КОМПАКТНАЯ РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА С РАЗРЫВНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

Д.А. Шадрин

НИУ ВШЭ, факультет математики и Гидрометцентр РФ

Аннотация. Компактная разностная схема 3-го порядка дает высокую точность вычислений при относительно небольшом числе арифметических действий. После экстраполяции Ричардсона порядок возрастает до 4,8

Введение. Во многих моделях используют ур. Пуассона:

$$div(\vartheta(\vec{x})grad(U(\vec{x}))) = f(\vec{x}), \qquad (1)$$

где U – неизвестная функция, $\vec{x}$ - координата на области решения, $f(\vec{x})$ - заданная правая часть. Рассматривается случай, когда коэффициент $\vartheta(\vec{x})$ имеет скачок (область заполнена двумя разными материалами) Рассмотрен простейший случай двумерной задачи: область решения – поверхность цилиндра длины $2L_x$, x вдоль образующей, y – вдоль окружности (см. Рис. 1),

$$\vartheta(x,y) = \begin{cases} \vartheta_- & x < 0 \\ \vartheta_+ & x \ge 0 \end{cases}.$$

На границе цилиндра ставятся условия Дирихле:

$$u(-L_x, y) = 1, \;\; u(-L_x, y) = 1. \qquad (2)$$

На линии стыка Γ – стыковочные (непрерывность и решения и потока вдоль нормали к линии Γ):

$$u(-0,y) = u(+0,y), \quad \vartheta_- \partial_x u(-0,y) = \vartheta_+ \partial_x u(+0,y). \qquad (3)$$

Решение этой задачи для тонкого стержня см. [1].

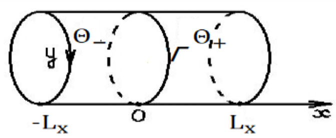

Рис.1. Область решения; $x \in [-L_x, L_x]$, $y \in [0, L_y]$

Аппроксимация. Цилиндр разбивается равномерной сеткой: N+1 узел на образующей, N узлов на окружности. Для каждой точки сетки x_{ij} подбираем пары разностных операторов A и P, на шаблонах из κ_A и κ_P точек сетки вокруг x_{ij} - для решения и для правой части. Операторы A и P должны быть точны на парах тестовых функций $u_k, f_k, k = 1,..., K = \kappa_A + \kappa_P - 1$; u_k могут терпеть излом на Г, f_k получаем подстановкой u_k в (1-3). Из коэффициентов A и P для каждой точки x_{ij} составляется «глобальная» СЛАУ: $M_A U = M_P F$. Строки матриц M_A и M_P составлены из коэффициентов операторов A и P для соответствующих точек или из граничных условий для (1); U и F – значения функций u и f на сетке. Матрица $\Omega = M_F^{-1} M_A$ приближает дифференциальный оператор с отрицательным спектром. Требуем это от Ω. Подробнее про компактные схемы см. [2]

Шаблоны для точек сетки. Для компактной схемы используем 3 вида шаблонов: для внутренних точек (Рис.2), для точек около линии стыка и на линии стыка.

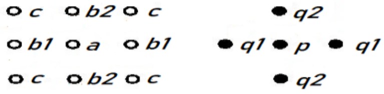

Рис.2 Шаблоны квадрат-крест для внутренних точек сетки. Слева для решения u, справа – для правой части f.

Тестовые: $u_{ij} = x^{2i} y^{2j}$, $2i + 2j \le 4$, $\kappa_A = 9$, $\kappa_P = 5$

Результаты. Таким образом, точность на тестовых мономах u_k обеспечивает 3-й порядок схемы. Для других типов точек и набор тестовых функций другой.

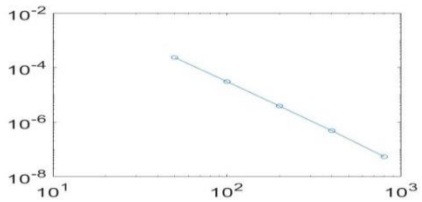

Рис.3. Погрешность решения в лог-шкале. Правая часть $f = \vartheta(x,y) x \sin(\frac{2\pi y}{L_y})$ *.Порядок схемы* $\approx \log_2(10)$.

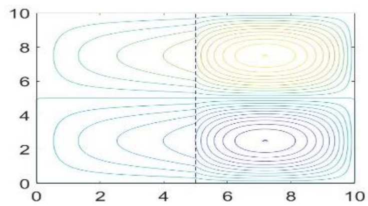

Рис.4. Изолинии решения при $\frac{\vartheta_-}{\vartheta_+} = 5$ *.Линия Г-пунктир.*

Заключение. Получена схема высокого порядка точности для ур. Пуассона с разрывным коэффициентом. Экстраполяция Ричардсона увеличивает порядок до 4,8

Литература. **[1]** Гордин В.А., Цымбалов Е.А. Компактная разностная схема для дифференциального уравнения с кусочно-постоянным коэффициентом. Матем. моделирование. 2017, т.29 (12), СС.16-28.

[2]Гордин В.А. Математика, компьютер, прогноз погоды и другие сценарии математической физики – 2-е изд.- М.:ФИЗМАТЛИТ, 2013, 628с.

Работа поддержана грантом № 20-04-021 в рамках Программы «Научный фонд Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики“ (НИУ ВШЭ)» в 2018 - 2019 гг. и в рамках государственной поддержки ведущих университетов Российской Федерации «5-100».