

**Комплексный коэффициент турбулентного обмена и поворот
направления ветра в приземном слое атмосферы.
Вариационно-статистический подход**

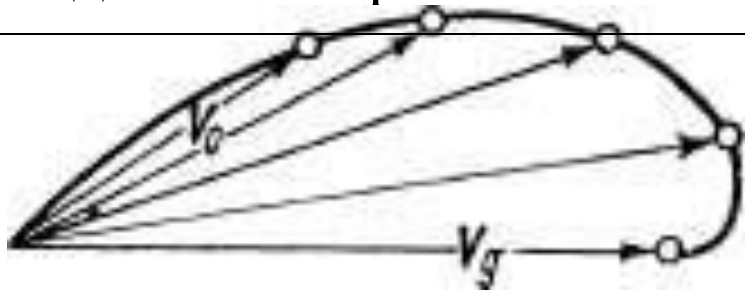
Ф.Л.Быков, В.А.Гордин

Модель Аккерблома - Экмана описывает стационарное решение уравнений газовой динамики в пограничном слое атмосферы (ПСА). Учитывает: турбулентность и силу Кориолиса. Примерные пространственные масштабы: 1 км по вертикали и 100км по горизонтали:

$$\begin{cases} \frac{d}{dz} \left[k(z) \frac{du}{dz} \right] = -l (v - v_g), \\ \frac{d}{dz} \left[k(z) \frac{dv}{dz} \right] = l (u - u_g), \end{cases} \quad (1)$$

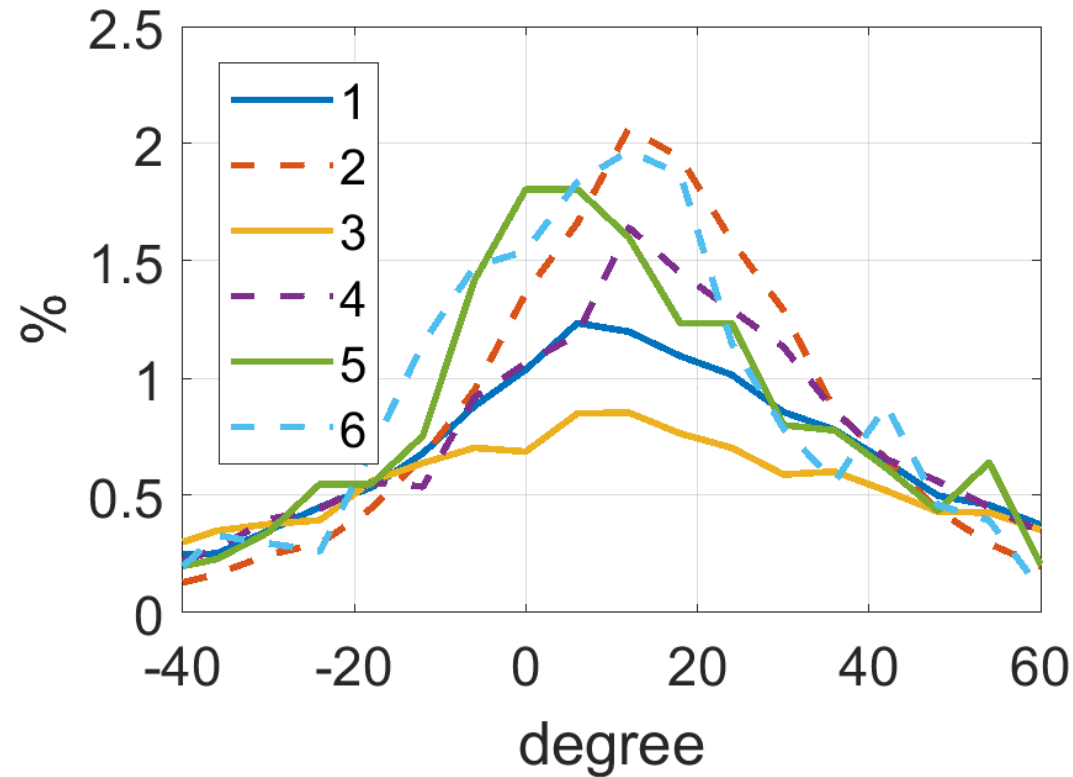
где u, v – искомые горизонтальные компоненты ветра в пограничном слое, u_g, v_g – основной (геострофический) ветер, $z \in [0, H]$ – высота над поверхностью Земли, H – толщина пограничного слоя, $l = 1,45842 \cdot 10^{-4} \sin(\varphi) \text{ c}^{-1}$ – параметр Кориолиса, φ – широта, $k(z) > 0$ – коэффициент турбулентного обмена.

Граничные условия: $u(H) = u_g, v(H) = v_g, u(0) = 0, v(0) = 0$. Если коэффициент $k(z_0) = 0$ для некоторого $z_0 \in (0, H)$, то задача может не иметь решения.



Если $k(z) = const$, то, согласно (1), угол поворота ветра в ПСА равен 45°

Распределение углов поворота ветра в ПСА



1, 3, 5 – южнее 50° с.ш. средний угол поворота $\sim 13^{\circ}$

2, 4, 6 – севернее 50° с.ш. средний угол поворота $\sim 19^{\circ}$

1, 2 – все профили, средний угол поворота $\sim 13-16^{\circ}$

3, 4 – ПСА более 1000м, средний угол поворота $\sim 12-15^{\circ}$

5, 6 – устойчивая стратификация, средний угол поворота $\sim 10^{\circ}$

Задача: найти наиболее согласующийся с измерениями коэффициент $k(z)$,

возможно зависящий от параметров атмосферы.

Обобщенная модель Аккерблома - Экмана

Модель (1) инвариантна относительно группы поворотов вокруг вертикальной оси. Будем так же рассматривать модифицированную систему

$$\begin{cases} \frac{d}{dz} \left[\gamma(z) \sin(\varphi) \frac{dv}{dz} + k(z) \frac{du}{dz} \right] = -l(v - v_g), \\ \frac{d}{dz} \left[-k(z) \frac{dv}{dz} + \gamma(z) \sin(\varphi) \frac{du}{dz} \right] = -l(u - u_g), \end{cases} \quad (2)$$

где $\gamma(z)$ играет роль регуляризатора, если $k(z)$ близко к 0. Мотивировка (2):

только матрицы вида $\begin{pmatrix} \gamma & -k \\ k & \gamma \end{pmatrix}$ перестановочны с группой поворотов плоскости

SO(2), т. е. линейный дифференциальный оператор второго порядка только такого вида инвариантен относительно поворотов системы координат вокруг вертикальной оси. Задача (2) теряет решение, только если $k(z_0) = \gamma(z_0) \sin \varphi = 0$ для некоторого $z_0 \in (0, H)$. В общем положении так не бывает!

Если обозначить $w = u + iv$ и $\kappa = k - i\gamma \sin(\varphi)$, где $i = \sqrt{-1}$, то (2) эквивалентна

$$\frac{d}{dz} \left[\kappa(z) \frac{dw}{dz} \right] = il(w - w_g).$$

Интегрирование системы по вертикали

При измерениях скорость ветра определяется дифференцированием координат зонда: $u(t, x, y, z) = d_t x = d_z x \cdot d_t z$, $v(t, x, y, z) = d_t y = d_z y \cdot d_t z$. Численное дифференцирование дискретно заданных функций, может приводить к шумам.

Чтобы уменьшить порядок дифференцирования, проинтегрируем по вертикальной переменной систему (2) и получим:

$$\begin{cases} \gamma(z) \sin(\varphi) \frac{dv}{dz} + k(z) \frac{du}{dz} = -l \int_0^z (v - v_g) dz + c_1, \\ k(z) \frac{dv}{dz} - \gamma(z) \sin(\varphi) \frac{du}{dz} = l \int_0^z (u - u_g) dz + c_2, \end{cases} \quad (3)$$

где $c_{1,2}$ – константы интегрирования.

По заданному профилю ветра $\langle u(z), v(z) \rangle$ не всегда можно найти такие функции $k(z)$ и $\gamma(z)$, чтобы были выполнены уравнения (3). В частности, если при каком-то z_1 выполнено $u'(z_1) = v'(z_1) = 0$ и $\langle u(z_1), v(z_1) \rangle \neq \langle u_g, v_g \rangle$, то никакие $k(z)$ и $\gamma(z)$ не смогут удовлетворить (3).

Интегрирование по вертикали в комплексной форме

Эквивалентная запись зависимости сноса зонда по горизонтали от вещественной вертикальной координаты z в комплексной форме:

$$\kappa(z) \frac{dw}{dz} = -\psi + c, \frac{d\psi}{dz} = il(w_g - w), \quad (4)$$

где константу $c \in \mathbb{C}$ для удобства выберем так, чтобы $\int_0^H \psi(z) dz = 0$.

При $\kappa(z) = const$:

1. Характеристические значения системы $\pm \sqrt{il/\kappa}$,

Решение задачи Коши ограничено при $z \rightarrow +\infty$ если и только если $k = 0, \gamma > 0$

2. угол поворота ветра $\arg \sqrt{\frac{i}{\kappa}} = \frac{1}{2} \operatorname{atan} \frac{k}{\gamma \sin \varphi}$,

Средний наблюдаемый угол поворота $10-20^\circ$ достигается при $\gamma \sin \varphi / k \approx 1.2 - 2.7$

Минимизируемый функционал

Предположим, что $\kappa(z)$ не зависит от времени и горизонтальных переменных, т. е. являются универсальными функциями. Тогда по данным N вертикальных профилей ветра, будем искать $\kappa(z)$ как функцию (возможно, зависящую от высоты и параметров атмосферы), минимизирующую среднюю невязку уравнения (4) по N профилям:

$$L(\kappa(z), c_j) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{1}{W_j} \int_0^{H_j} \left| \kappa(z) \frac{dw_j}{dz} + \psi(z) - c_j \right|^2 dz \rightarrow \min_{\kappa(z), \{c_j\}},$$

где j – номер профиля, $W_j = \int_0^{H_j} |\psi(z)|^2 dz$. При такой нормировке получаем

$\min_{c_j} L(0, c_j) = 1$. Минимум функционала обозначим $0 < \Lambda < 1$.

Величина $100\% (1 - \Lambda)$ имеет смысл среднего коэффициента детерминации.

Задача минимизации $L(\kappa(z), c_j)$ легко сводится к задаче квадратичного программирования, при этом можно обеспечить выполнение дополнительных соотношений, например, $\kappa(z) > 0$. Интегралы по z заменяются суммами по уровням наблюдений $\{z_i\}_{i=1}^{M_j}$ для данного зонда с номером j .

Толщина погранслоя

Толщину H оцениваем, решая уравнение

$$\Theta(H) = \Theta_v(0), \quad (5)$$

где Θ – потенциальная температура и Θ_v – потенциальная виртуальная температура. Это максимальная высота, на которую водяной пар с поверхности Земли может подняться адиабатически.

Рассматриваем профили ветра в коде BUFR, удовлетворяющие условиям:

1. Дискретность измерений ветра 0.1 м/с
2. Как минимум 25 измерений в слое 0-1000 м
3. Пограничный слой более 100 м. Вертикальное разрешение наших данных (~20 м) не позволяет находить качественные оценки модели при более тонких слоях
4. Изменчивость скорости ветра в ПСА более 2.5 м/с

Из **234905** профилей по этим условиям отобрали **33806** профиля (14.4%)

Таким образом, найденные оценки могут быть не универсальными для использования в прогностической модели, однако они, по-прежнему, важны для понимания физики турбулентных явлений в пограничном слое.

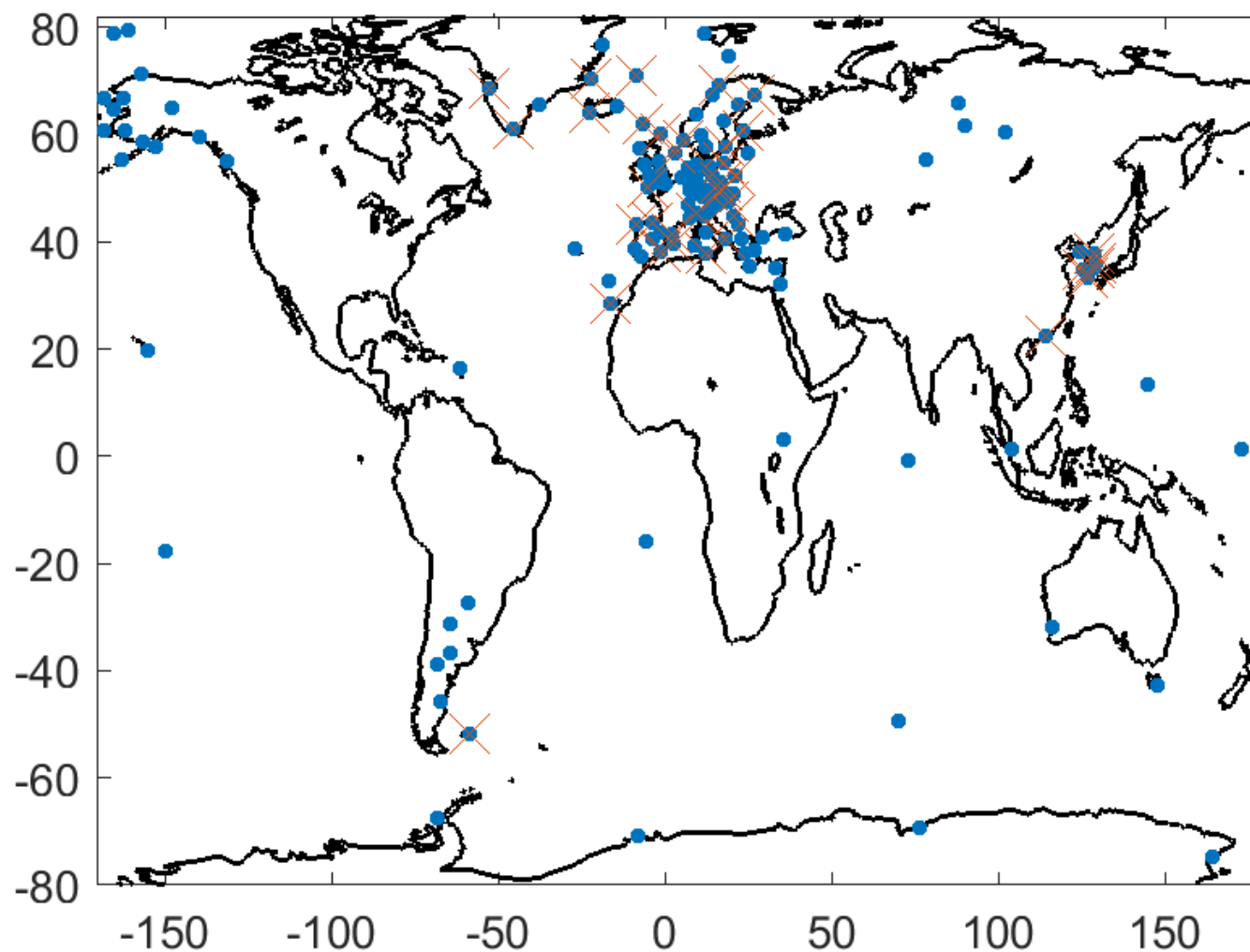
Число Ричардсона

Число Ричардсона (точнее функция) вычисляется по формуле

$$Ri(z) = \frac{g}{\Theta} \frac{\frac{\partial \Theta}{\partial z}}{\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2}. \quad (7)$$

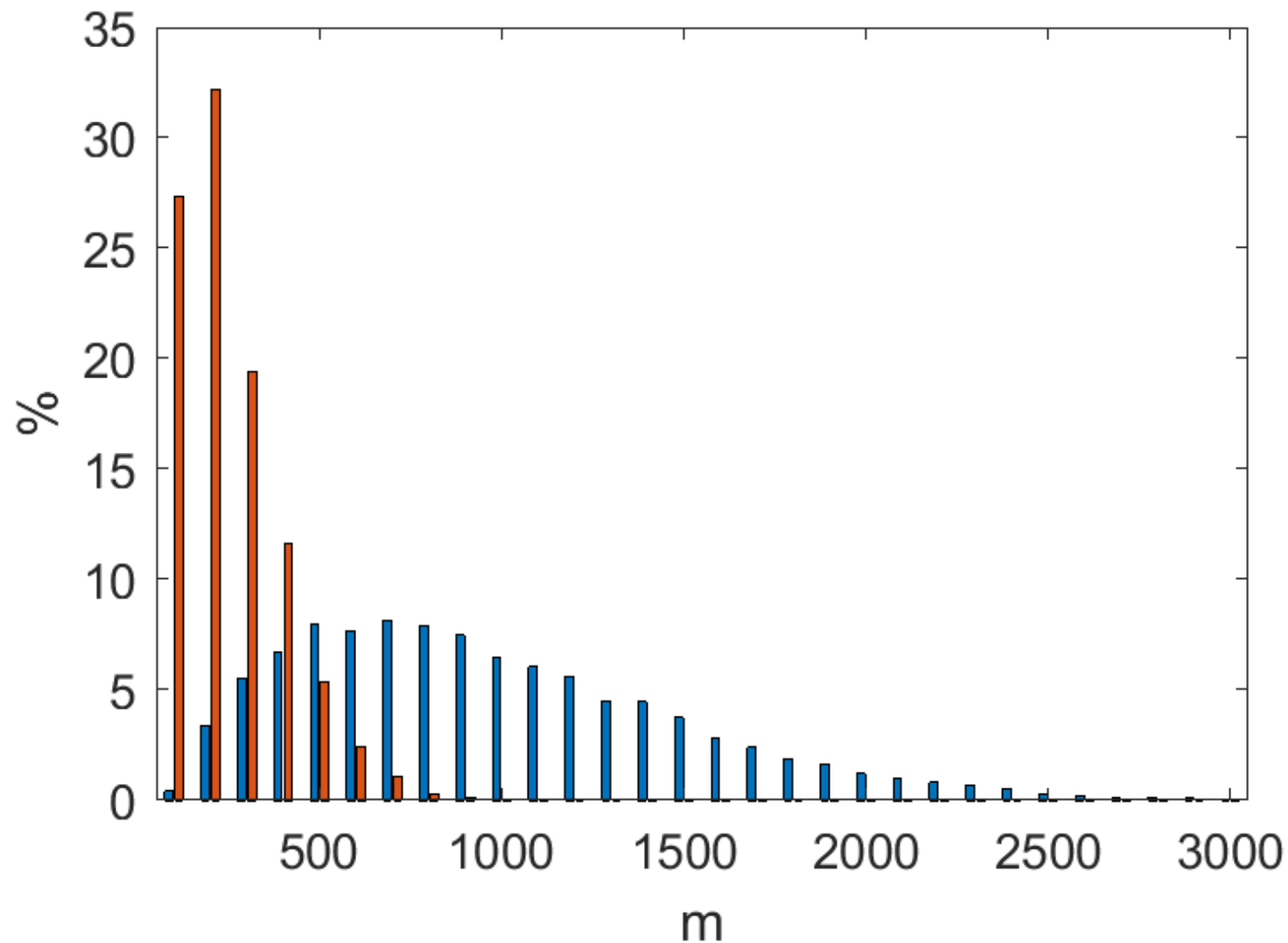
Значения $Ri > Ri_c = 0.25$ соответствуют устойчивой стратификации, $Ri < Ri_c$ – неустойчивой, $Ri < 0$ – сильно неустойчивой (существует слой инверсии).

Расположение станций, с которых доступны данные BUFR высокого разрешения



Крестиком помечены станции с большим (>400) числом запусков

Распределение толщин пограничного слоя



Синие – профили с неустойчивой стратификацией. Красные – с устойчивой

Подвыборки

Название подвыборки	Дополнительное условие	Кол-во профилей N	Толщина H_j
Full	Нет	33806	671±516m
Deep	$H_j > 1000m$	10409	1592±454m
Thin	$H_j < 500m$	15622	270±115m
Stable	$Ri(z) > 0.3$ для всех $z \in [0; H_j]$	3168	201±105m
Unstable	$Ri(z_0) < 0.2$ в некоторой $z_0 \in [0; H_j]$	29449	742±517m

Постановка задачи квадратичного программирования

Будем искать $\kappa(z)$ как кусочно-линейные функции одной переменной $\kappa(z) = \kappa(S(z))$ от некоторого параметра атмосферы $S(z)$. S – любой параметр атмосферы, который можно вычислить по данным радиозонда. Например, высота, разность потенциальных температур, сдвиг ветра и т.д.

Будем искать значения $K_i = \kappa(S_i)$, где S_i – регулярная дискретная сетка из M точек, покрывающая все возможные значения S , значения $\kappa(S)$, $\gamma(S)$ в других точках будем вычислять линейной интерполяцией.

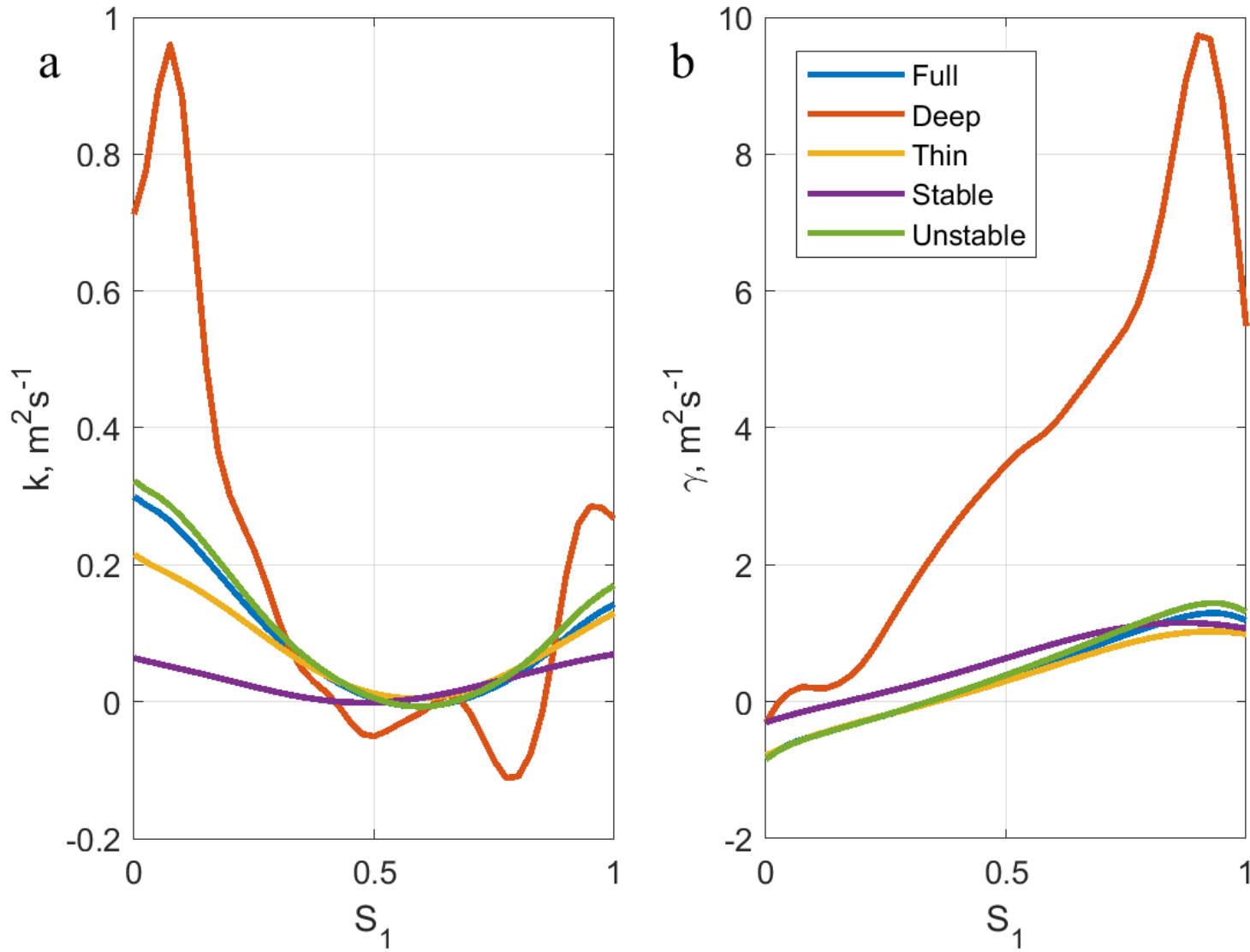
Вместо оптимизации функционала (4) будем численно минимизировать квадратичную функцию от $M + N$ комплексных переменных:

$$L_s(K_i, c_j) = \sum_{j=1}^N \frac{1}{W_j} \sum_q \left| \left(\kappa(S_j(z)) \frac{d\tilde{w}_j}{dz} + \psi_j \right) \Big|_{z=z_{qj}} - c_j \right|^2 + \alpha \sum_{i=2}^{D-1} \left| \frac{K_{i-1} - 2K_i + K_{i+1}}{D-2} \right|^2 + \frac{\omega}{N} \sum_{j=1}^N |c_j|^2 \quad (8)$$

где $\alpha = 10c^{-1}$, $\omega = 10^{-10}$ – параметры регуляризации. Слагаемое с α ограничивает изменчивость $\kappa(S)$, а слагаемое с ω обеспечивает строгую положительную определенность квадратичного функционала L_s , а значит и единственность решения задачи минимизации.

Задача минимизации (8) является задачей квадратичного программирования (действительной) размерности $2M + 2N$ с матрицей ковариаций, имеющей до $8MN + o(MN)$ ненулевых элементов, для точного решения (8) при $N \gg M$ потребуется $O(NM^2)$ арифметических операций.

Результаты оптимизации в зависимости от относительной высоты $S_1=z/H$

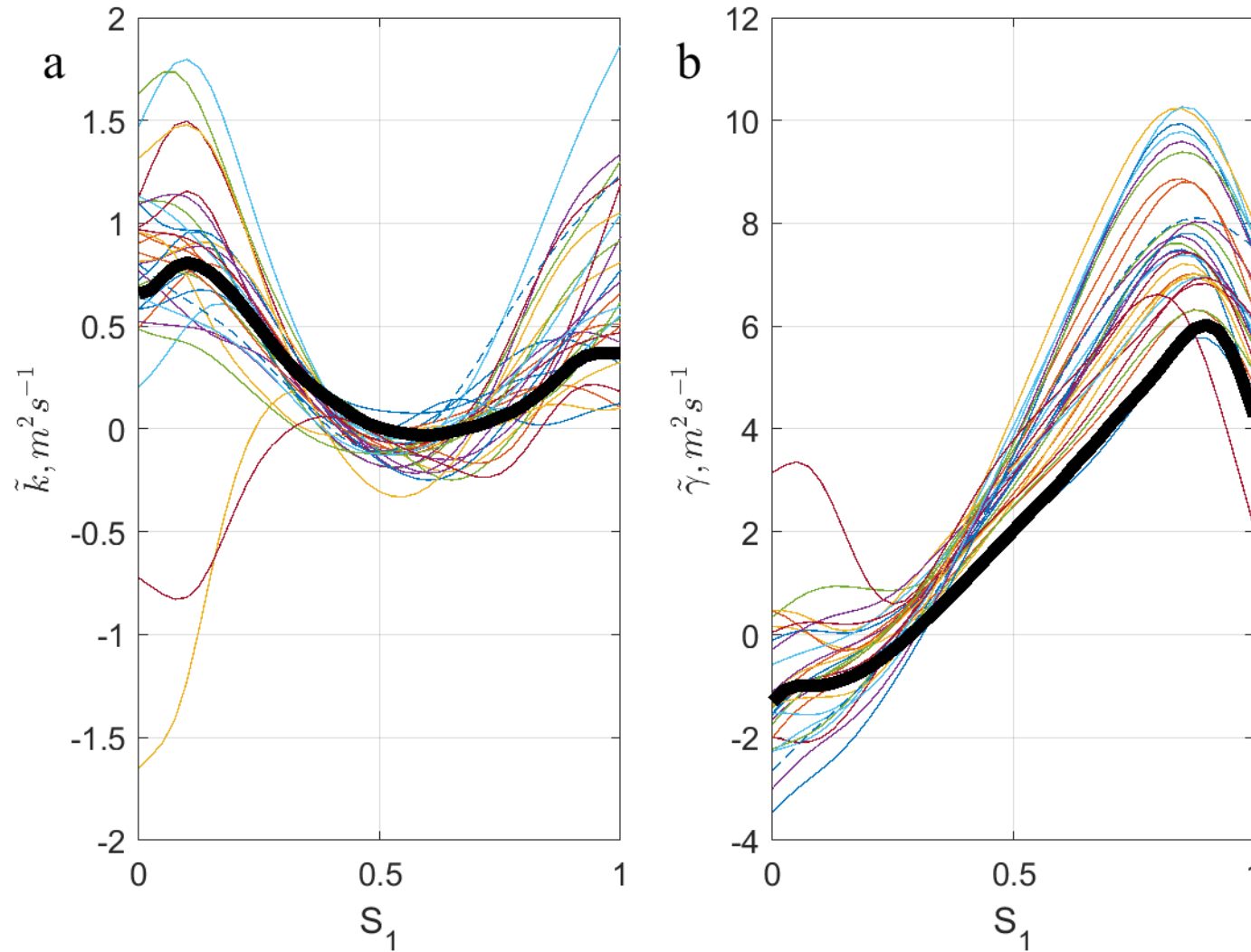


Далее используем нормированные коэффициенты: $\tilde{k} = k \cdot \frac{H_j}{1000m}$, $\tilde{\gamma} = \gamma \cdot \frac{H_j}{1000m}$

Отдельно для 28 станций (более 400 профилей с каждой)

a) the real part $\tilde{k}(S_1)$,

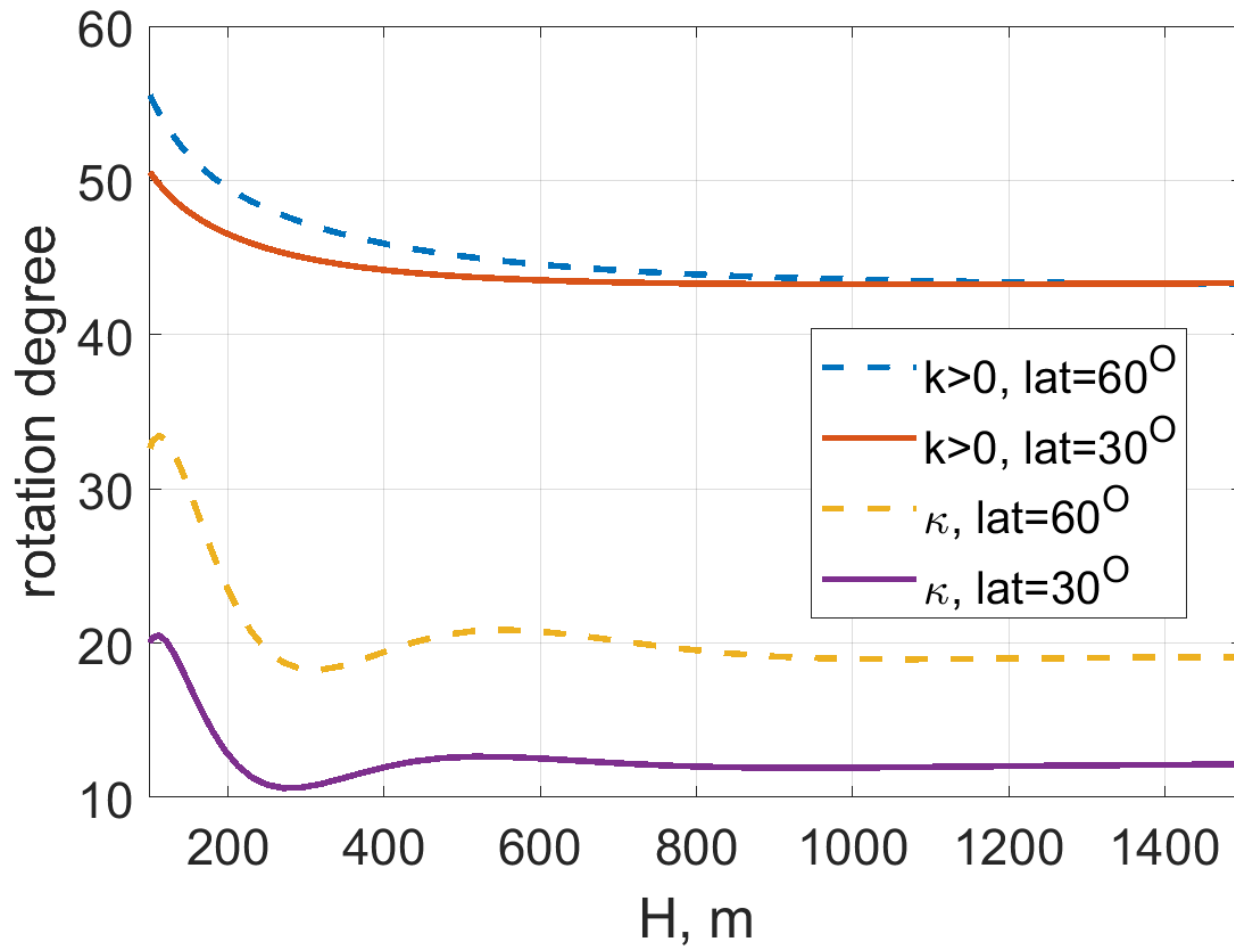
b) the imaginary part $\tilde{\gamma}(S_1)$.



Жирные кривые – средние по всем профилям. Пунктир – станция в Южном полушарии.

Угол поворота ветра в зависимости от высоты

В случае $\tilde{\kappa} = \tilde{\kappa}(z/H)$ угол поворота зависит только от толщины H и географической широты:



Примеры профилей ветра

Красные точки –
измеренные

зондом значения

Синие линии

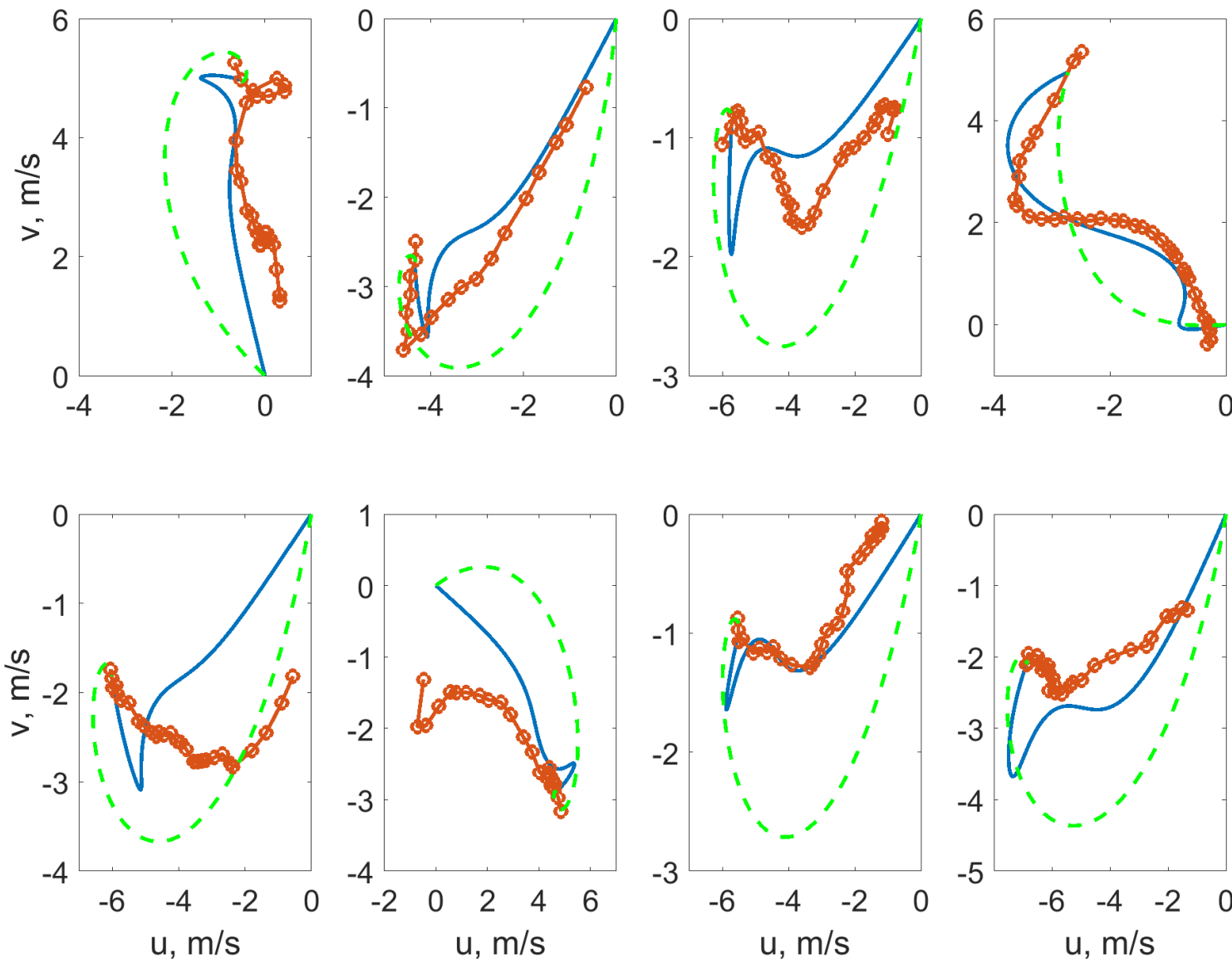
согласно модели с

комплексным $\tilde{\kappa}$

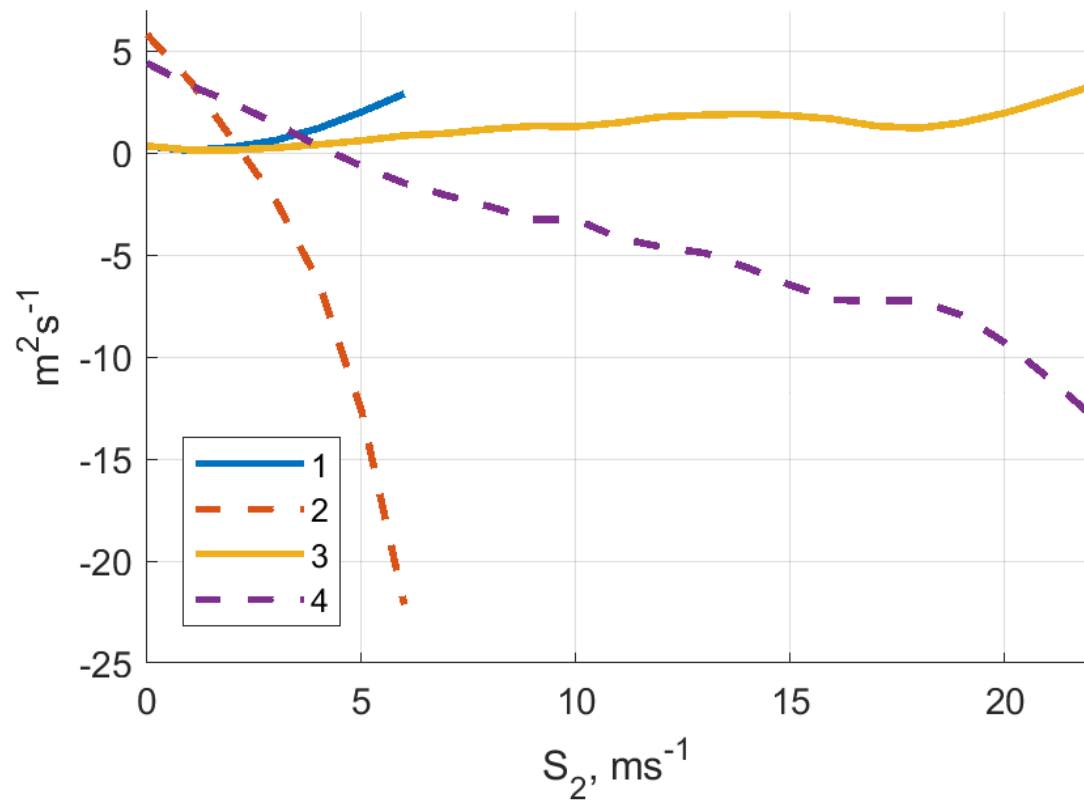
Зеленый пунктир

согласно модели с

$\tilde{\kappa} > 0$



\tilde{K} В ЗАВИСИМОСТИ ОТ СДВИГА ВЕТРА $S_2 = shear(z) = \sqrt{(u(z) - u_g)^2 + (v(z) - v_g)^2}$



Оптимальный коэффициент \tilde{K} в зависимости от S_2 ($m \cdot s^{-1}$)

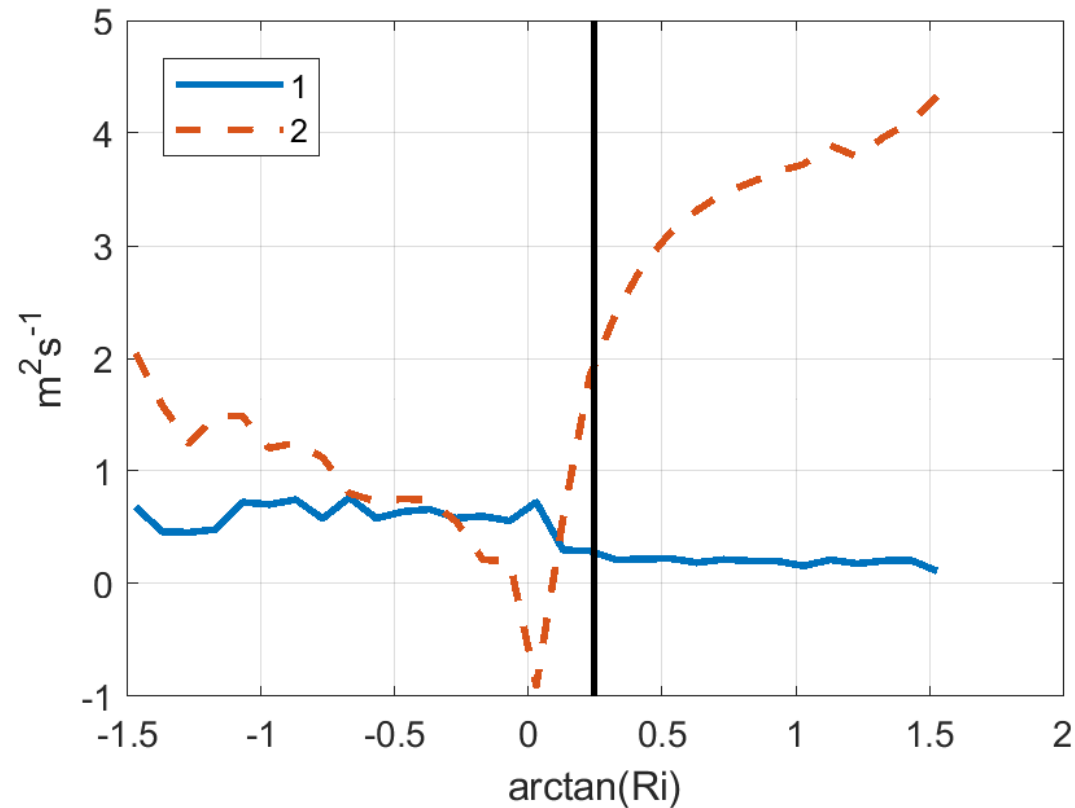
Вещ. часть $\tilde{k}(S_2)$ – сплошные линии (1, 3)

Мнимая часть $\tilde{\gamma}(S_2)$ – пунктирные (2, 4)

Устойчивый случай (1, 2),
неустойчивый (3,4)

При устойчивой и неустойчивой стратификациях получаем сравнительно похожие зависимости. В устойчивом случае больших сдвигов не бывает, поэтому кривые короче.

$\tilde{\kappa}$ в зависимости от числа Ричардсона Ri , $S_3 = \arctan(Ri)$



1 — $\tilde{\kappa}(S_3)$, 2 — $\tilde{\gamma}(S_3)$. Вертикальная линия (граница устойчивости) $Ri = Ri_c = 0.25$

При устойчивой стратификации мнимая часть κ много больше действительной: $10 < \gamma/k < 40$

Оценки качества моделей для различных вариантов параметризации

Ratio – во сколько раз увеличилось $100\% \cdot (1 - \Lambda)$ при добавлении параметра γ

	Optimized coefficients	κ	$k > 0, \gamma = 0$	$\tilde{\kappa}$	$\tilde{k} > 0, \gamma = 0$	Ratio
Subsample	Atmospheric parameter(s) S	$100\% \cdot (1 - \Lambda)$				
Full	Relative height S_1	39,3%	12,2%	49,0%	14,0%	3,5
Deep		34,9%	7,6%	35,3%	7,8%	4,5
Thin		61,6%	17,4%	71,2%	21,3%	3,3
Stable		66,0%	9,8%	77,4%	10,9%	7,1
Unstable		39,6%	12,7%	48,8%	14,1%	3,5
Full	Wind shear modulus S_2	38,4%	12,7%	47,0%	15,4%	3,1
Deep		29,7%	8,6%	30,2%	8,8%	3,4
Thin		58,9%	17,9%	67,0%	22,4%	3,0
Stable		60,1%	11,1%	68,1%	12,4%	5,5
Unstable		39,9%	12,9%	47,4%	15,6%	3,0

	Optimized coefficients	κ	$k > 0, \gamma = 0$	$\tilde{\kappa}$	$\tilde{\kappa} > 0, \gamma = 0$	Ratio
Full	Richardson number Ri	24,5%	11,8%	34,0%	12,8%	2,7
Deep		29,1%	7,2%	29,7%	7,2%	4,1
Thin		34,1%	16,4%	41,4%	19,8%	2,1
Stable		32,6%	9,4%	38,9%	9,7%	4,0
Unstable		28,6%	12,0%	35,2%	12,9%	2,7
Full	Relative height S_1 and wind shear modulus S_2	42,1%	13,2%	54,2%	15,7%	3,4
Deep		35,8%	8,9%	36,3%	9,2%	4,0
Thin		64,5%	18,6%	75,8%	23,0%	3,3
Stable		66,5%	11,1%	78,0%	12,4%	6,3
Unstable		42,7%	13,5%	54,2%	15,9%	3,4
Full	Relative height S_1 and Richardson number Ri	40,2%	12,8%	50,9%	14,0%	3,6
Deep		35,1%	7,8%	35,5%	7,9%	4,5
Thin		62,7%	18,2%	73,5%	21,7%	3,4
Stable		66,1%	9,9%	77,4%	11,0%	7,1
Unstable		41,1%	13,2%	50,7%	14,2%	3,6

Выводы

Предложен эффективный метод оценки коэффициентов турбулентного обмена в зависимости от параметров атмосферы, сводящий задачу к задаче квадратичного программирования.

При добавлении в модель Аккерблома - Экмана дополнительного коэффициента турбулентного обмена γ :

1. Проще обеспечить существование и единственность решения
2. Корреляция с данными измерений увеличивается в 2 - 7 раз
3. Второй дополнительный коэффициент γ как правило **больше (!)** по величине чем первый коэффициент k

Работа была поддержана грантом № 18-05-0011 в рамках Программы «Научный фонд Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» (НИУ ВШЭ)» 2018 - 2019 гг. и в рамках государственной поддержки ведущих университетов Российской Федерации "5-100".

Литература

- 1.Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. т.1, Гидрометеоиздат, Л.: 1992, т.2, 1996, М.: «Наука».
- 2.Лайхтман Д.Л. (ред.) Динамическая метеорология. Гидрометеоиздат, Л.: 1976.
- 3.P.L.Bykov, V.A.Gordin. Big data and inverse problem for Ekman - Akerblom model. Research Activities in Atmospheric and Oceanic Modeling, 2018.

*Это, гады – физики на пари
Раскрутили шарик наоборот*

Спасибо за внимание!