

Компактная разностная схема для уравнения переноса

Г. К. Лебедев, научный руководитель В. А. Гордин
*Лицей «Вторая школа»,
НИУ ВШЭ, факультет экономических наук & Гидрометцентр РФ*

Москва, 2020 г.

Уравнение переноса — линейное дифференциальное уравнение в частных производных, описывающее динамику скалярной величины u .

Одномерная версия (с постоянной скоростью V):

$$\partial_t u + V \partial_x u = 0, \quad (1)$$

где u — неизвестная функция, t — время, x — координата.

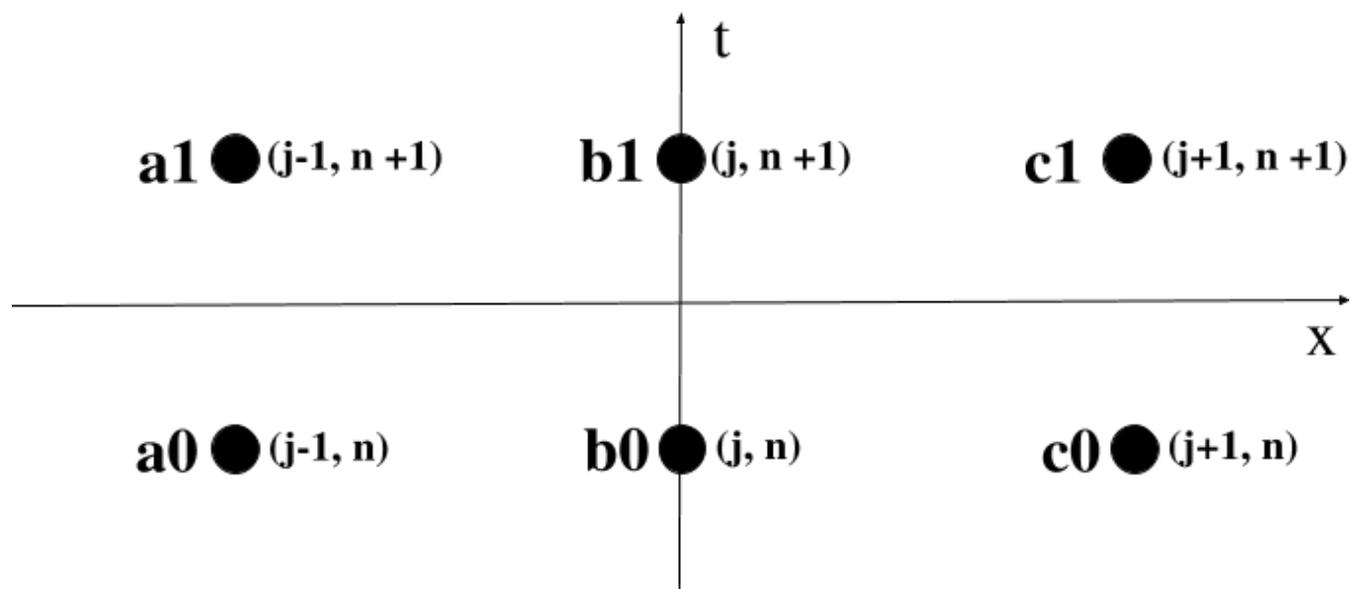
Уравнение (1) имеет аналитическое решение: $u(x, t) = u(x - Vt)$

Рассмотрен простейший случай задачи: граничные условия - периодические, область решения — окружность длины L .

Разностная схема

Неявную компактную схему для (1) строим на двухслойном трехточечном шаблоне (с шагом h по координате x и τ по времени t) в виде:

$$a_1 u_{j-1}^{n+1} + b_1 u_j^{n+1} + c_1 u_{j+1}^{n+1} + a_0 u_{j-1}^n + b_0 u_j^n + c_0 u_{j+1}^n = 0 \quad (2)$$



Шаблон для компактной схемы - прямоугольник

Вычисление коэффициентов схемы

Применяя преобразование Фурье $F_{x \rightarrow \xi}$ к (2), получим символ оператора перехода от функции u^n к u^{n+1} :

$$\tilde{u}^{n+1} = \frac{a_0 \exp(-i\omega) + b_0 + c_0 \exp(i\omega)}{a_1 \exp(-i\omega) + b_1 + c_1 \exp(i\omega)} \tilde{u}^n, \quad (3)$$

где $\nu = V\tau/h$ — безразмерное число Куранта, $\omega = \xi h$ — безразмерное волновое число.

Вычисление коэффициентов схемы

Разрешающий оператор для дифференциального уравнения (1) за время τ переводит u^n в u^{n+1} . Его символ равен

$$\sigma(\xi) = \exp(-i\xi V \tau) = \exp(-i\xi h \nu) = \exp(-i\omega \nu), \quad (4)$$

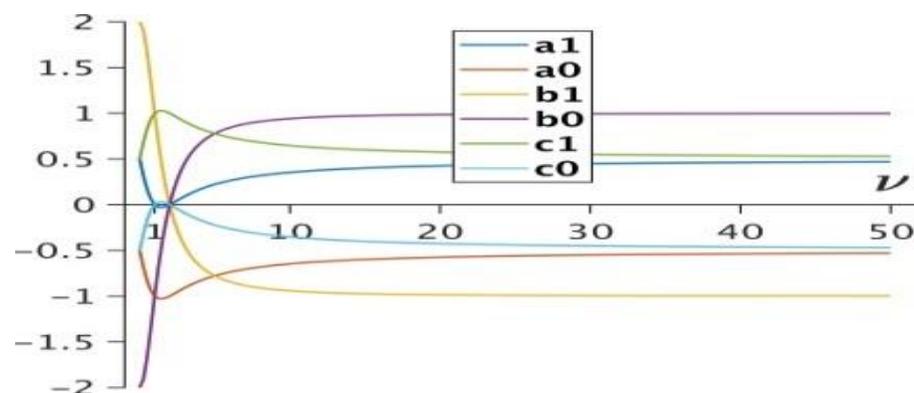
где $\nu = V\tau/h$ — безразмерное число Куранта, $\omega = \xi h$ — безразмерное волновое число. Это эталонный символ.

Его будем приближать символом разностного оператора перехода u^n в u^{n+1} .

Какую схему построим, - такой и символ будет.

Вычисление коэффициентов схемы

Схема будет тем точнее, чем асимптотически ближе при $\omega \rightarrow 0$ её символ к эталонному символу. Из условия на их разность, $O(\omega^5)$, подбираются коэффициенты — задача сводится к построению аппроксимации Паде - Эрмита для $\sigma(\omega)$ и решается аналитически.



Зависимость всех шести коэффициентов компактной разностной схемы (2) от параметра Куранта ν

Аргумент символа компактной схемы

Числитель и знаменатель (3) $\frac{a_0 \exp(-i\omega) + b_0 + c_0 \exp(i\omega)}{a_1 \exp(-i\omega) + b_1 + c_1 \exp(i\omega)}$,

соответствующей символу схемы, при вычисленных коэффициентах схемы комплексно сопряжены, а значит модуль символа тождественно равен 1 — компактная схема недиссипативна и абсолютно устойчива.

Аргумент ее символа:

$$\arg \sigma_{\text{КОМПАКТ}} = -2 \arctan \frac{3\nu \sin(\omega)}{2\cos(\omega) + \nu^2 \cos(\omega) - \nu^2 + 4} \quad (5)$$

Аргумент символа схемы Кранка-Николсона

Нашу схему сравниваем с классической неявной схемой Кранка -Николсон, см. [5]. Её символ по модулю равен 1, а аргумент:

$$\arg \sigma_{CN} = -2 \arctan \frac{\nu \sin(\omega)}{2}. \quad (6)$$

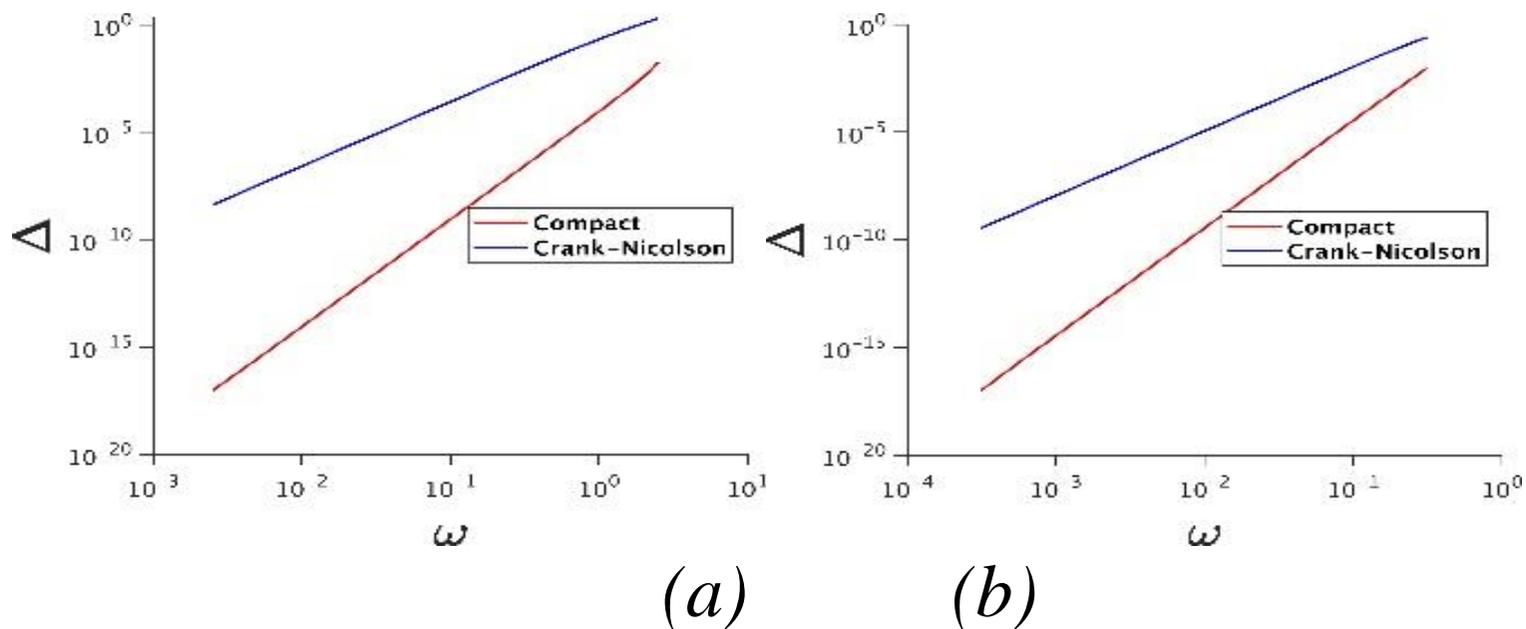
Это тоже недиссипативная абсолютно устойчивая схема. Арифметических операций требует столько же, сколько и компактная схема. Но порядок ее точности ниже.

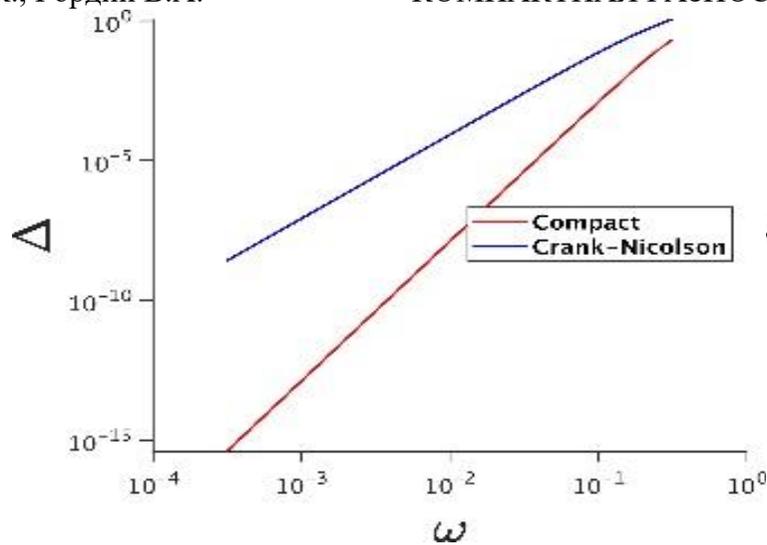
Аргумент эталонного символа

Напомним: у эталонного оператора модуль также тождественно равен 1, а аргумент равен $-\nu\omega$.

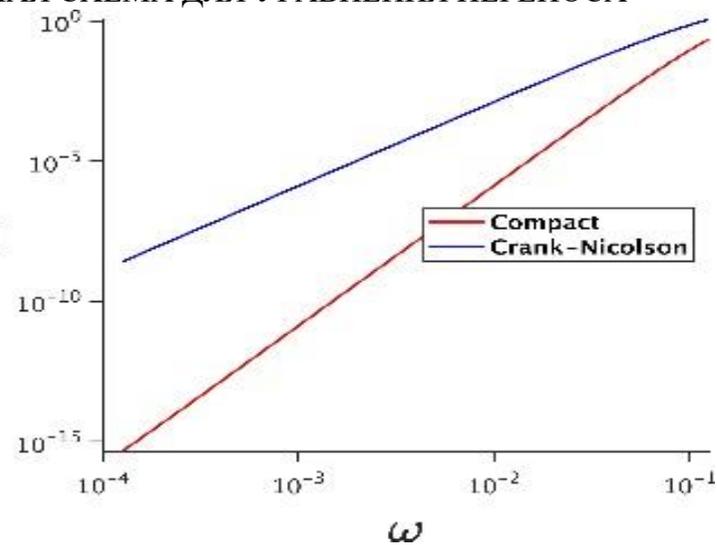
Приведем разность аргументов этих двух функций (символа эталона и символа схемы). Для сравнения (пунктир) приведены соответствующие разности для схемы Кранка – Николсон.

Зависимость невязки аргументов от безразмерного волнового числа ω в билогарифмических координатах; Число Куранта $\nu = const$, см. таблицу

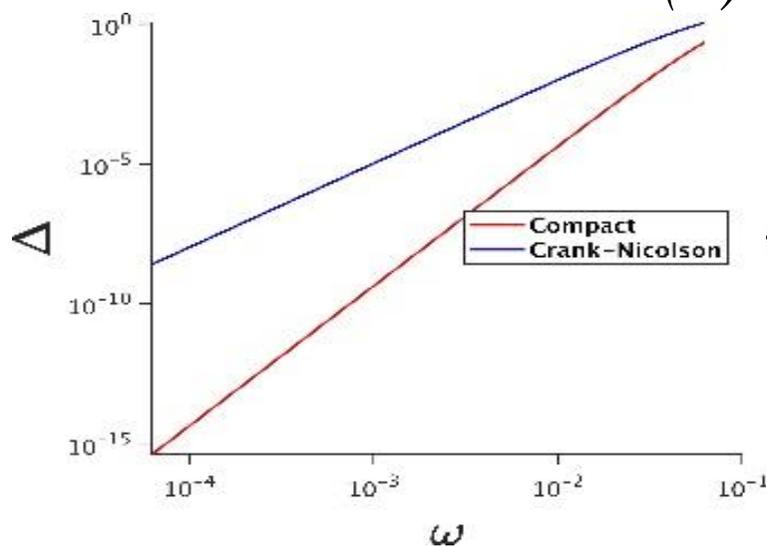




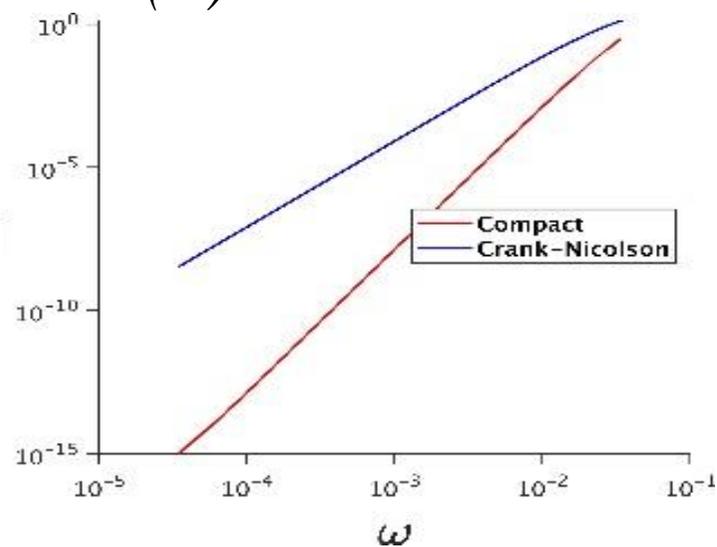
(c)



(d)



(e)



(f)

Порядок аппроксимации символа при различных значениях ν для компактной схемы/схемы Кранка-Николсона

Рис.	a	b	c	d	e	f
ν	1,01	5	10	25	50	100
Порядок	5.09/ 2.89	4.98/ 2.95	4.91/ 2.87	4.89/ 2.88	4.91/ 2.88	4.83/ 2.86

Реализация алгоритма

Разобьём окружность равномерной сеткой на $N = L/h$ отрезков. Решаем СЛАУ:

$$Au^{n+1} = Bu^n, \quad (7)$$

где A, B – трехдиагональные матрицы порядка N :

$$A = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & b_1 & c_1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & b_1 & c_1 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_1 & b_1 & c_1 \\ c_1 & 0 & \dots & 0 & a_1 & b_1 \end{pmatrix}, \quad B = - \begin{pmatrix} b_0 & c_0 & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ a_0 & b_0 & c_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & b_0 & c_0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & b_0 & c_0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_0 & b_0 & c_0 \\ c_0 & 0 & \dots & 0 & a_0 & b_0 \end{pmatrix}.$$

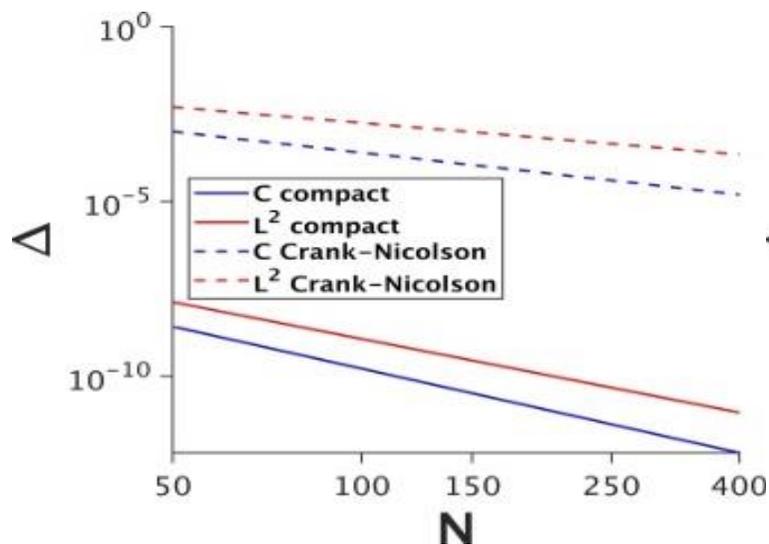
Результаты

На численном эксперименте проверим порядок точности, меняя шаги τ и h при $v = const$. Решение уравнения проверяем в момент времени $T = L/V$ (полный обход окружности). Для сравнения (пунктиром) погрешность схемы Кранка – Николсон.

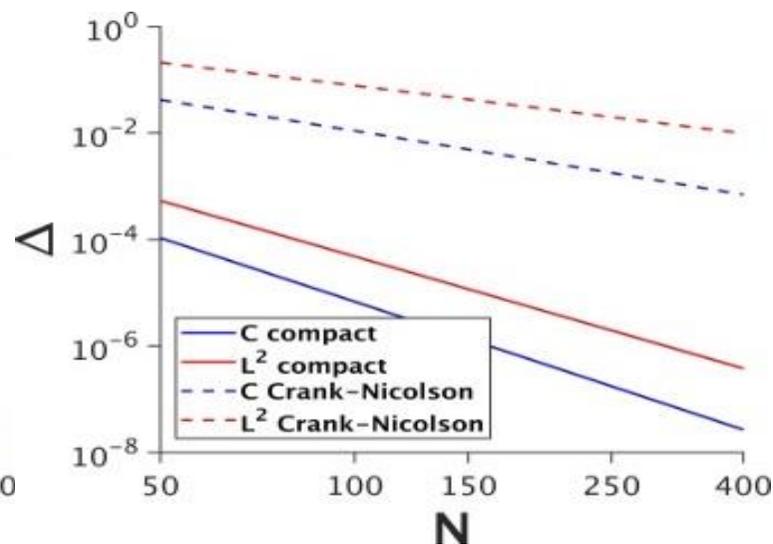
Погрешность оцениваем в нормах C (максимум разности точного и приближенного решений на грубой сетке) и L^2 (корень из суммы квадратов разностей точного и приближенного решений на грубой сетке).

Начальное условие, на котором проводились численные эксперименты простейшее: $u(x, 0) = \sin(x)$.

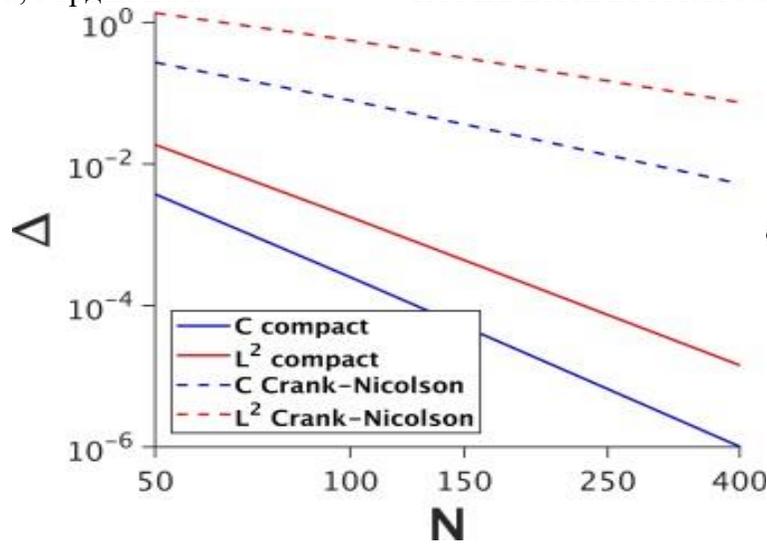
Зависимость погрешности разностного решения от числа шагов по пространству N при $t = T$ в билогарифмических координатах; $\nu = const$, см. таблицу



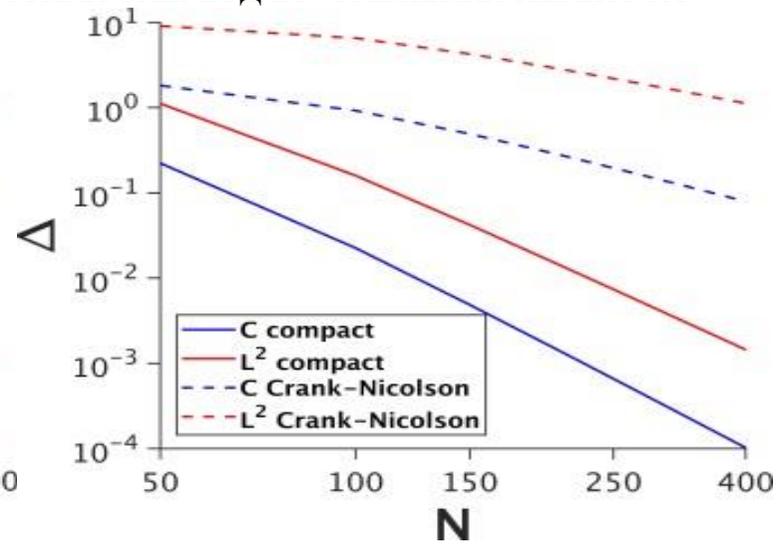
(a)



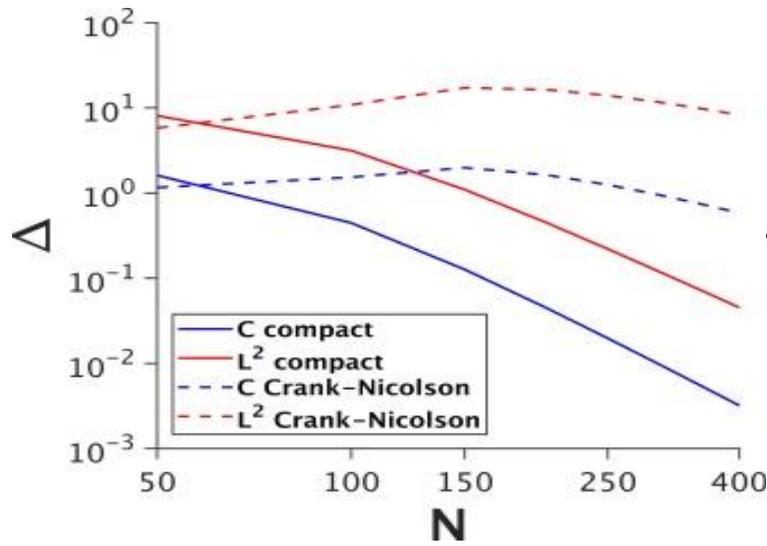
(b)



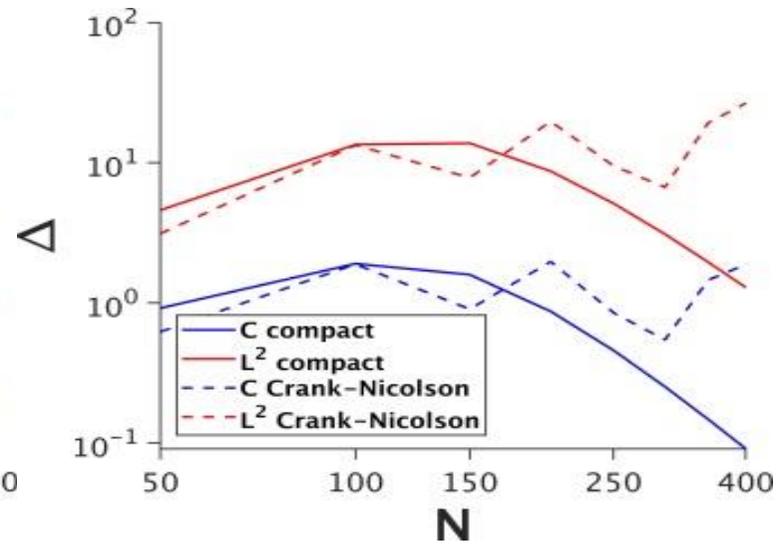
(c)



(d)



(e)



(f)

Порядок точности при различных значениях ν для компактной схемы/схемы Кранка-Николсона

Рис.	a	b	c	d	e	f
ν	1,01	5	10	25	50	100
Порядок в норме C	4/2	3.98/ 1.97	3.95/ 1.9	3.69/ 1.5	3/1.24	2.91/*
Порядок в норме L^2	3,5/1.5	3.48/ 1.47	3.45/ 1.4	3.19/1	2.5/ 0.74	2.41/*

Заключение

Получена неявная компактная схема высокого порядка точности для линейного дифференциального уравнения переноса. По вычислительной сложности совпадает с классической схемой Кранка–Николсона, а по точности существенно превосходит.

Рассмотренное уравнение однородное. Сейчас ведется исследование компактной схемы для уравнения (1) с ненулевой правой частью – заданной функцией $\partial_t u + V \partial_x u = f(t, x)$. Следующий шаг: $\partial_t u + V \partial_x u = \partial_x f(u)$ - уравнение Эйлера – Хопфа.

Работа была поддержана грантом № 20-04-021 в рамках Программы «Научный фонд Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» (НИУ ВШЭ)» 2020 - 2021 гг. и в рамках государственной поддержки ведущих университетов Российской Федерации "5-100".

Литература

1. P. H. Cowell, A. C. D. Crommelin. Investigation of the motion of Halley's comet from 1759 to 1910. Appendix to Greenwich Observations for 1909, Edinburgh (1910) pp. 1 - 84.
2. Э. Хайпер, С. Нёрсетт, Г. Ваннер. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. - М.: «Мир», 1990.
3. B. V. Noumerov, A Method of Extrapolation of Perturbations, Monthly Notices Royal Astronomical Society 84 (1924) pp. 592-601.
4. V. A. Gordin, E. A. Tsymbalov. Compact difference schemes for the diffusion and Schrodinger equations. Approximation, stability, convergence, effectiveness, monotony // Journal of Computational Mathematics, Vol. 32, No.3, 2014, pp. 348-370
5. А.А.Самарский. Введение в теорию разностных схем. М., «Наука», 1971.

Спасибо за внимание!