

Комплексный коэффициент турбулентного обмена в модели пограничного слоя атмосферы. Согласование с данными высокого разрешения

Ф.Л.Быков, В.А.Гордин
*ФГБУ «Гидрометцентр России»,
НИУ ВШЭ, факультет экономических наук*

Москва, 2020г

Модель Аккерблома - Экмана описывает стационарное решение уравнений газовой динамики в пограничном слое атмосферы (ПСА).

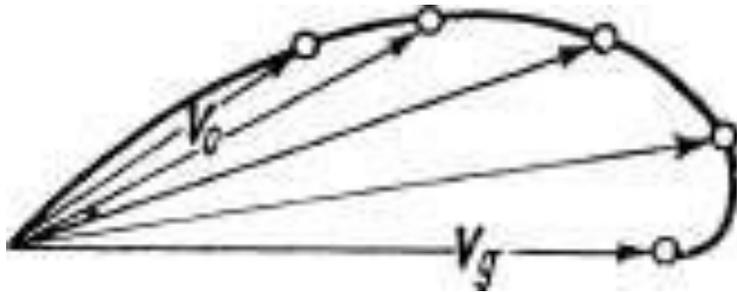
Учитывает турбулентность и силу Кориолиса. Пространственные масштабы: 1 км по вертикали и 100км по горизонтали:

$$\begin{cases} \frac{d}{dz} \left[k(z) \frac{du}{dz} \right] = -l(v - v_g), \\ \frac{d}{dz} \left[k(z) \frac{dv}{dz} \right] = l(u - u_g), \end{cases} \quad (1)$$

где u, v – искомые горизонтальные компоненты ветра в пограничном слое, u_g, v_g – основной (геострофический) ветер, $z \in [0, H]$ – высота над поверхностью Земли, H – толщина пограничного слоя, $l = 1,45842 \cdot 10^{-4} \sin \varphi \text{ c}^{-1}$ – параметр

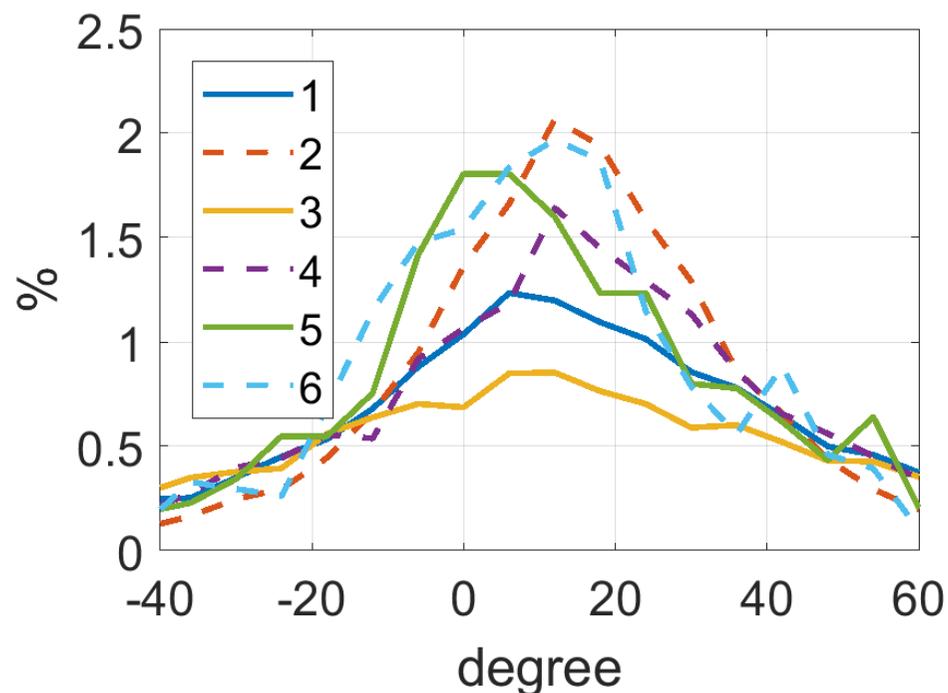
Кориолиса, φ – широта, $k(z) > 0$ – коэффициент турбулентного обмена.

Граничные условия: $u(H) = u_g, v(H) = v_g, u(0) = 0, v(0) = 0$. Если коэффициент $k(z_0) = 0$ для некоторого $z_0 \in (0, H)$, то задача может не иметь решения.



При $k(z) = const > 0$ краевая задача (1) решается аналитически и угол поворота ветра в ПСА равен 45° .

Распределение углов поворота ветра в ПСА



1, 3, 5 – южнее 50° с.ш. средний угол поворота $\sim 13^{\circ}$

2, 4, 6 – севернее 50° с.ш. средний угол поворота $\sim 19^{\circ}$

1, 2 – все профили, средний угол поворота $\sim 13-16^{\circ}$

3, 4 – ПСА более 1000м, средний угол поворота $\sim 12-15^{\circ}$

5, 6 – устойчивая стратификация, средний угол поворота $\sim 10^{\circ}$

Задача: найти наиболее согласующийся с измерениями коэффициент $k(z)$, возможно зависящий от параметров атмосферы.

Обобщенная модель Аккерблома - Экмана

Модель (1) инвариантна относительно группы поворотов вокруг вертикальной оси. Будем так же рассматривать модифицированную систему

$$\begin{cases} \frac{d}{dz} \left[\gamma(z) \sin(\varphi) \frac{dv}{dz} + k(z) \frac{du}{dz} \right] = -l (v - v_g), \\ \frac{d}{dz} \left[-k(z) \frac{dv}{dz} + \gamma(z) \sin(\varphi) \frac{du}{dz} \right] = -l (u - u_g), \end{cases} \quad (2)$$

где $\gamma(z)$ играет роль регуляризатора, если $k(z)$ близко к 0. Мотивировка (2): только матрицы вида $\begin{pmatrix} \gamma & -k \\ k & \gamma \end{pmatrix}$ перестановочны с группой поворотов плоскости

SO(2), т. е. линейный дифференциальный оператор второго порядка только такого вида инвариантен относительно поворотов системы координат вокруг вертикальной оси. Задача (2) теряет решение, только если $k(z_0) = \gamma(z_0) \sin \varphi = 0$ для некоторого $z_0 \in (0, H)$. В общем положении так не бывает!

Сомножитель $\sin \varphi$ был добавлен по результатам экспериментов с данными измерений из Южного полушария

Комплексная форма обобщенной модели (2)

Если обозначить $w = u + iv$ и $\kappa = k - i\gamma \sin \varphi$, где $i = \sqrt{-1}$, то (2) эквивалентна

$$\frac{d}{dz} \left[\kappa(z) \frac{dw}{dz} \right] = il (w - w_g). \quad (3)$$

При комплексном $\kappa(z) = const$ получаем:

1. Характеристические значения системы $\pm \sqrt{il/\kappa}$,

Решение задачи Коши ограничено при $z \rightarrow +\infty$ если и только если $k = 0, \gamma > 0$

2. Угол поворота ветра равен $\arg \sqrt{\frac{i}{\kappa}} = \frac{1}{2} \operatorname{atan} \frac{k}{\gamma \sin \varphi}$,

Средний наблюдаемый угол поворота $10-20^\circ$ достигается при $\gamma \sin \varphi / k \approx 1.2 - 2.7$

Интегрирование системы по вертикали

При измерениях скорость ветра определяется дифференцированием координат зонда. Чтобы уменьшить порядок дифференцирования, проинтегрируем по вертикальной переменной систему (3) и получим:

$$\kappa(z) \frac{dw}{dz} = -\psi + c, \quad \frac{d\psi}{dz} = il(w_g - w), \quad (4)$$

где константу $c \in \mathbb{C}$ для удобства выберем так, чтобы $\int_0^H \psi(z) dz = 0$.

По данным N вертикальных профилей ветра, будем искать универсальную $\kappa(z)$ как функцию, минимизирующую среднюю невязку (4):

$$L(\kappa(z), c_j) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{1}{W_j} \int_0^{H_j} \left| \kappa(z) \frac{dw_j}{dz} + \psi(z) - c_j \right|^2 dz \rightarrow \min_{\kappa(z), \{c_j\}}, \quad (5)$$

где j – номер профиля, $W_j = \int_0^{H_j} |\psi(z)|^2 dz$. Задача сводится к задаче квадратичного

программирования. При такой нормировке получаем $\min_{c_j} L(0, c_j) = 1$.

Величина $\Lambda^2 = 1 - L$ имеет смысл среднего коэффициента детерминации.

Толщина пограничного слоя

Толщину H оцениваем, решая уравнение

$$\Theta(H) = \Theta_v(0), \quad (6)$$

где Θ – потенциальная температура и Θ_v – потенциальная виртуальная температура. Это максимальная высота, на которую водяной пар с поверхности Земли может подняться адиабатически.

Рассматриваем профили ветра в коде BUFR, удовлетворяющие условиям:

1. Дискретность измерений ветра 0.1 м/с
2. Как минимум 25 измерений в слое 0-1000 м
3. Пограничный слой более 100 м. Вертикальное разрешение наших данных (~20 м) не позволяет находить качественные оценки модели при более тонких слоях
4. Изменчивость скорости ветра в ПСА более 2.5 м/с
5. Высота первого отсчета в профиле не более 5 м

Из **234905** профилей по этим условиям отобрали **33806** профилей (14.4%)

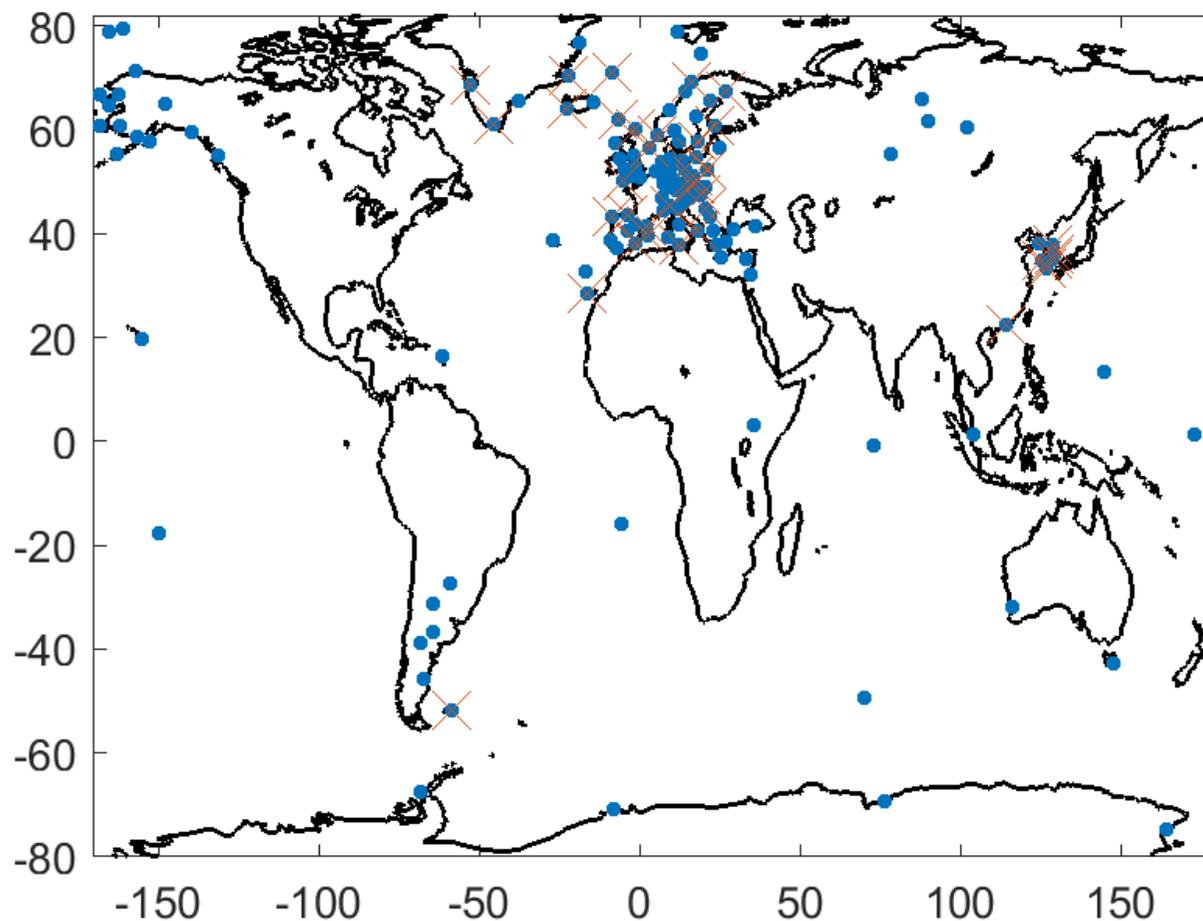
Число Ричардсона

Число Ричардсона (точнее функция) вычисляется по формуле

$$Ri(z) = \frac{g}{\Theta} \frac{\frac{\partial \Theta}{\partial z}}{\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2}. \quad (7)$$

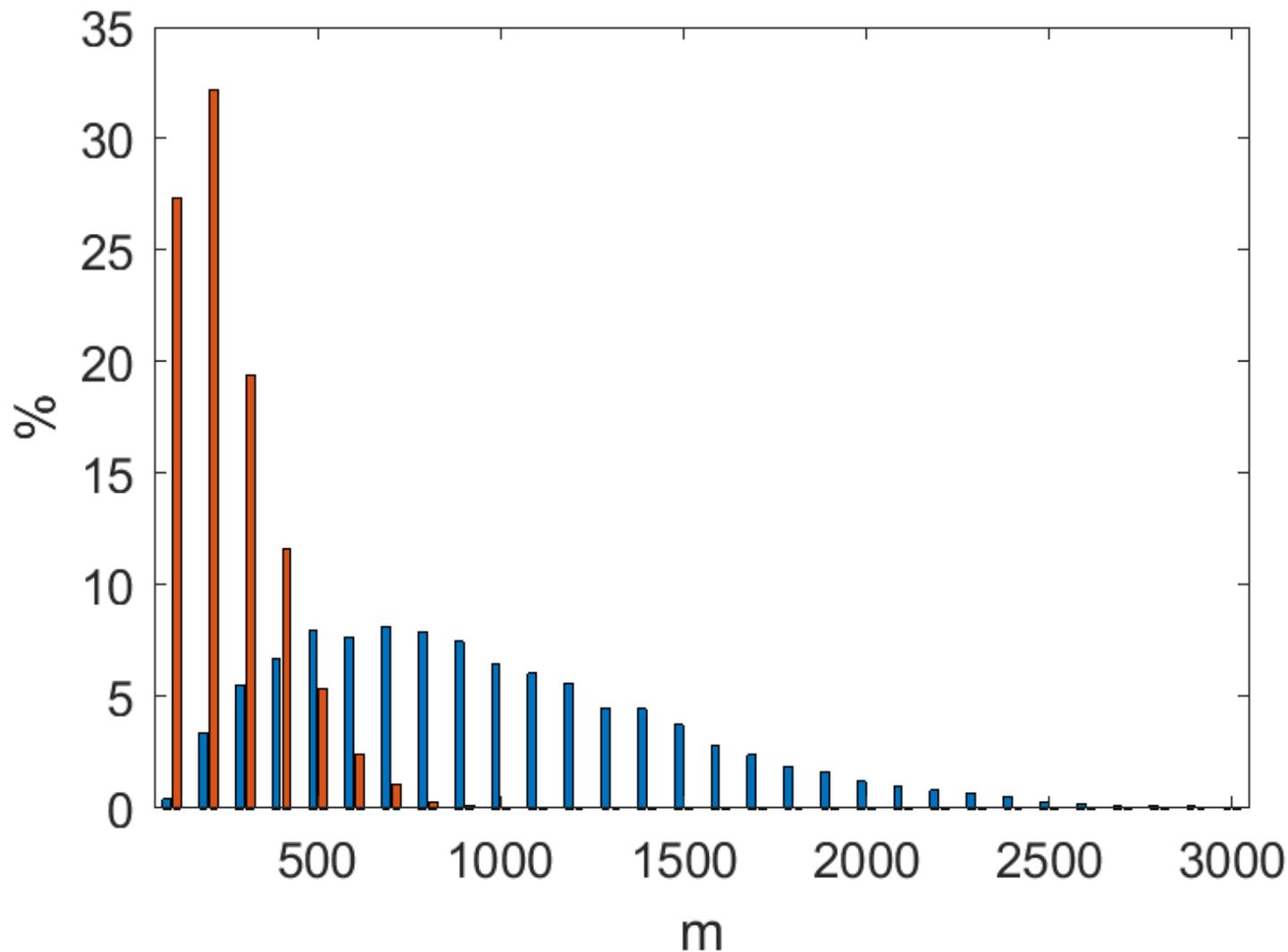
Значения $Ri > Ri_c = 0.25$ соответствуют устойчивой стратификации, $Ri < Ri_c$ – неустойчивой, $Ri < 0$ – сильно неустойчивой (существует слой инверсии).

Расположение станций, с которых доступны данные BUFR высокого разрешения



Крестиком помечены станции с большим (>400) числом профилей

Распределение толщин пограничного слоя



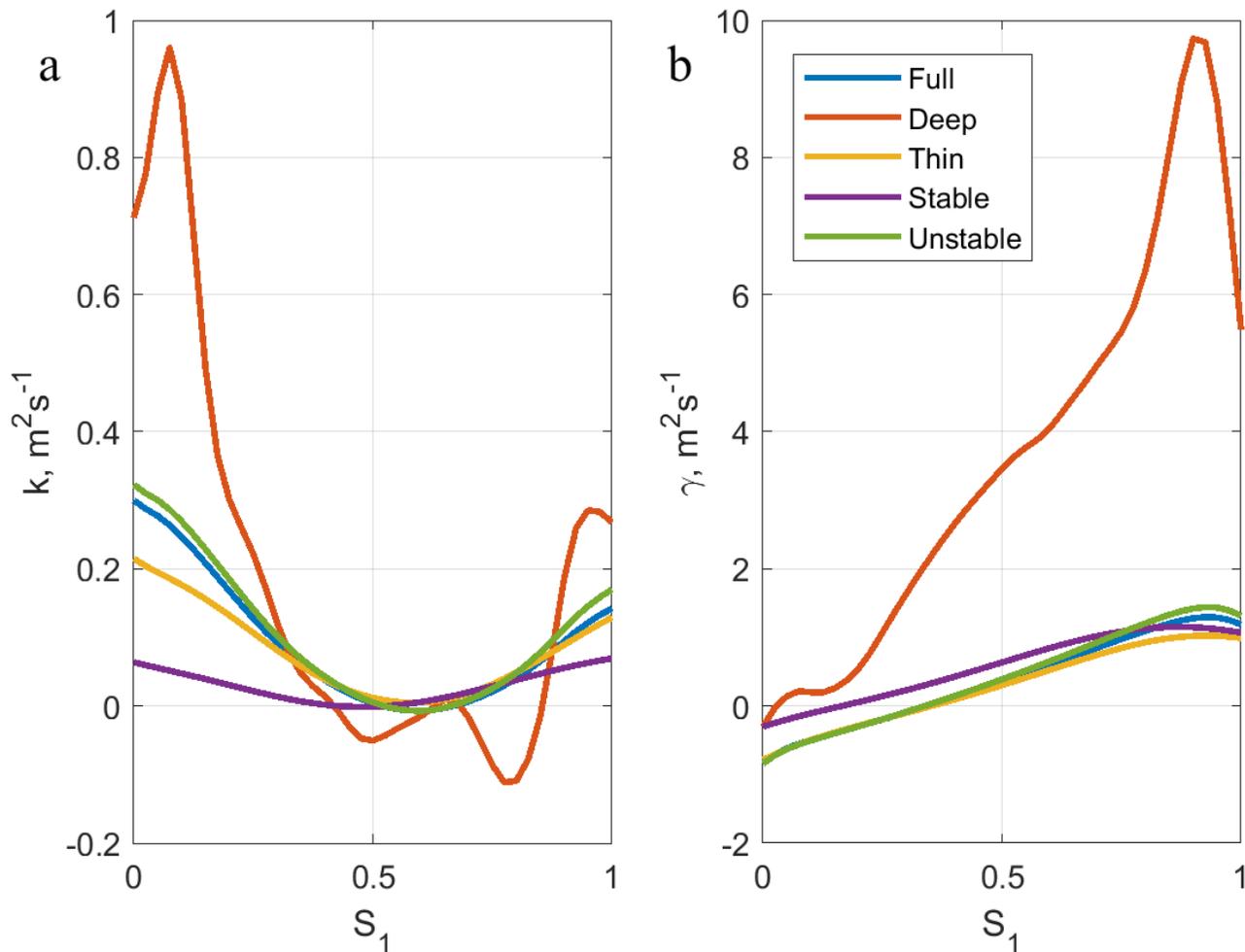
Синие – профили с неустойчивой стратификацией. Красные – с устойчивой

Подвыборки

Название подвыборки	Дополнительное условие	Кол-во профилей N	Толщина H_j
Full	Нет	33806	671±516m
Deep*	$H_j > 1000m$	10409	1592±454m
Thin	$H_j < 500m$	15622	270±115m
Stable	$Ri(z) > 0.3$ для всех $z \in [0; H_j]$	3168	201±105m
Unstable	$Ri(z_0) < 0.2$ в некоторой $z_0 \in [0; H_j]$	29449	742±517m

*Подвыборка Deep является частью подвыборки Unstable

Результаты оптимизации в зависимости от относительной высоты $S_1 = z/H$

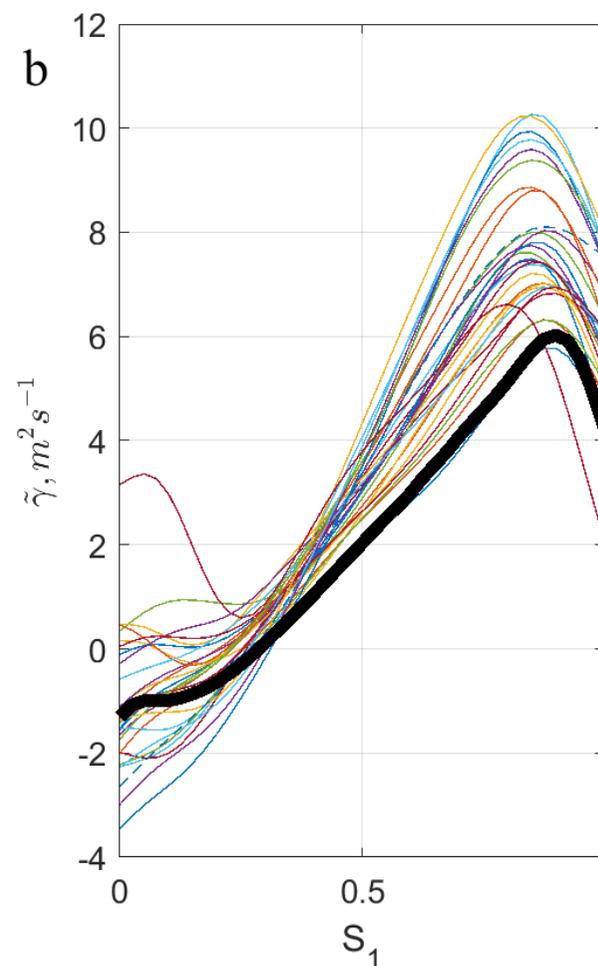
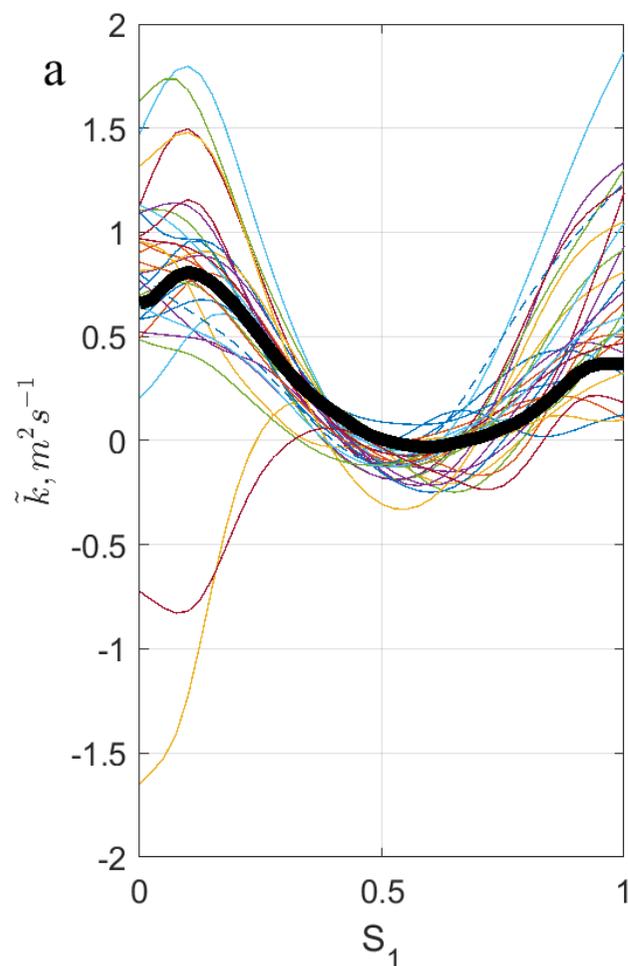


Далее используем нормированные коэффициенты: $\tilde{k} = k \cdot \frac{H_j}{1000m}$, $\tilde{\gamma} = \gamma \cdot \frac{H_j}{1000m}$

Отдельно для 28 станций (более 400 профилей с каждой)

a) the real part $\tilde{k}(S_1)$,

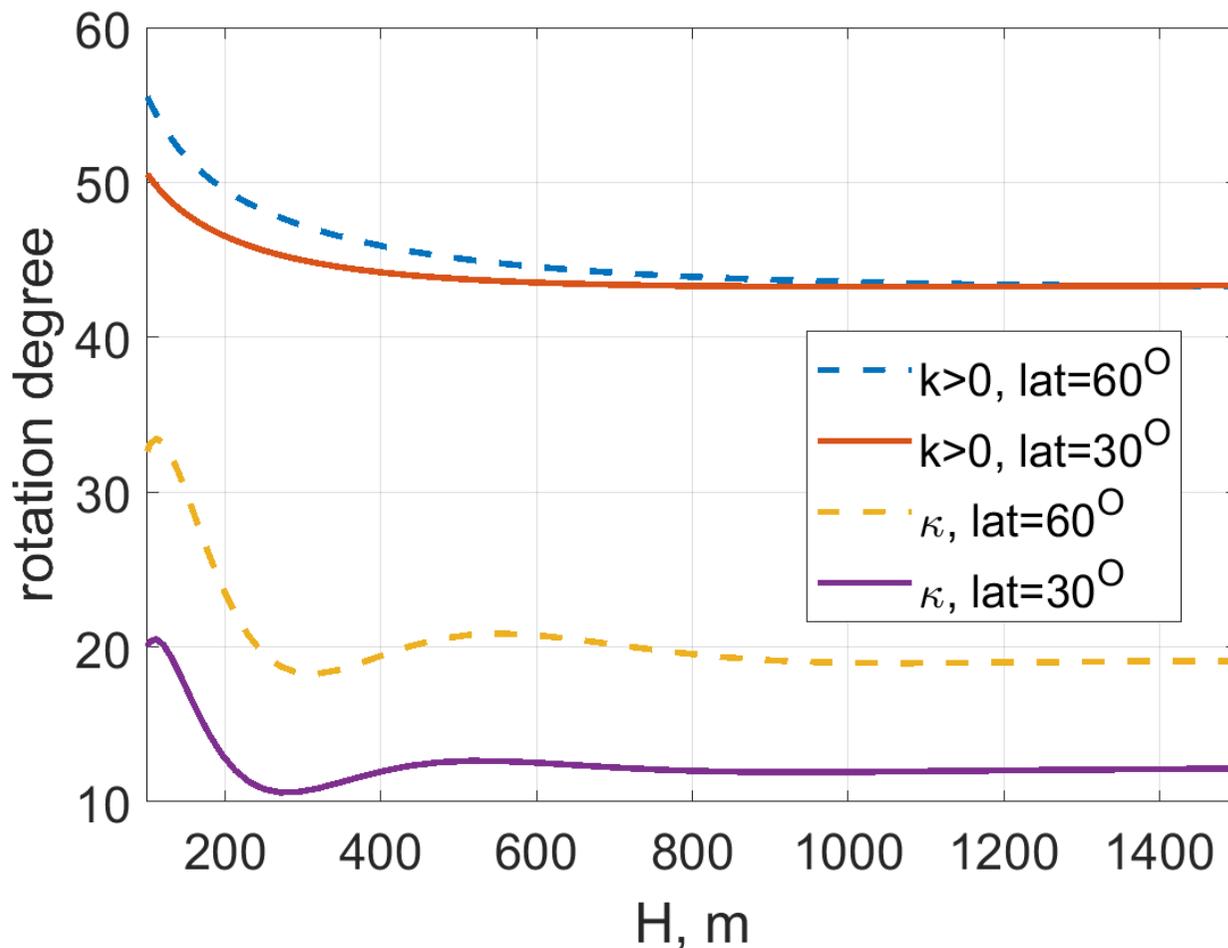
b) the imaginary part $\tilde{\gamma}(S_1)$.



Жирные кривые – средние по всем профилям. Пунктир – станция в Южном полушарии.

Угол поворота ветра в зависимости от высоты

В случае $\kappa = H \tilde{\kappa}(z/H)$ угол поворота зависит только от толщины H и географической широты:

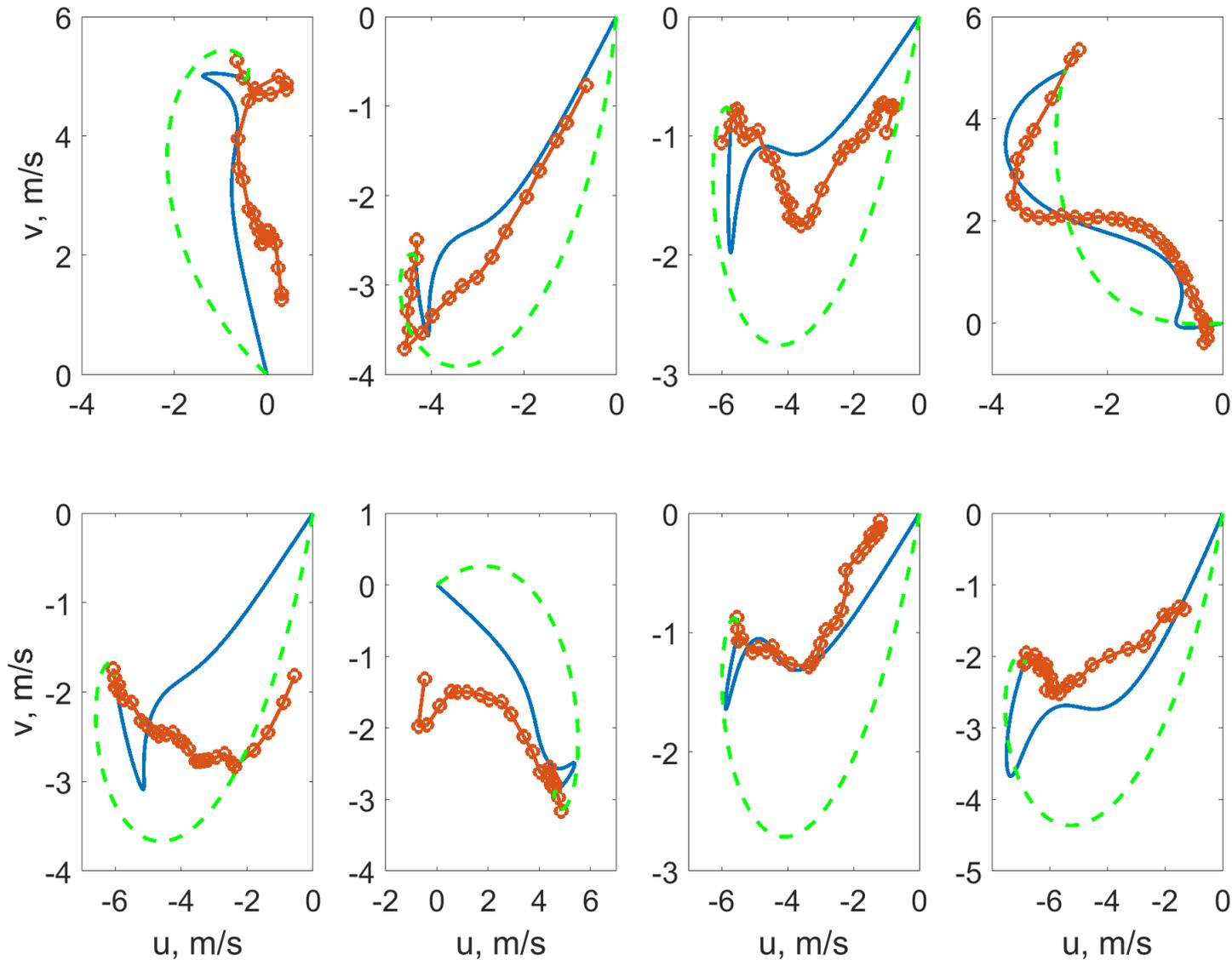


Примеры профилей ветра (устойчивая стратификация)

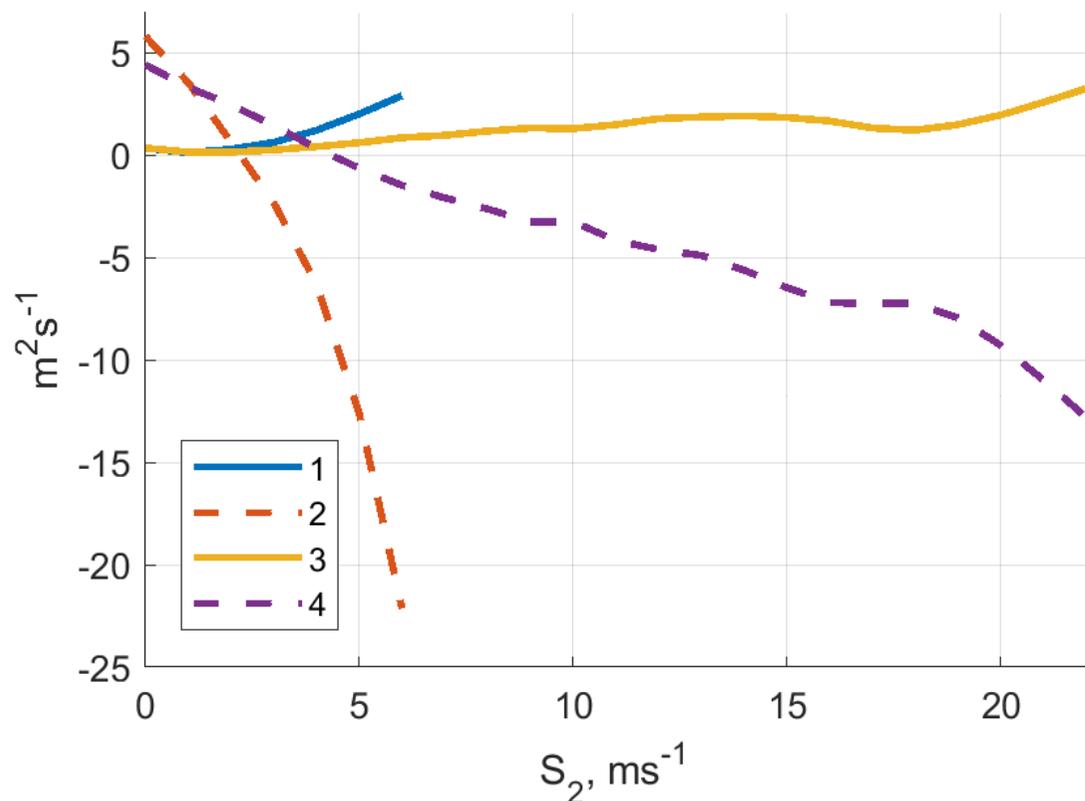
Красные точки –
измеренные
зондом значения

Синие линии
согласно модели с
комплексным $\tilde{\kappa}$

Зеленый пунктир
согласно модели с
 $\tilde{\kappa} > 0$



\tilde{K} в зависимости от сдвига ветра $S_2 = shear(z) = \sqrt{(u(z) - u_g)^2 + (v(z) - v_g)^2}$



Оптимальный коэффициент \tilde{K} в зависимости от S_2 ($m \cdot s^{-1}$)

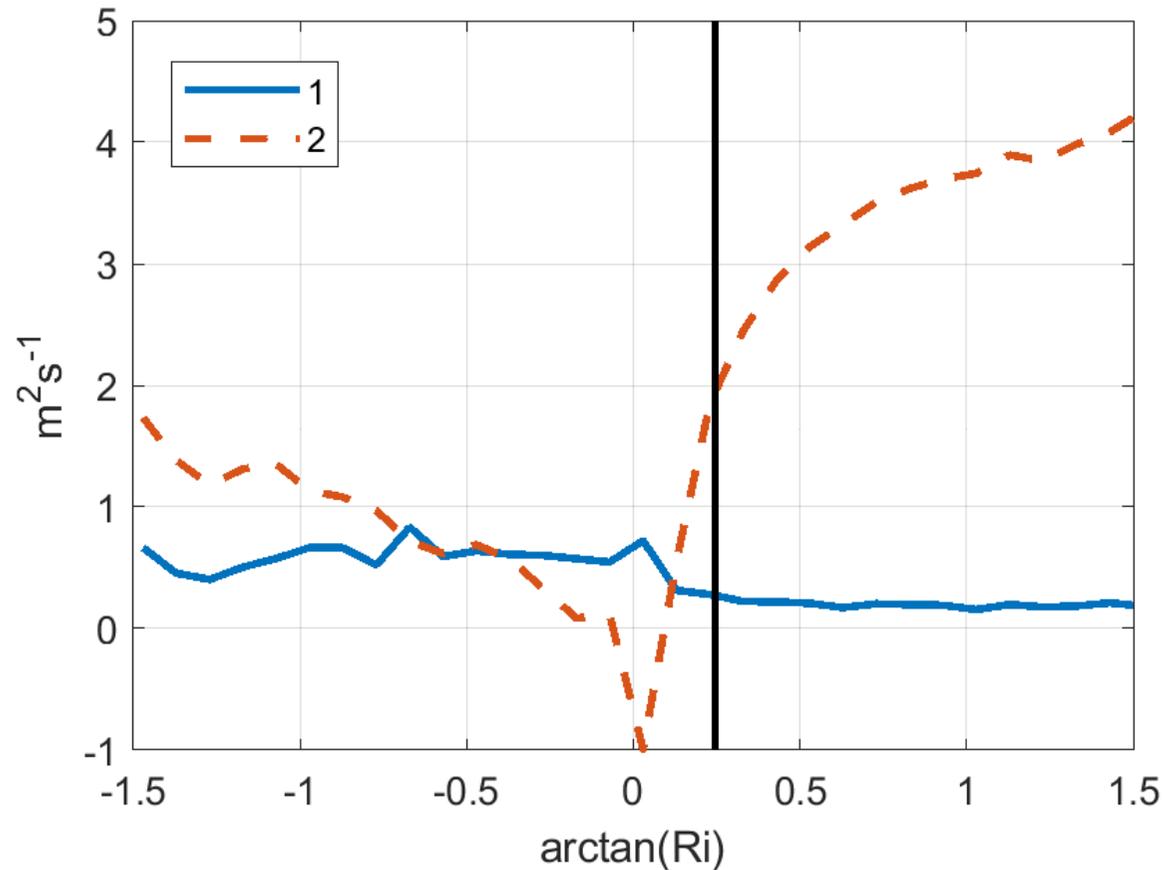
Вещ. часть $\tilde{k}(S_2)$ — сплошные линии (1, 3)

Мнимая часть $\tilde{\gamma}(S_2)$ — пунктирные (2, 4)

Устойчивый случай (1, 2),
неустойчивый (3,4)

При устойчивой и неустойчивой стратификациях получаем сравнительно похожие зависимости. В устойчивом случае больших сдвигов не бывает, поэтому кривые короче.

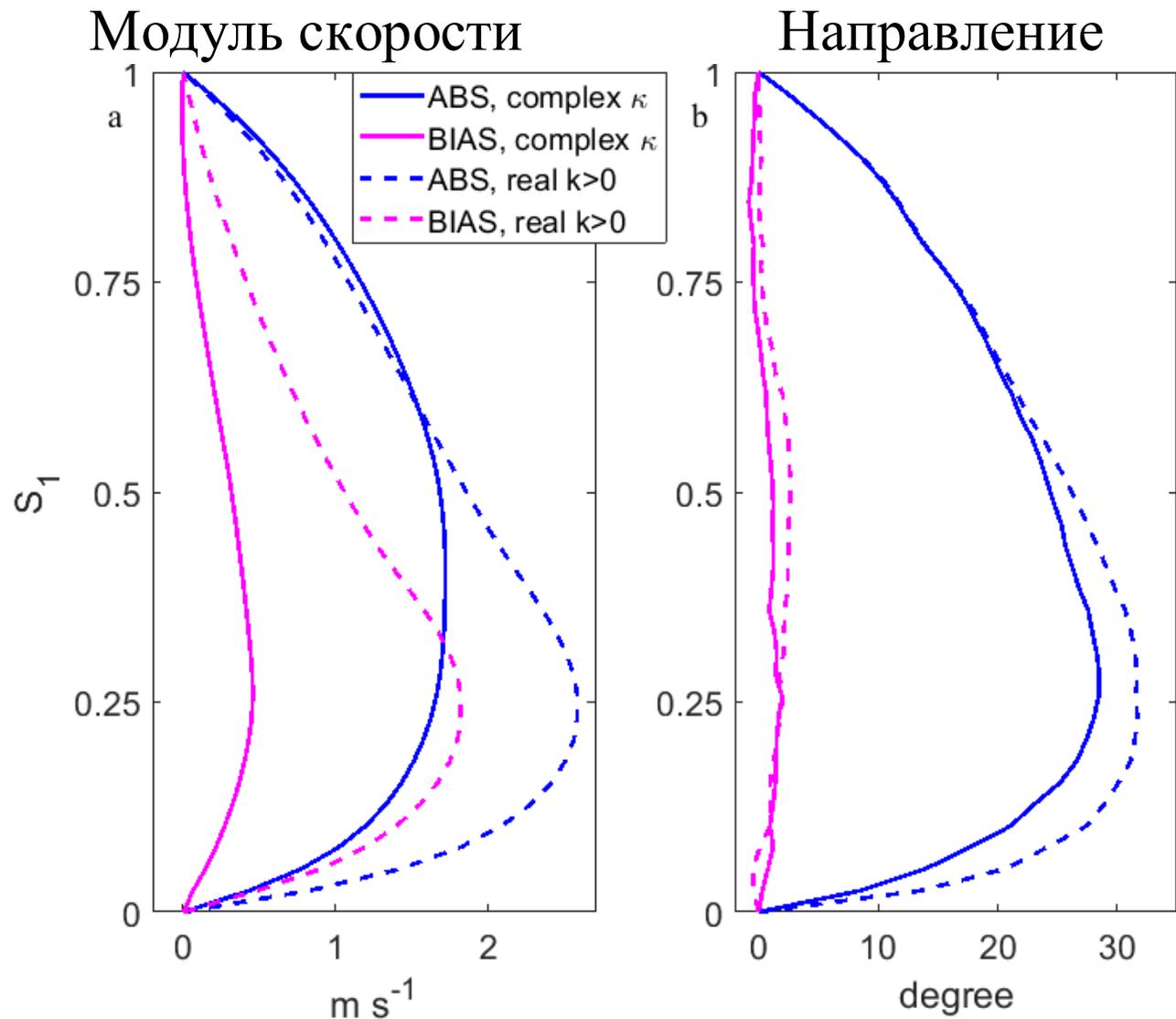
$\tilde{\kappa}$ в зависимости от числа Ричардсона Ri , $S_3 = \arctan(Ri)$



1 – $\tilde{\kappa}(S_3)$, 2 – $\tilde{\gamma}(S_3)$. Вертикальная линия (граница устойчивости) $Ri = Ri_c = 0.25$

При устойчивой стратификации мнимая часть κ много больше действительной: $10 < \gamma/k < 25$

Погрешность восстановления профиля ветра по граничным условиям



Отклонение модельного модуля скорости от фактического для модели с комплексным коэффициентом κ в сравнении с моделью с вещественным $k>0$:
 BIAS в ~ 4 раза меньше
 ABS в 1.5 раза меньше

Оценки качества моделей при различных вариантах параметризации

Ratio – во сколько раз увеличился средний коэффициент корреляции Λ при добавлении параметра $\tilde{\gamma}$

	Коэффициент (ты)	κ	$k > 0, \gamma = 0$	$\tilde{\kappa}$	$\tilde{k} > 0, \gamma = 0$	Ratio
Подвыборка	Параметр S	100% · Λ				
Full	Относительная высота S_1	39,3%	12,2%	49,0%	14,0%	3,5
Deep		34,9%	7,6%	35,3%	7,8%	4,5
Thin		61,6%	17,4%	71,2%	21,3%	3,3
Stable		66,0%	9,8%	77,4%	10,9%	7,1
Unstable		39,6%	12,7%	48,8%	14,1%	3,5
Full	Сдвиг ветра S_2	38,4%	12,7%	47,0%	15,4%	3,1
Deep		29,7%	8,6%	30,2%	8,8%	3,4
Thin		58,9%	17,9%	67,0%	22,4%	3,0
Stable		60,1%	11,1%	68,1%	12,4%	5,5
Unstable		39,9%	12,9%	47,4%	15,6%	3,0

	Коэффициент (ты)	κ	$k > 0, \gamma = 0$	$\tilde{\kappa}$	$\tilde{\kappa} > 0, \gamma = 0$	Ratio
Full	Число Ричардсона Ri	24,5%	11,8%	34,0%	12,8%	2,7
Deep		29,1%	7,2%	29,7%	7,2%	4,1
Thin		34,1%	16,4%	41,4%	19,8%	2,1
Stable		32,6%	9,4%	38,9%	9,7%	4,0
Unstable		28,6%	12,0%	35,2%	12,9%	2,7
Full	Относительная высота S_1 и сдвиг ветра S_2	42,1%	13,2%	54,2%	15,7%	3,4
Deep		35,8%	8,9%	36,3%	9,2%	4,0
Thin		64,5%	18,6%	75,8%	23,0%	3,3
Stable		66,5%	11,1%	78,0%	12,4%	6,3
Unstable		42,7%	13,5%	54,2%	15,9%	3,4
Full	Относительная высота S_1 и число Ричардсона Ri	40,2%	12,8%	50,9%	14,0%	3,6
Deep		35,1%	7,8%	35,5%	7,9%	4,5
Thin		62,7%	18,2%	73,5%	21,7%	3,4
Stable		66,1%	9,9%	77,4%	11,0%	7,1
Unstable		41,1%	13,2%	50,7%	14,2%	3,6

Выводы

Предложен эффективный метод оценки коэффициентов турбулентного обмена в зависимости от параметров атмосферы, сводящий задачу к задаче квадратичного программирования.

При добавлении в модель Аккерблома - Экмана дополнительного коэффициента турбулентного обмена γ :

1. Проще обеспечить существование и единственность решения
2. Корреляция с данными измерений увеличивается в **2 - 7 раз**
3. Второй дополнительный коэффициент γ как правило **больше (!)** по величине чем первый коэффициент k

Работа была поддержана грантом № 20-04-021 в рамках Программы «Научный фонд Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» (НИУ ВШЭ)» 2020 - 2021 гг. и в рамках государственной поддержки ведущих университетов Российской Федерации "5-100".

Литература

1. Ekman V.W. On the influence of the Earth's rotation on ocean currents, Ark Mat Astron Fys, – 1905 – vol. 2(11) – p. 1-53
2. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа // Дрофа – 2003 – 840с.
3. Vickers D. Mahrt L. Evaluating formulations of stable boundary layer height // J Appl Meteorol – 2004 – vol. 43(11) – p. 1736–1749
4. Mellor G.L. Yamada T. Development of turbulence closure model for geophysical fluid problems // Rev Geophys Space Phys – 1982 – vol. 20 – p. 851-875
5. Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. т.1, Гидрометеоиздат, Л.: 1992, т.2, 1996, М.: «Наука».
6. Лайхтман Д.Л. (ред.) Динамическая метеорология. Гидрометеоиздат, Л.: 1976.
7. Bykov P.L., Gordin V.A. Big data and inverse problem for Ekman - Akerblom model. Research Activities in Atmospheric and Oceanic Modeling, 2018.

*Это, гады – физики на пари
Раскрутили шарик наоборот*

Спасибо за внимание!