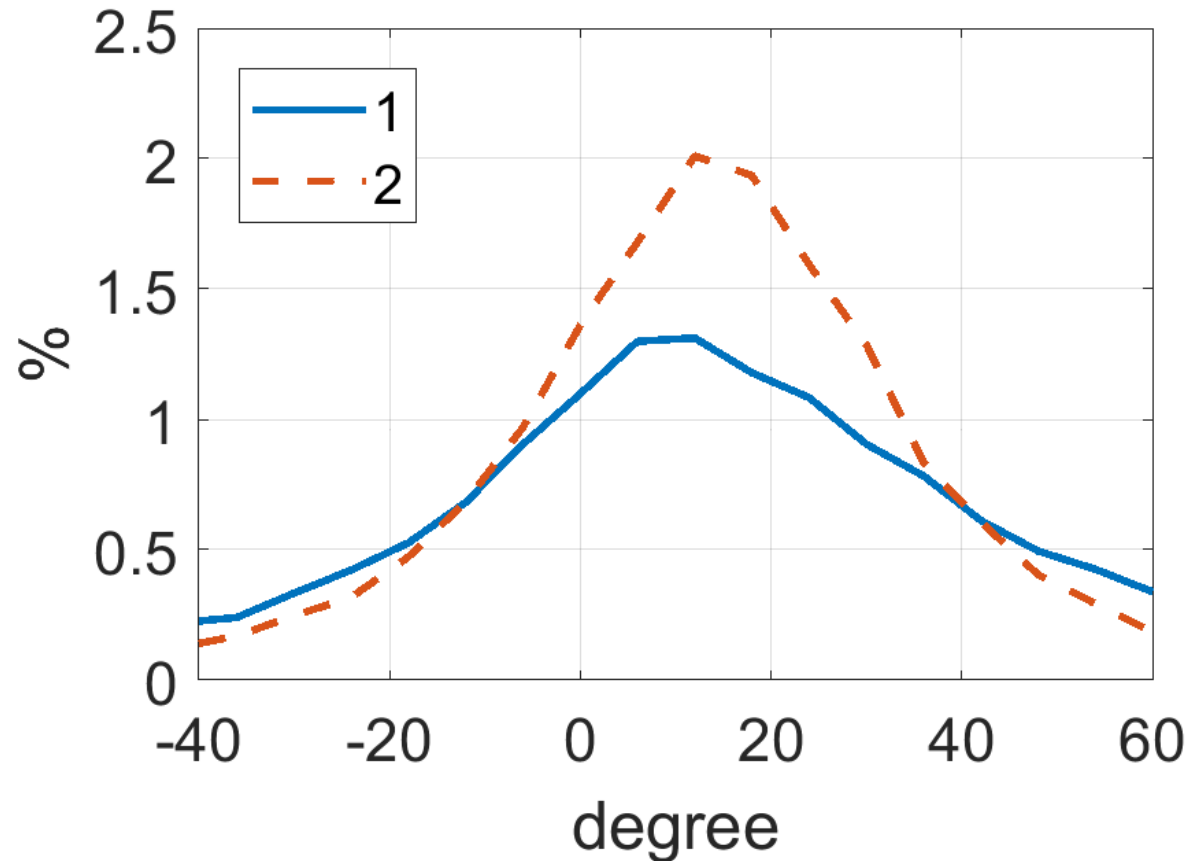
$$\begin{cases} \frac{d}{dz} \left[k(z) \frac{du}{dz} \right] = -l(v - v_g), \\ \frac{d}{dz} \left[k(z) \frac{dv}{dz} \right] = l(u - u_g), \end{cases} \quad (1)$$

где u, v – искомые горизонтальные компоненты ветра в пограничном слое, u_g, v_g – основной (геострофический) ветер, $z \in [0, H]$ – высота над поверхностью Земли, H_{\max} – высота пограничного слоя, $l = 1,45842 \cdot 10^{-4} \sin(\varphi) \text{ c}^{-1}$ – параметр Кориолиса, φ – широта, $k(z) > 0$ – коэффициент турбулентного обмена.

Граничные условия: $u(H) = u_g, v(H) = v_g, u(0) = 0, v(0) = 0$.

Если $k(z_0) = 0$ для некоторого $z_0 \in (0, H)$, то задача может не иметь решения

Распределение углов поворота ветра



1 – южнее 50° с.ш. средний угол поворота $\sim 14^{\circ}$

2 – севернее 50° с.ш. средний угол поворота $\sim 19^{\circ}$

Если $k(z) = const$, то согласно (1) угол поворота ветра в ПСА равен 45°

Задача: найти $k(z)$, возможно зависящий от параметров атмосферы

Обобщенная модель Аккерблома-Экмана

Модель (1) инвариантна относительно группы поворотов вокруг вертикальной оси.

Будем так же рассматривать модифицированную систему

$$\begin{cases} \frac{d}{dz} \left[\gamma(z) \sin(\varphi) \frac{dv}{dz} + k(z) \frac{du}{dz} \right] = -l(v - v_g), \\ \frac{d}{dz} \left[k(z) \frac{dv}{dz} - \gamma(z) \sin(\varphi) \frac{du}{dz} \right] = l(u - u_g), \end{cases} \quad (2)$$

в которой коэффициент $\gamma(z)$ играет роль регуляризатора. Так как только матрицы вида $\begin{pmatrix} \gamma & -k \\ k & \gamma \end{pmatrix}$ перестановочны с группой поворотов плоскости **SO(2)**,

т. е. дифференциальный оператор второго порядка только такого вида инвариантен относительно поворотов системы координат вокруг вертикальной оси.

Задача (2) теряет решение только если $k(z_0) = \gamma(z_0) \sin \varphi = 0$ для некоторого $z_0 \in (0, H)$

Интегрирование

При измерениях скорость ветра определяется дифференцированием координат зонда: $u(t, x, y, z) = d_t x = d_z x \cdot d_t z$, $v(t, x, y, z) = d_t y = d_z y \cdot d_t z$. Численное дифференцирование дискретно заданных функций, может приводить к шумам.

Чтобы уменьшить порядок дифференцирования, проинтегрируем по вертикальной переменной систему (2) и получим:

$$\begin{cases} \gamma(z) \sin(\varphi) \frac{dv}{dz} + k(z) \frac{du}{dz} = -l \int_0^z (v - v_g) dz + c_1, \\ k(z) \frac{dv}{dz} - \gamma(z) \sin(\varphi) \frac{du}{dz} = l \int_0^z (u - u_g) dz + c_2, \end{cases} \quad (3)$$

где $c_{1,2}$ – константы интегрирования.

По заданному профилю ветра $\langle u(z), v(z) \rangle$ не всегда можно найти такие функции $k(z)$ и $\gamma(z)$, чтобы были выполнены уравнения (3). В частности, если при каком-то z_1 выполнено $\frac{d}{dz} u(z_1) = \frac{d}{dz} v(z_1) = 0$ и $\langle u(z_1), v(z_1) \rangle \neq \langle u_g, v_g \rangle$, то никакие $k(z)$ и $\gamma(z)$ не смогут удовлетворить системе (3): левые части будут равны нулю, а правые будут линейными функциями с ненулевой производной.

Минимизируемый функционал

Предположим, что величины $k(z)$ и $\gamma(z)$ не зависят от времени и горизонтальных переменных, т. е. являются универсальными функциями. Тогда по данным N вертикальных профилей ветра, будем искать $k(z)$ и $\gamma(z)$ как функции (возможно, зависящие от высоты и параметров атмосферы), минимизирующие среднюю невязку системы уравнений (3) по N профилям:

$$L(k(z), \gamma(z), c_{j1}, c_{j2}) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{1}{H_j} \int_0^{H_j} \left(k(z) \frac{du_j}{dz} + \gamma(z) \sin(\varphi) \frac{dv_j}{dz} + l \int_0^z (v_j - v_{g,j}) dz - c_{j1} \right)^2 + \left(k(z) \frac{dv_j}{dz} - \gamma(z) \sin(\varphi) \frac{du_j}{dz} - l \int_0^z (u_j - u_{g,j}) dz - c_{j2} \right)^2 dz, \quad (4)$$

где j – номер профиля. Задача минимизации $L(k(z), \gamma(z), c_{j1}, c_{j2})$ легко сводится к задаче квадратичного программирования, при этом можно обеспечить выполнение дополнительных соотношений, например, $k(z) > 0$. Интегралы по z заменяются суммами по уровням наблюдений $\{z_i\}_{i=1}^{M_j}$ для данного зонда с номером j .

Толщина пограничного слоя

Толщину пограничного слоя, оцениваем, решая уравнение

$$\Theta(H) = \Theta_v(0), \quad (6)$$

где Θ - потенциальная температура и Θ_v - потенциальная виртуальная температура.

Рассматривались случаи, когда пограничный слой имел толщину более 100м (т.е. уравнение (6) имеет соответствующее решение). Это выполнялось в 62% случаев. Вертикальное разрешение наших данных (~20м) не позволяет находить качественные оценки при более тонких слоях.

Таким образом, найденные оценки могут быть не универсальными для использования в прогностической модели, однако они, по-прежнему, важны для понимания физики турбулентных явлений в пограничном слое.

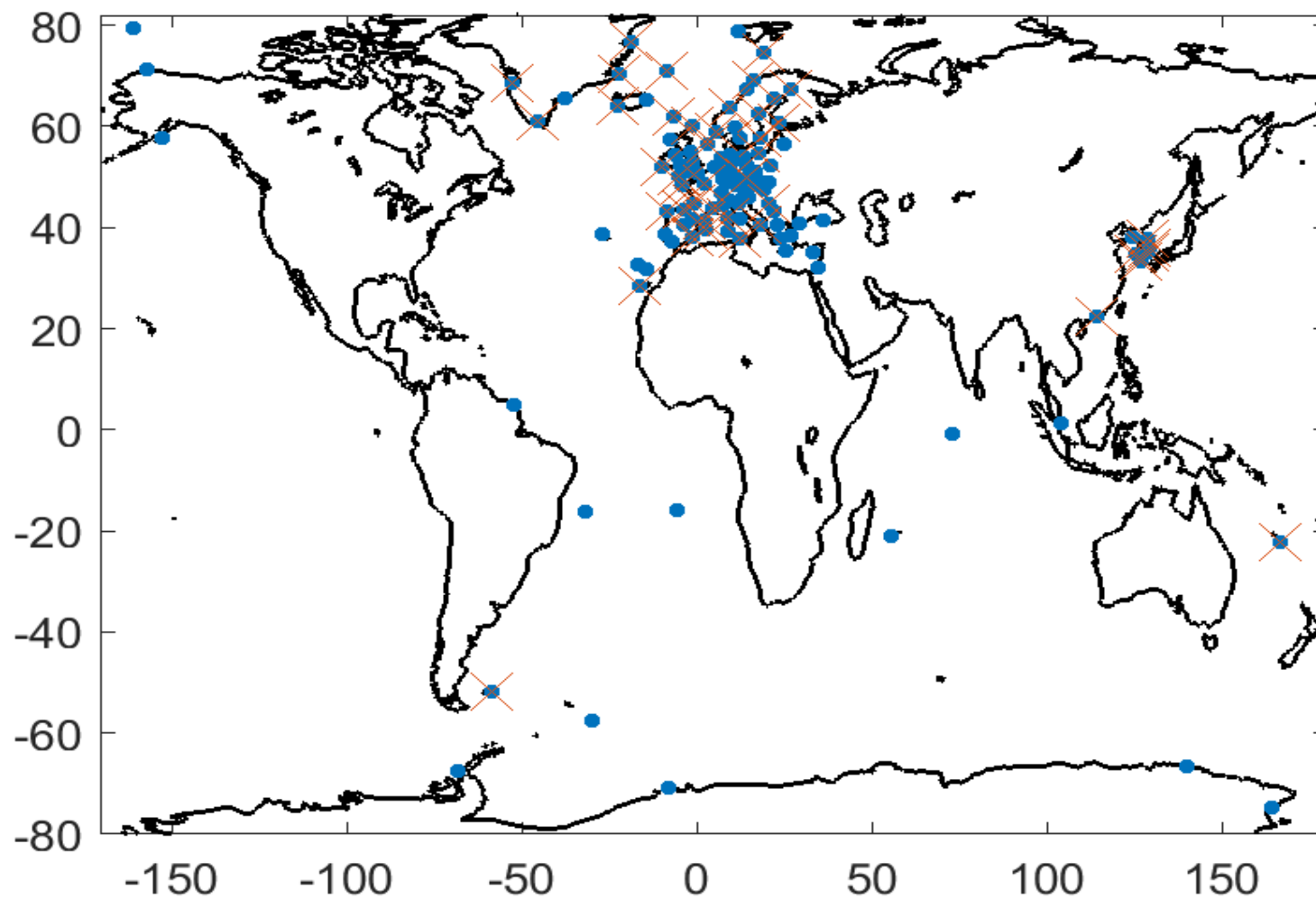
Число Ричардсона

Число Ричардсона вычисляется по формуле

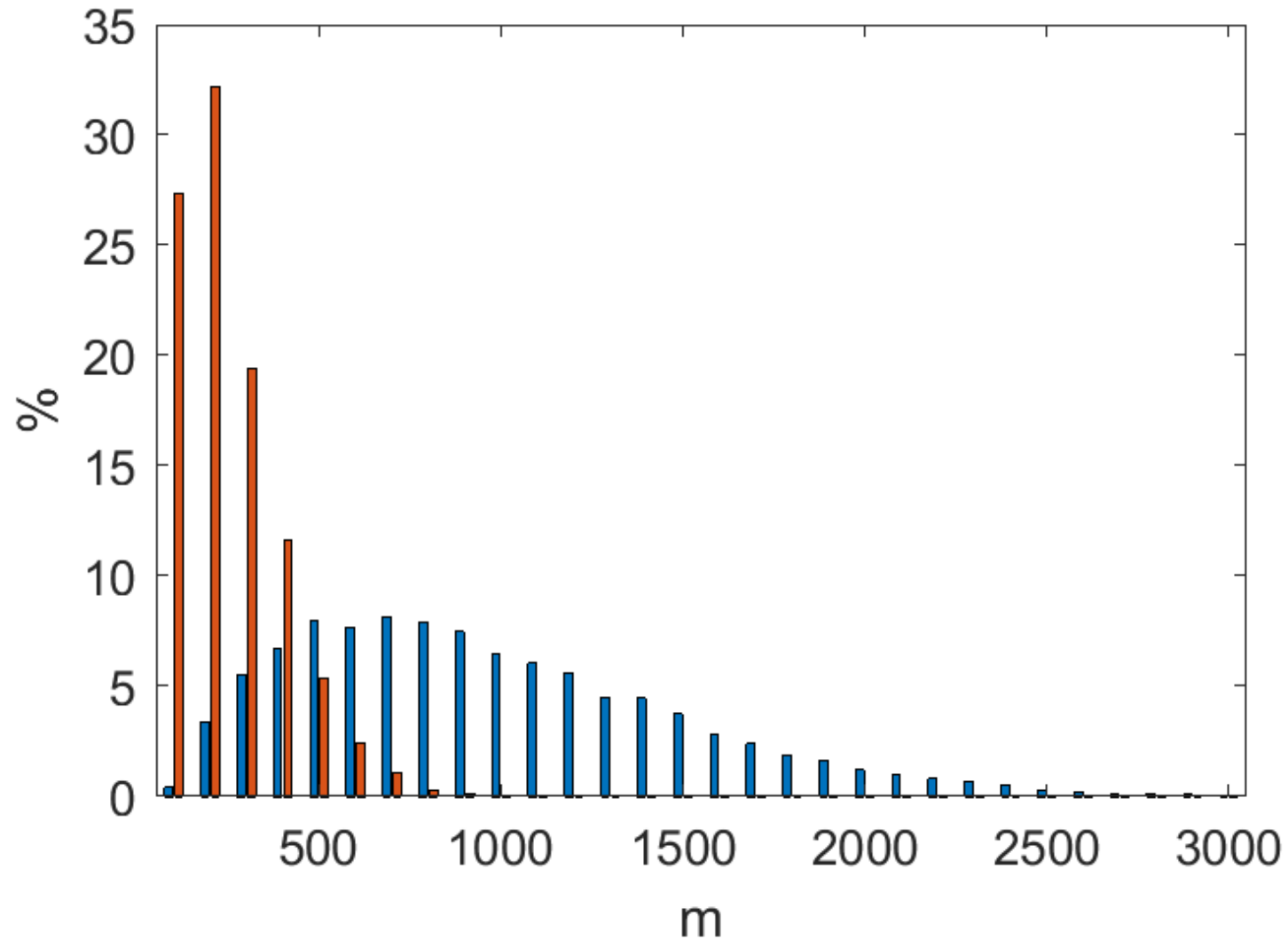
$$Ri(z) = \frac{g}{\Theta} \frac{\frac{\partial \Theta}{\partial z}}{\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2}. \quad (7)$$

Числа $Ri > Ri_c = 0.25$ соответствуют устойчивой стратификации, $Ri < Ri_c$ - неустойчивой, $Ri < 0$ - сильно неустойчивой (существует слой инверсии).

Расположение станций, присылающих данные BUFR высокого разрешения



Распределение толщин пограничного слоя



Синие – профили с неустойчивой стратификацией. Красные – с устойчивой

Данные радиозондирования в коде BUFR

Всего за период с 4 апреля 2018 по 29 августа 2019 получены данные с 182232 зонда в коде BUFR (~200 зондов в срок), из них 54383 – разрешение лучше 40м в 0-1000м и изменчивость ветра в погранслое более 2.5м/с. Далее будем рассматривать подвыборки:

1. Full : $N=34692$ профилей с толщиной $H_j \in [100m; 3000m]$;
2. Deep: $N=10903$ профилей с толщиной $H_j \in [1000m; 3000m]$;
3. Thin: $N=16025$ профилей с толщиной $H_j \in [100m; 500m]$;
4. Stable: $N=11390$ профилей с $Ri(z) > 0.3$ для всех $z \in [0; H_j]$;
5. Unstable: $N=18495$ профилей с $Ri(z_0) < 0.2$ для некоторого $z_0 \in [0; H_j]$.

Постановка задачи квадратичного программирования

Будем искать $k(z)$ и $\gamma(z)$ как кусочно-линейные функции одной переменной $k(z) = k(S(z))$ и $\gamma(z) = \gamma(S(z))$ от некоторого параметра атмосферы $S(z)$. S может быть любым параметром атмосферы, который можно вычислить по данным радиозонда, меняющимся с высотой и (или) от профиля к профилю. Например, высота, разность потенциальных температур, сдвиг ветра и т.д.

Будем искать значения $K_i = k(S_i)$ и $G_i = \gamma(S_i)$, где S_i – регулярная дискретная сетка из D точек, покрывающая все возможные значения S , значения $k(S)$, $\gamma(S)$ в других точках будем вычислять линейной интерполяцией.

Вместо оптимизации функционала (4) будем численно оптимизировать квадратичную функцию от $2D + 2N$ переменных:

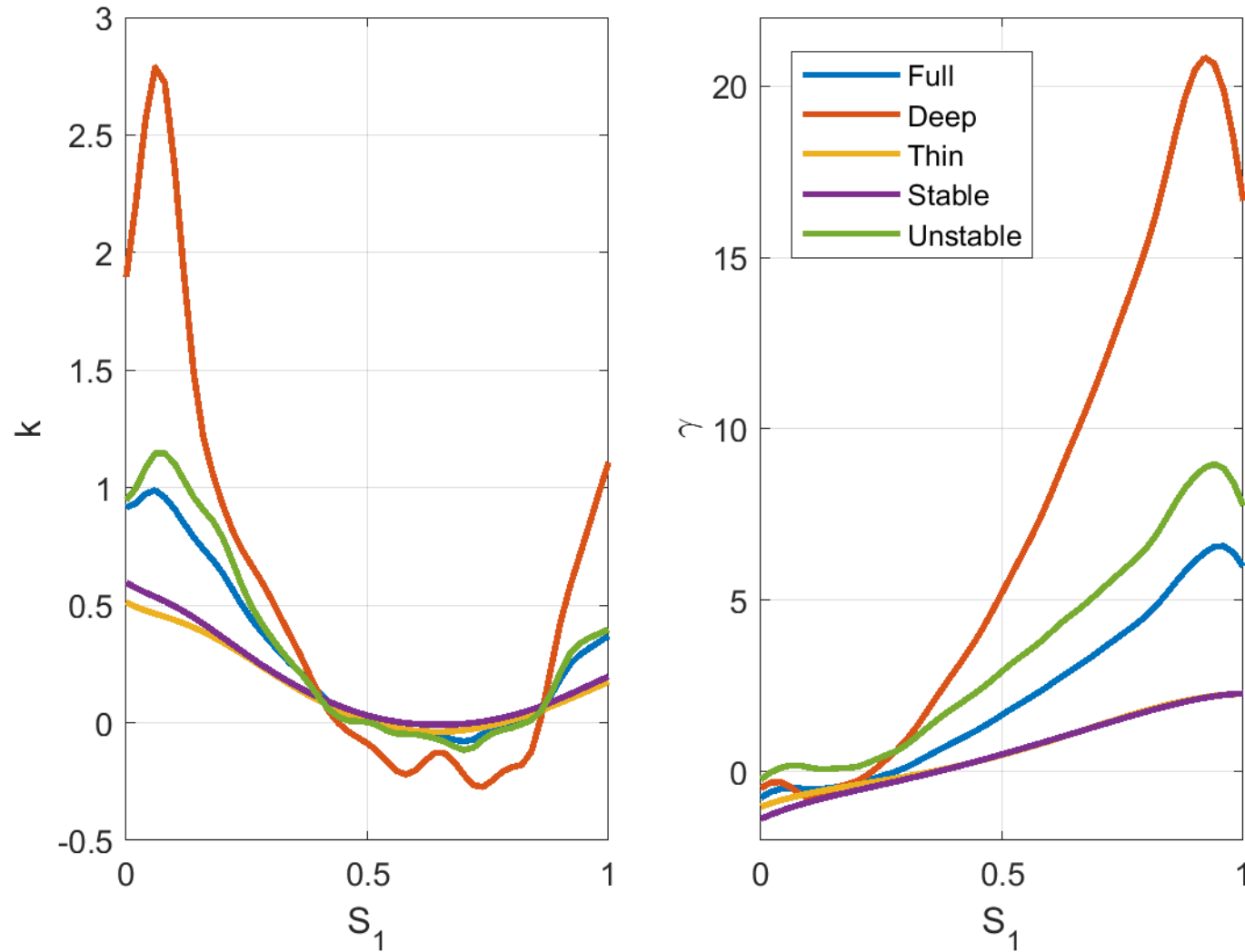
$$\begin{aligned}
 L_s(K_i, G_i, c_{j1}, c_{j2}) = & \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sum_q \left(\left(k(S_j(z)) \frac{d\tilde{u}_j}{dz} + \gamma(S_j(z)) \sin(\varphi_j) \frac{d\tilde{v}_j}{dz} + l_j \int_0^{\tilde{v}_j} (\tilde{v}_j - v_{g,j}) dz \right) \Big|_{z=z_{qj}} - c_{j1} \right)^2 + \\
 & + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sum_q \left(\left(k(S_j(z)) \frac{d\tilde{v}_j}{dz} - \gamma(S_j(z)) \sin(\varphi_j) \frac{d\tilde{u}_j}{dz} - l_j \int_0^{\tilde{u}_j} (\tilde{u}_j - u_{g,j}) dz \right) \Big|_{z=z_{qj}} - c_{j2} \right)^2 + \\
 & + \frac{\alpha}{(D-2)^2} \sum_{i=2}^{D-1} \left[(K_{i-1} - 2K_i + K_{i+1})^2 + (G_{i-1} - 2G_i + G_{i+1})^2 \right] + \frac{\omega}{N} \sum_{j=1}^N [c_{j1}^2 + c_{j2}^2],
 \end{aligned} \tag{8}$$

где $\alpha = 10c^{-1}$, $\omega = 10^{-10}$ - параметры регуляризации.

Слагаемые в последней строке формулы (8) играют роль регуляризатора экстремальной задачи. Введение слагаемого с положительным коэффициентом α ограничивает изменчивость найденных функций $k(S)$, $\gamma(S)$ а слагаемое с малым положительным коэффициентом ω обеспечивает строгую положительную определенность квадратичного функционала L_s , а значит и единственность решения задачи минимизации.

Задача минимизации (8) является задачей квадратичного программирования размерности $2D + 2N$ с матрицей ковариаций, имеющей до $8DN + o(DN)$ ненулевых элементов, для точного решения (8) при $N \gg D$ потребуется $O(ND^2)$ арифметических операций.

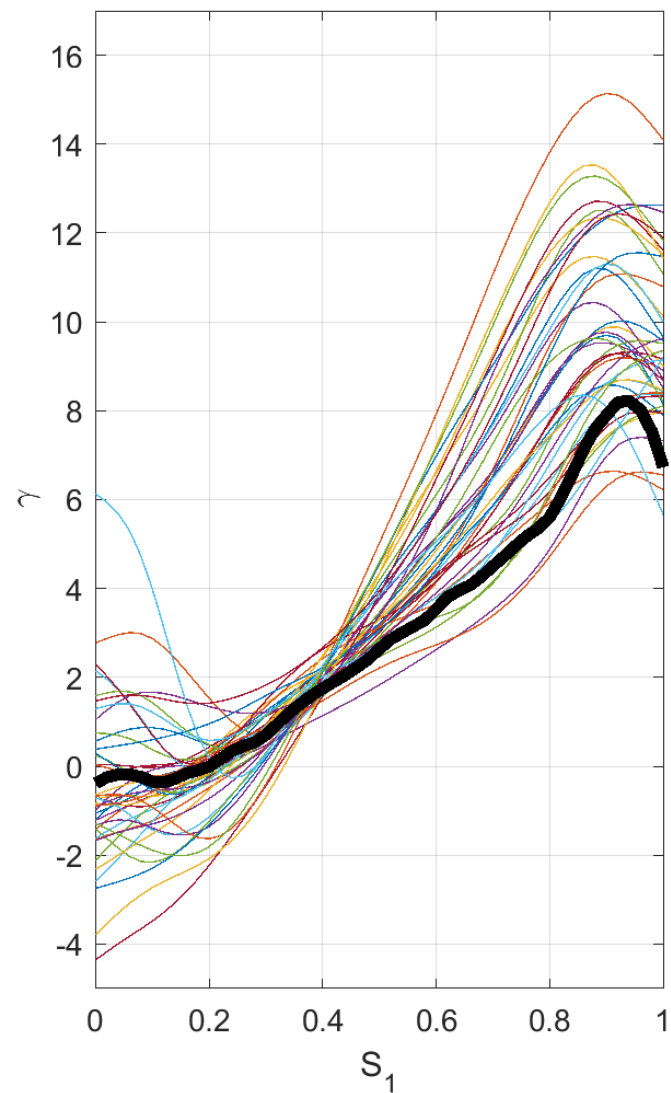
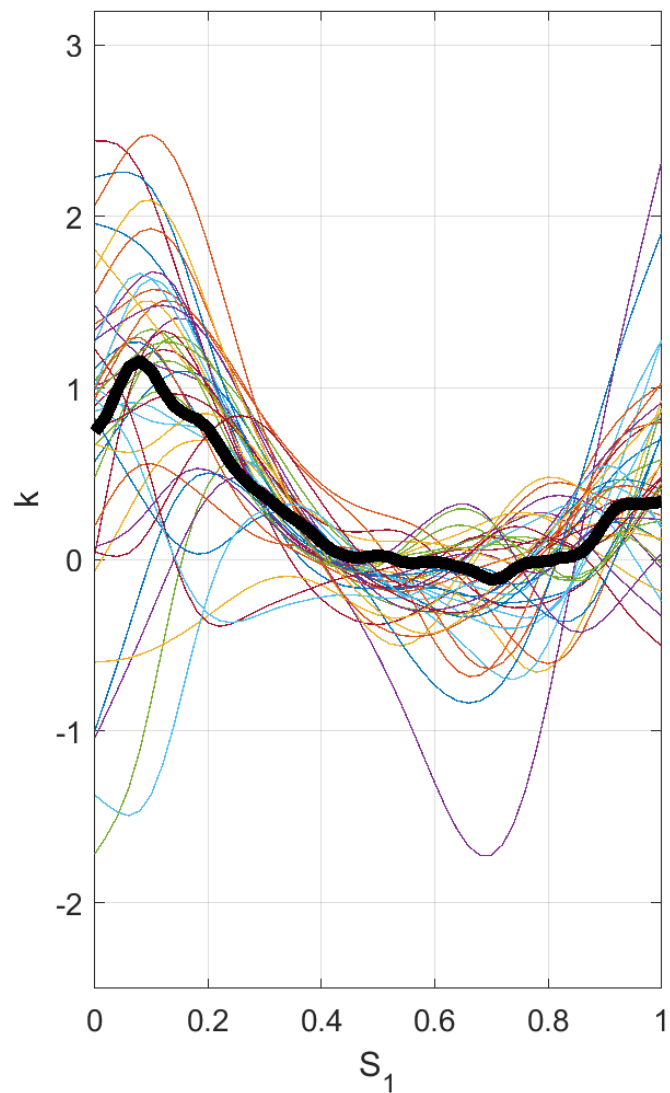
Результаты оптимизации в зависимости от относительной высоты z/H



Введем нормированные коэффициенты:

$$\tilde{k} = k \cdot \frac{H_j}{1000m}, \quad \tilde{\gamma} = \gamma \cdot \frac{H_j}{1000m}$$

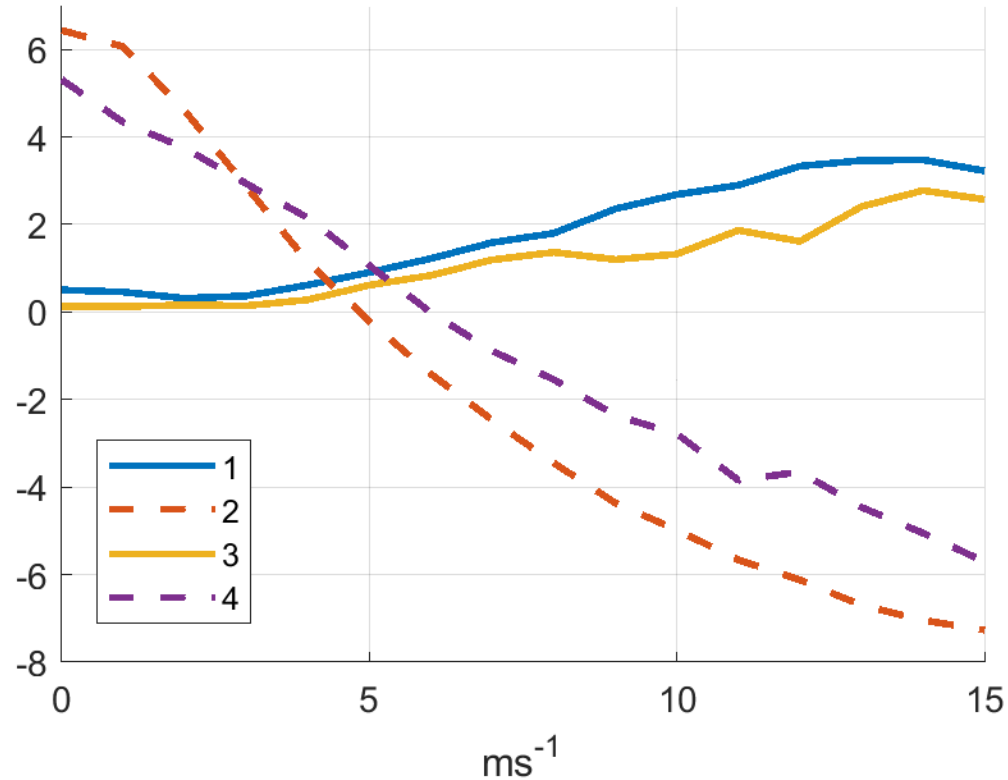
Отдельно для 43 станций (более 400 профилей с каждой)



Жирные кривые – по всем профилям

В зависимости от сдвига ветра

$$S_2 = shear(z) = \sqrt{(u(z) - u_g)^2 + (v(z) - v_g)^2}$$

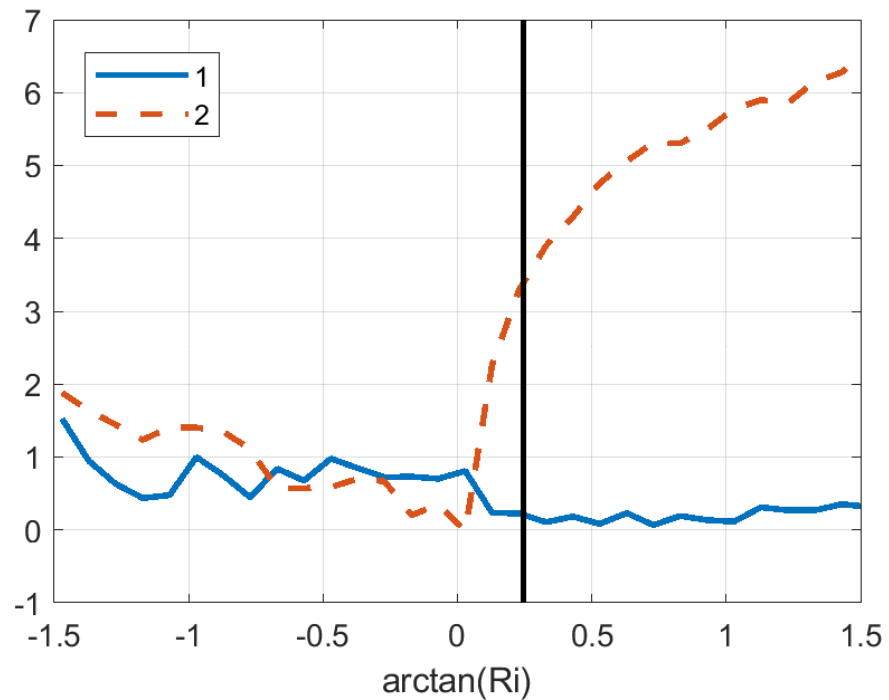


1, 3 – $\tilde{k}(S_2)$	2, 4 – $\tilde{\gamma}(S_2)$	1, 2 – Stable	3, 4 – Unstable
-------------------------	------------------------------	---------------	-----------------

При устойчивой и неустойчивой стратификациях получаем почти одинаковые зависимости

В зависимости от числа Ричардсона Ri

$$S_3 = \arctan(Ri)$$



1 — $\tilde{k}(S_3)$, 2 — $\tilde{\gamma}(S_3)$. Вертикальная линия $Ri = Ri_c = 0.25$.

Оценки

	Коэффициенты	k, γ	$k > 0$	$\tilde{k}, \tilde{\gamma}$	$\tilde{k} > 0$
	Параметр(ы) S	Корреляций левой и правой части (3)			
Full	Относительная высота	34.7%	10.4%	39.3%	9.9%
Stable		64.8%	26.3%	76.5%	30.5%
Unstable		37.4%	9.0%	38.4%	8.4%
Full	Сдвиг ветра	31.6%	10.3%	35.6%	11.0%
Stable		61.8%	28.5%	68.8%	33.3%
Unstable		33.0%	9.3%	33.6%	8.9%
Full	Число Ричардсона Ri	28.1%	9.7%	32.4%	8.8%
Stable		38.9%	24.4%	45.6%	28.8%
Unstable		31.5%	8.4%	32.9%	7.6%
Full	Относительная высота и сдвиг ветра	37.0%	11.0%	42.1%	11.4%
Stable		68.0%	29.4%	79.2%	34.0%
Unstable		39.2%	9.8%	40.1%	9.4%
Full	Относительная высота и Ri	36.0%	10.5%	40.6%	9.9%
Stable		65.3%	27.3%	77.5%	31.2%
Unstable		38.4%	9.1%	39.3%	8.4%

Выводы

Предложен эффективный метод оценки параметров турбулентного обмена в зависимости от параметров атмосферы, сводящий задачу к задаче квадратичного программирования.

При добавлении в модель Аккерблома-Экмана дополнительного коэффициента турбулентного обмена γ :

1. Проще обеспечить существование и единственность решения
2. Корреляция с данными измерений более чем удваивается
3. Второй дополнительный коэффициент γ по величине как правило больше первого коэффициента k

Работа была поддержана грантом № 18-05-0011 в рамках Программы «Научный фонд Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» (НИУ ВШЭ)» 2018 - 2019 гг. и в рамках государственной поддержки ведущих университетов Российской Федерации "5-100".

Литература

- 1.Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. т.1, Гидрометеоиздат, Л.: 1992, т.2, 1996, М.: Наука.
- 2.Лайхтман Д.Л. (ред.) Динамическая метеорология Гидрометеоиздат, Л.: 1976.
- 3.P L.Bykov, V.A.Gordin. Big data and inverse problem for Ekman - Akerblom model. Research Activities in Atmospheric and Oceanic Modeling, 2018.

Спасибо за внимание!