Двумерная краевая задача для эллиптического уравнения 2-го порядка с разрывным коэффициентом.

Гордин В.А. Шадрин Д.А.

НИУ ВШЭ & Гидрометцентр РФ, Москва, vagordin@mail.ru, shadrin.dmitry2010@yandex.ru

Многие стационарные явления (диффузии, теплопроводности, волновые) описываются эллиптическими уравнениями Пуассона или Гельмгольца:

$$-div(\vartheta(\vec{x})grad(u)) = f(\vec{x}), \quad \vec{x} \in G, \tag{1}$$

$$-div(\vartheta(\vec{x})grad(u)) + \rho(\vec{x})u = f(\vec{x}). \tag{2}$$

В некоторых задачах среда неоднородна, причем ее свойства (описываемые коэффициентом $\vartheta(\vec{x})$) меняются скачком.

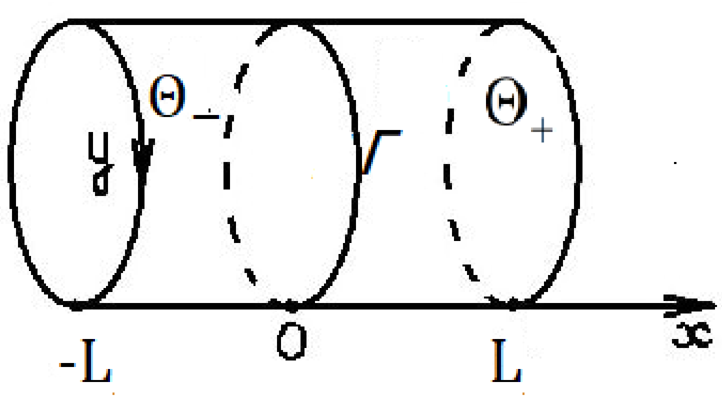


Рис. 1. модельный пример: область G – поверхность цилиндра, линия Γ – его центральная окружность при x=0, ϑ - кусочно-постоянная функция: в левой половине цилиндра ϑ_-, в правой ϑ_+. $x \in [-L, L]$, $y \in [0, 2\pi)$

На внешней границе цилиндра – гран. условия Дирихле, на линии Γ – стыковки (Кирхгофа):

$$[u]=0, \quad (3a) \qquad [\vartheta\partial_n u]=0. \quad (3b)$$

Здесь [ ] - амплитуда скачка на линии Γ, $\partial_n u$ - производная по нормали к линии Γ.

Для определенности будем предполагать, что $L=\pi$. В случае других размеров можно произвести перенормировку.

Компактная аппроксимация: Цилиндр разбивается равномерной сеткой с N точками на окружности и N+1 точкой на образующей. При выбранных размерах G шаги сетки по координатам x и y совпадают $p=\dfrac{2\pi}{N}$. Для каждой точки двумерной сетки $<x_i, y_i>$ определяется пара шаблонов: для u и f. Ищем коэффициенты разностных операторов A_i и P_i на этих шаблонах. A_i и P_i должны быть точны на наборе тестовых функций: (u_k, f_k), где k=1,…, M, $f_k=L[u_k]$, u_k – мономы, L - дифференциальный оператор в левой части уравнения (1), т.е. $\forall k \; A_i u_k = P_i f_k$.

Коэффициенты A_i и P_i находим из СЛАУ порядка M+1. Из коэффициентов A_i и P_i составляем i-е строки “глобальной” СЛАУ $\mathbf{A}\vec{U}=\mathbf{P}\vec{F}$ для решения $u(\vec{x})$ в точках двумерной сетки N x (N-1). Операторы A_i и P_i, имеют ненулевые коэффициенты только на M точках шаблона. В остальных элементах строки “глобальной” СЛАУ нули. Поскольку $M \ll N$, матрицы “глобальной” СЛАУ сильно разреженные.

Точки сетки разделим на 3 типа:

Точки типа I – находятся внутри G, далеко от линии *Г*.

Точки типа II – соседствуют с линией *Г*.

Точки типа III –находятся на линии *Г*.

Точки типа IV –находятся на границе области G.

Точки типа I.

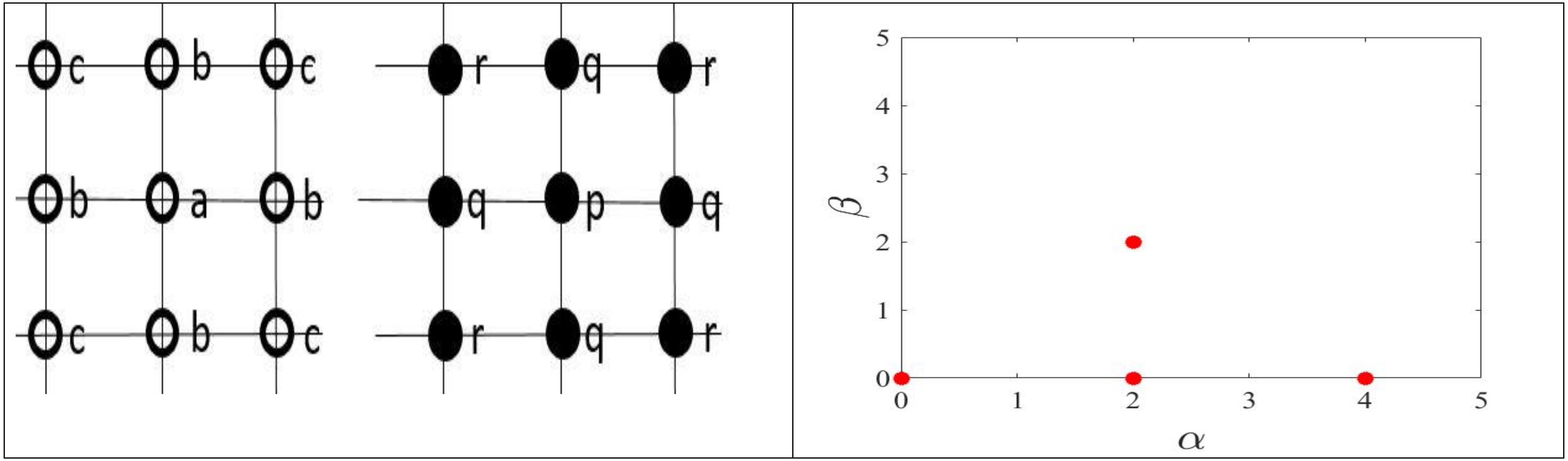


Рис. 2. *В левой части представлены шаблоны, в правой – диаграмма Ньютона для тестовых функций* $x^{\alpha}y^{\beta}$

Из-за симметрии шаблона относительно вертикали и горизонтали степени при x и y четные. Шаги сетки по x и y одинаковы, поэтому уравнения для функций $x^{\alpha}y^{\beta}$ и $x^{\beta}y^{\alpha}$ тоже одинаковы. Поэтому для 4-го порядка достаточно взять тестовые функции: $1, x^2, x^4, x^2y^2$.

Решение малой СЛАУ - коэффициенты: $a = 1, b = -0.2, c = -0.05, r = \bar{r}h^2, p = (0.2 + 4\bar{r})h^2, q = (0.025 - 2\bar{r})h^2$.

Точки типа II.

Для точек около линии Γ следует взять те же шаблоны, что и для точек типа I (см. Рис. 1). При этом стоит учитывать, что правая часть f на линии Γ не определена, но существуют её левый и правый пределы f_+ и f_-. Таким образом, при составлении глобальной СЛАУ для точек слева от Γ будем считать, что правая часть равна f_-, а для точек справа от Γ - f_+
.

Точки типа III

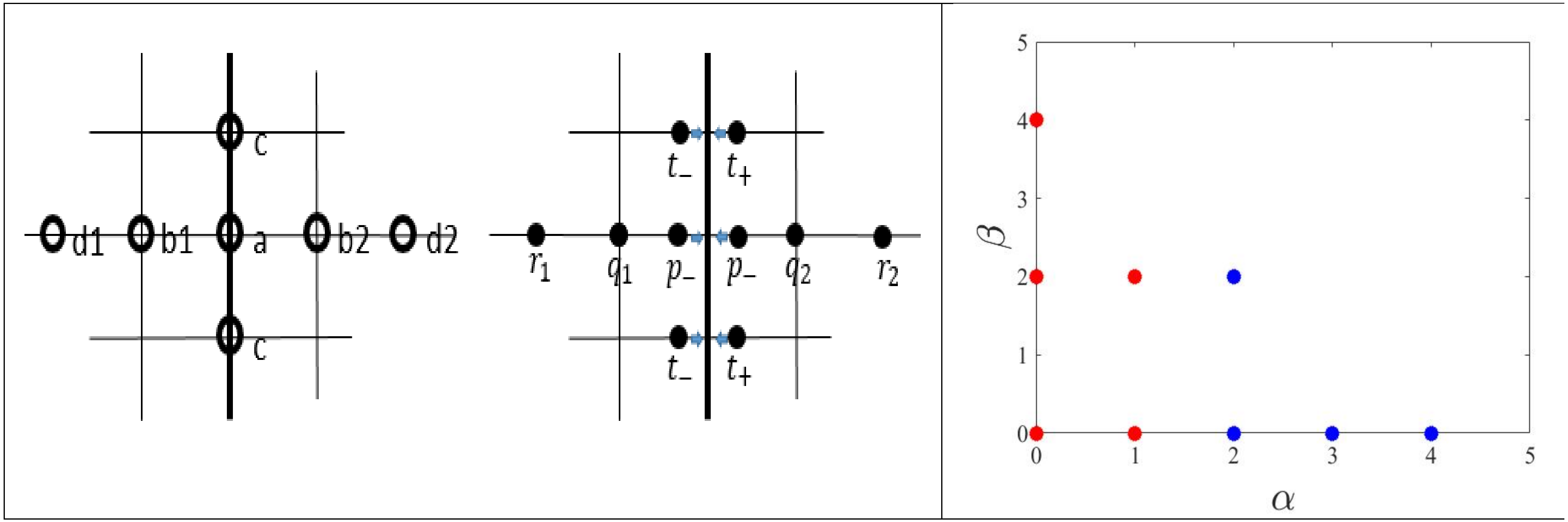


Рис.3. *Шаблоны и диаграмма Ньютона для точек типа III. Синие точки на диаграмме Ньютона обозначают пару тестовых функций (с сигнумом и без).*

Решение дифференциального уравнения (u) – кусочно-аналитическая функция, которая имеет два различных разложения Тейлора слева и справа от Г:

$$u(x,y) = \sum a_{ij} x^i y^j, x \le 0$$
$$u(x,y) = \sum b_{ij} x^i y^j, x \ge 0$$

Из условий стыковки Кирхгофа (3а,б) получаем: $a_{0j} = b_{0j}$, $\vartheta_- a_{0j} = \vartheta_+ b_{0j}$. Тестовые функции: $1, \frac{x}{\vartheta}, x^2, sign(x)x^2, x^3, sign(x)x^3, x^4, sign(x)x^4, y^2, \frac{y^2 x}{\vartheta}, x^2 y^2, sign(x)x^2 y^2, y^4$.

Правая часть на линии Г – двузначна (f_+ и f_-), поэтому шаблон для правой части имеет по два коэффициента в точках на Г (t_- *и* t_+, p_- *и* p_+). Веса t_-, p_- стоят при левом пределе (f_-), а t_+, p_+ - при правом (f_+) .

Решение малой СЛАУ: численные значения коэффициентов:

$$a = 1, c = -\frac{1}{5}, b_1 = -\frac{2\vartheta_+}{\vartheta_+ + \vartheta_-}, b_2 = -\frac{2\vartheta_+}{\vartheta_+ + \vartheta_-}, d_1 = \frac{\vartheta_-}{15(\vartheta_+ + \vartheta_-)}, d_2 = \frac{\vartheta_+}{15(\vartheta_+ + \vartheta_-)},$$

$$r_1 = r_2 = -\frac{h^2}{36(\vartheta_+ + \vartheta_-)}, q_1 = q_2 = -\frac{7h^2}{90(\vartheta_+ + \vartheta_-)}, t_- = t_+ = \frac{h^2}{60(\vartheta_+ + \vartheta_-)}, p_- = p_+ = \frac{7h^2}{60(\vartheta_+ + \vartheta_-)}.$$

Для точек типа IV – обычное условие Дирихле

Составление матриц “глобальной” СЛАУ

После определения коэффициентов разностных операторов для каждой точки составляются глобальные матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{P}$. Матрица $\mathbf{A}$ – квадратная, её размеры $M \times M$ (M – число узлов сетки). Матрица **P** учитывает точки на Г дважды, так как правая часть (f) двузначна, поэтому её размеры $M \times (M + N)$.

Для решения этой системы матрица **A** обращается, - необходимо обеспечить её хорошую обусловленность. Локальные операторы A_i точны на константе, поэтому $\forall i \ \sum_j a_{ij} = 0$. Если $a_{ii} > 0$, а остальные веса отрицательные, то имеем:

$$\sum_{j \neq i} | a_{ij} | = a_{ii} \ . \qquad (4)$$

Нуль лежит на краю кругов Гершгорина, содержащих спектр матрицы **A**. В уравнениях СЛАУ, отвечающих граничным точкам цилиндра, диагональ доминирует. Поэтому есть основания полагать, что нуль не войдет в спектр **A**, и ее можно будет обратить.

Тесты, подтверждающие порядок схемы.

Порядок схемы оценивался следующим образом. Сначала выбиралась гладкая функция $\tilde{u}$, затем строилось точное решение $u(x,y) = g(x,y)\tilde{u}(x,y)$, где g – кусочно линейная функция по x: $g(x,y) = 1 + a(y)(x + |x|)$. Функция a(y) выбиралась так, чтобы точное решение u удовлетворяло условиям Кирхгофа (3а,б). Отсюда $a(y) = \partial_x \tilde{u}(0,y)\dfrac{\vartheta_- - \vartheta_+}{2\vartheta_+ \tilde{u}(0,y)}$.

Погрешность оцениваем, как C-норму разности сеточных функций (точного решения и решения схемы). Далее представлены графики погрешности в зависимости от N для трех разностных схем: классической, компактной, компактной с экстраполяцией Ричардсона.

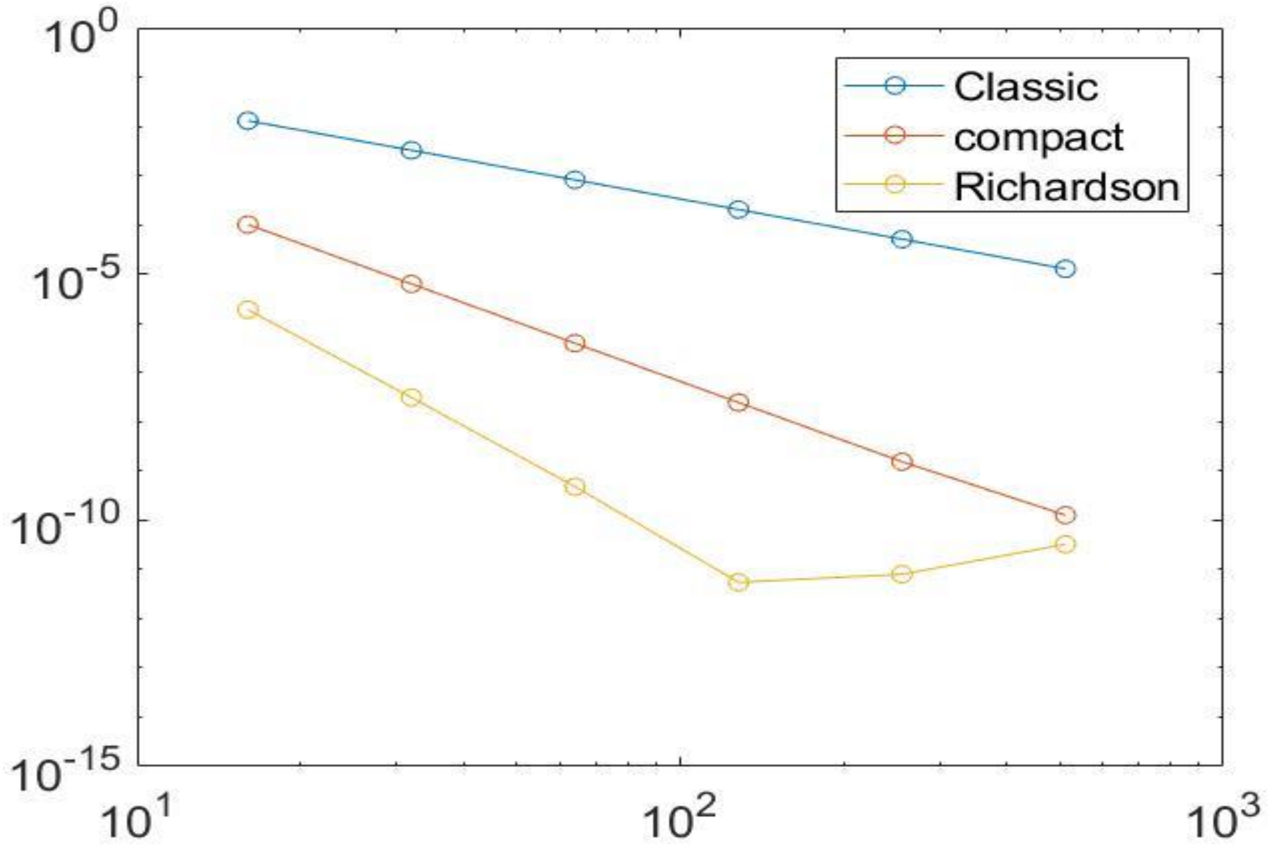


Рис.4. *Погрешность схемы в зависимости от разрешения N в lg-системе. В качестве точного решения выбиралась кусочно-линейная функция по x:*

$$u = \begin{cases} \vartheta_+ x\sin(y), & x \le 0 \\ \vartheta_- x\sin(y), & x \ge 0 \end{cases}.$$

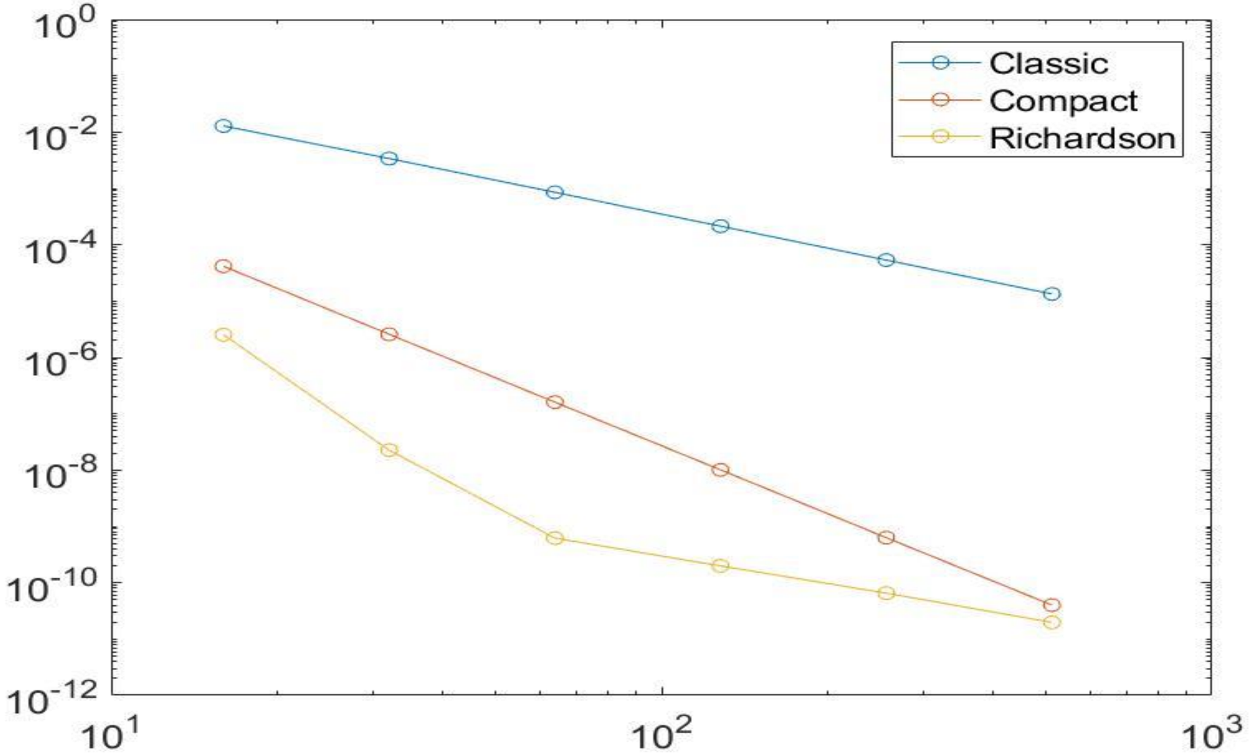


Рис.5. *Погрешность схемы в зависимости от разрешения N в* lg-*системе.*
Здесь $\tilde{u} = x^6 \sin(y)$.

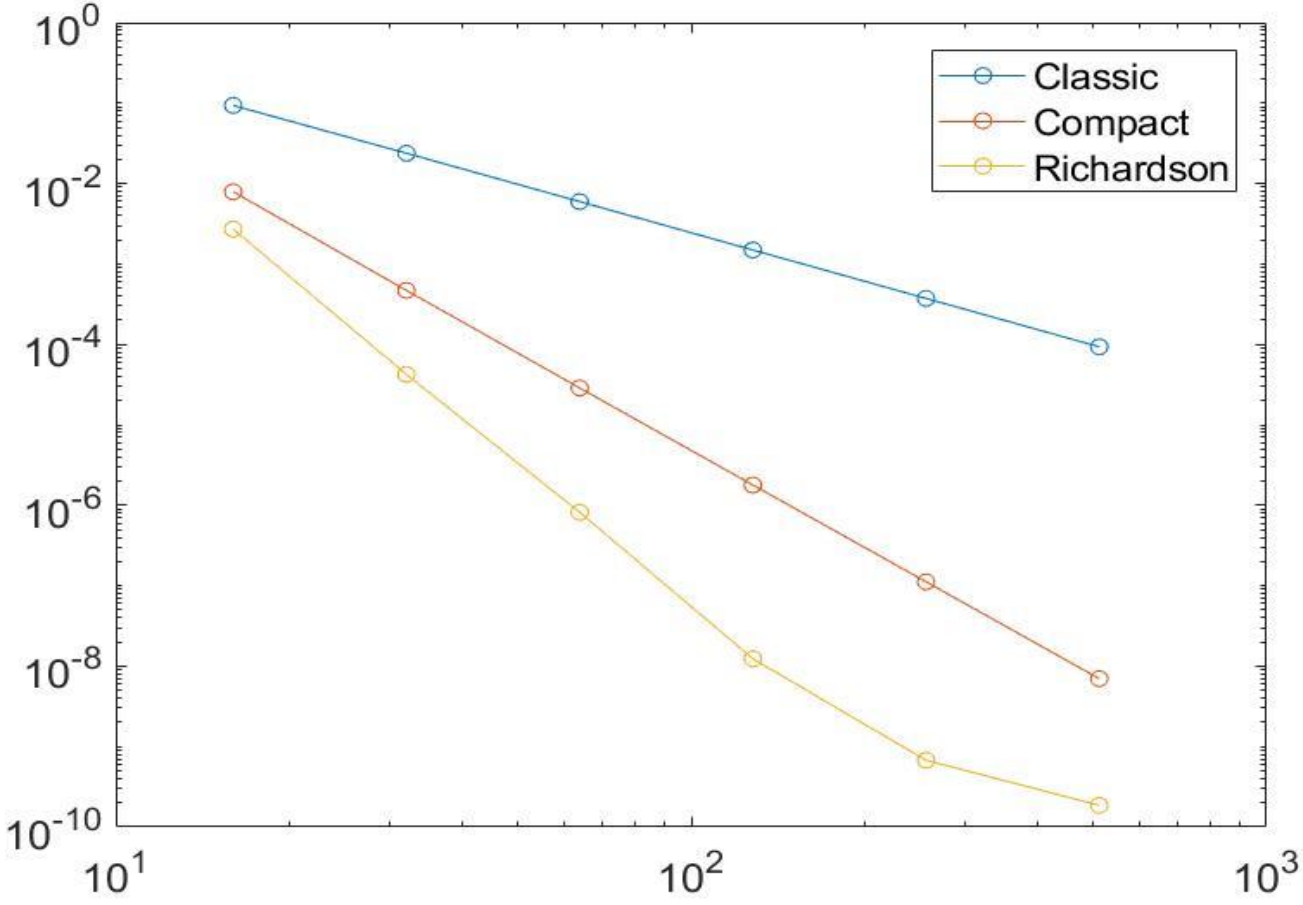


Рис.6. *Погрешность схемы в зависимости от разрешения N в lg-системе.*
Здесь $\tilde{u} = \sin(y + x) + 2$.

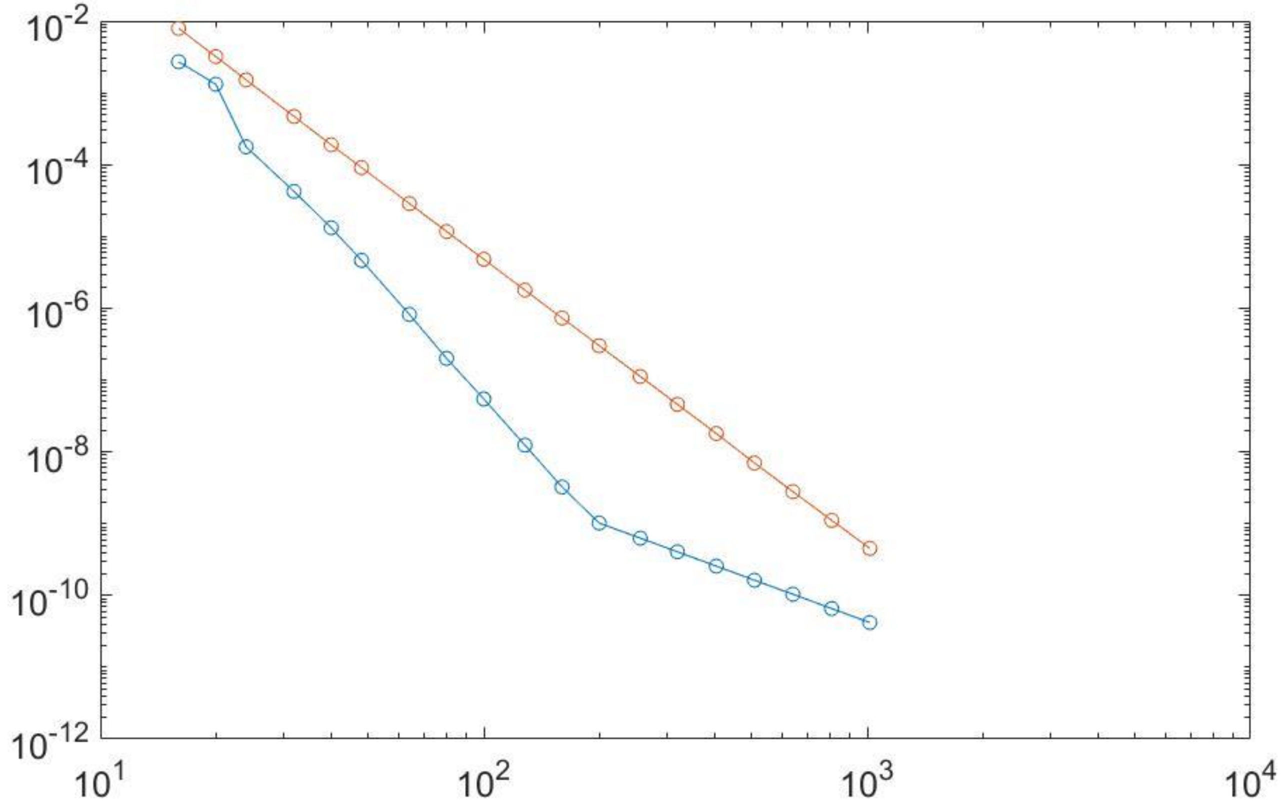


Рис.7. *Сравнение погрешности компактной схемы с применением экстраполяции Ричардсона и без. Здесь* $\tilde{u} = \sin(y + x) + 2$.

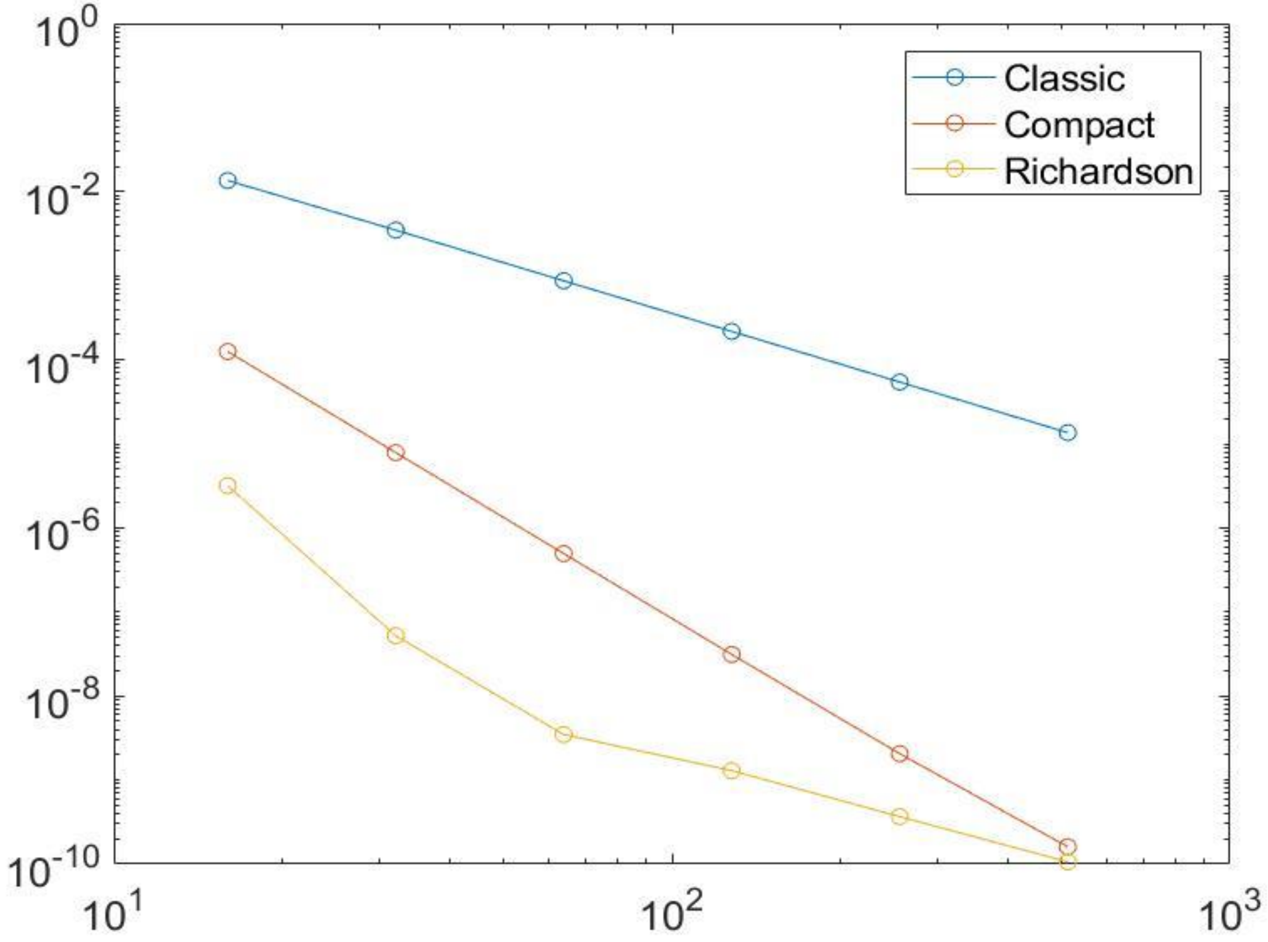


Рис.8. *Погрешность схемы в зависимости от разрешения N в lg-системе.*
$\tilde{u} = \sin(x)$

Пример решения задачи Дирихле.

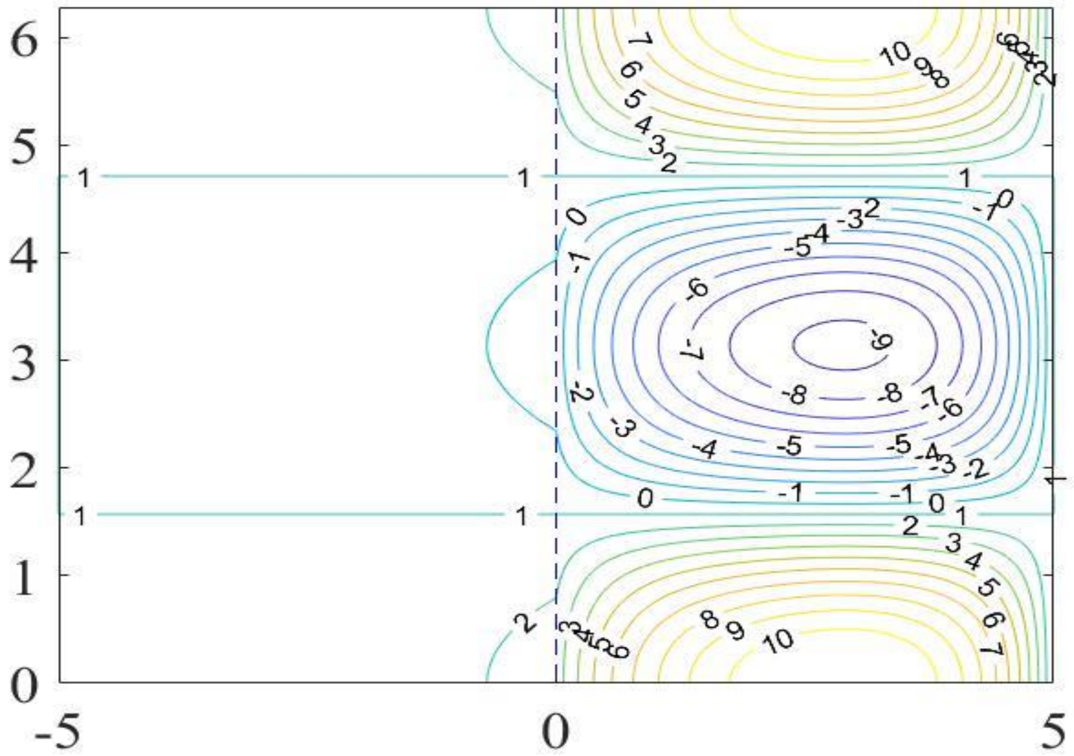


Рис.9. *Изолинии решения задачи при* $\kappa = 10$*, правой части* $f = \cos(y)$ *и граничных условиях:*
$U(L, y) = U(-L, y) \equiv 1$

Эксперименты для случая постоянного коэффициента ϑ.

В данном случае линии излома Γ не существует, поэтому все точки сетки имеют тип I или IV. Шаблоны компактной схемы для внутренних точек показаны на Рис. 2. За точное решение в данном случае можно взять произвольную функцию из C^4. Далее представлены численные эксперименты, подтверждающие порядок схемы.

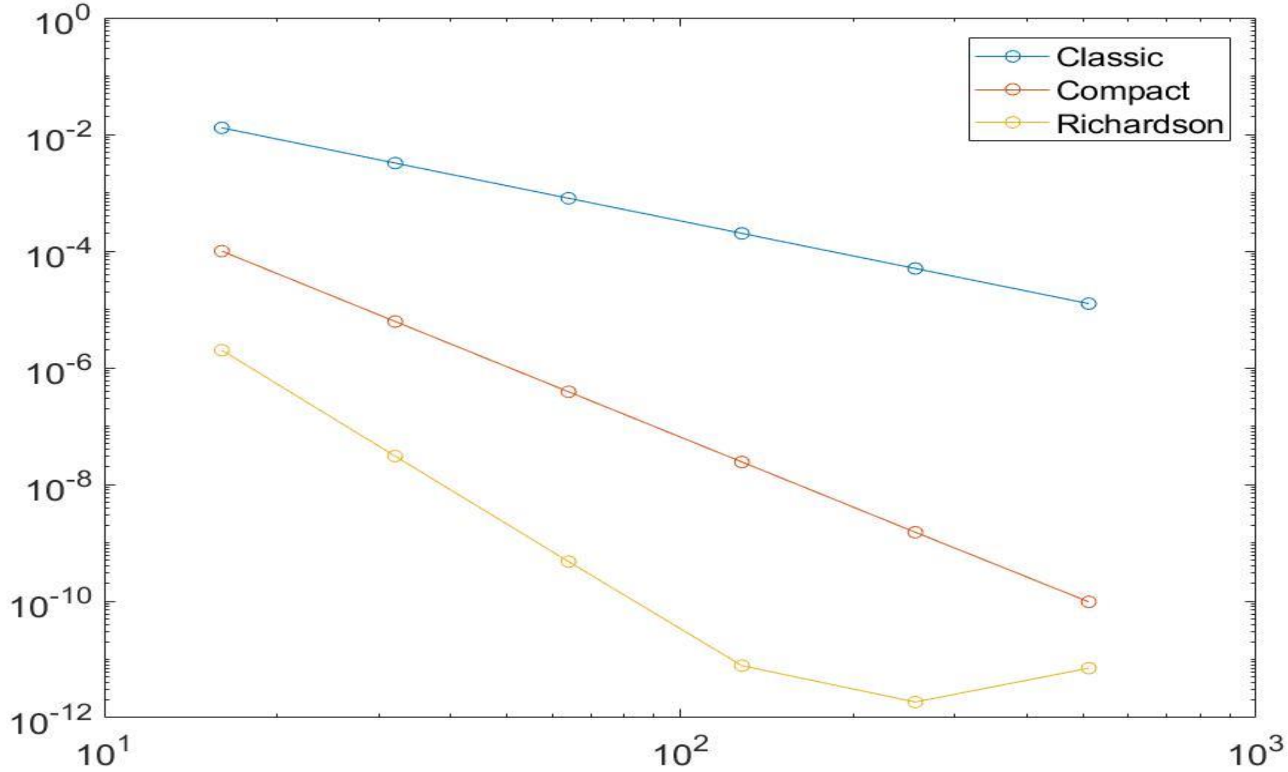


Рис.10. *Погрешность схемы в зависимости от разрешения N в lg-системе.*
Точное решение $u = \sin(x)$

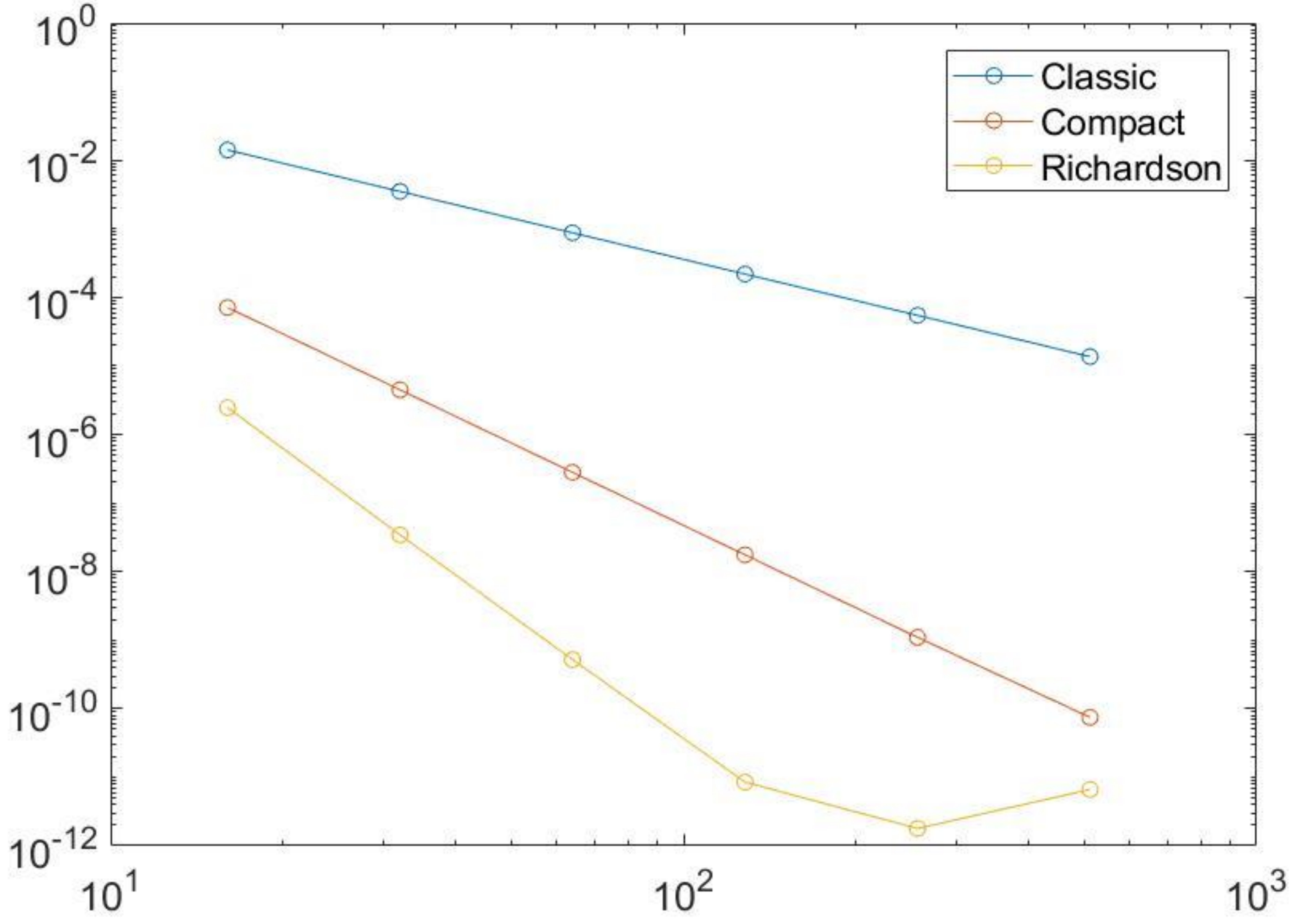


Рис.11. *Погрешность схемы в зависимости от разрешения N в lg-системе. Точное решение* $u = \sin(x+y)$

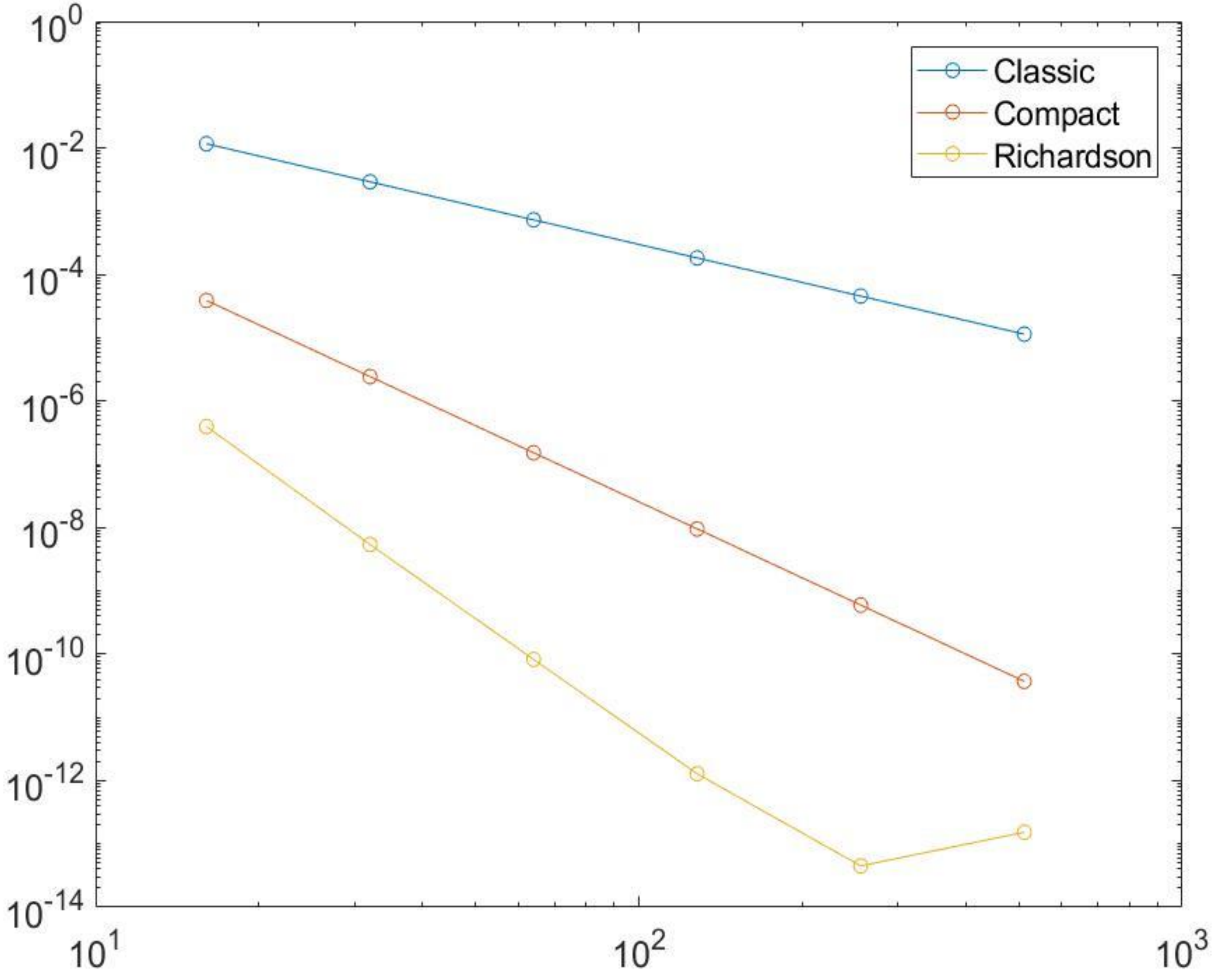


Рис.12.
Погрешность схемы в зависимости от разрешения N в lg-системе.
Точное решение
$u = x^6 \sin(x)$

Классическая дивергентная схема (для сравнения с компактной)

Идея дивергентной схемы состоит в замене частных производных разностными:

$$(u_x')_{i-1/2,j} = \frac{u_{ij} - u_{i-1,j}}{h}, \qquad (u_y')_{i,j-1/2} = \frac{u_{ij} - u_{i,j-1}}{h}.$$

Получаем аппроксимацию для оператора Лапласа:

$$L[u]_{ij} = \frac{u_{ij-1} + u_{ij+1} + u_{i-1j} + u_{i+1j} - 4u_{ij}}{h^2}$$

В точках **I** и **II** аппроксимируется уравнение (1): $\vartheta L[u]_{ij} = f_{ij}$.

В точках типа **III** аппроксимируем решение двумя квадратными трехчленами слева и справа от линии Γ и запишем условие стыковки (3), которое даст соотношение на коэффициенты трехчленов. Получаем уравнение:

$$\vartheta_- u_{i-2j} - 4\vartheta_- u_{i-1j} + 3(\vartheta_- + \vartheta_+)u_{ij} - 4\vartheta_+ u_{i+1j} + \vartheta_+ u_{i+2j} = 0. \qquad (5)$$

Экстраполяция Ричардсона для повышения порядка схемы

Пусть некий алгоритм, зависящий от шага сетки $h \sim \dfrac{1}{N}$, имеет порядок точности ν, т.е. имеет место разложение:

$$u_h(\vec{x}) = u(\vec{x}) + C(\vec{x})h^{\nu} + o(h^{\nu}) \qquad (5)$$

При шаге $2h$ получаем:

$$u_{2h}(\vec{x}) = u(\vec{x}) + C(\vec{x})2^{\nu} h^{\nu} + o(h^{\nu}) \qquad (6)$$

Из (5-6) получаем $C(\vec{x}) = \dfrac{u_h(\vec{x}) - u_{2h}(\vec{x})}{1-2^{\nu}}$, $u(\vec{x}) = u_{2h}(\vec{x}) - C(x)(2h)^{\nu} + o(h^{\nu})$.

Естественно, сравнивать значения $u_{2h}(\vec{x})$ и $u_h(\vec{x})$ можно только на крупной сетке с шагом $2h$.

Порядок компактной схемы примерно равен 4, поэтому в экспериментах мы брали $\nu = 4$.

Решение уравнения Гельмгольца.

Компактная аппроксимация уравнения Гельмгольца (2) сводится к аппроксимации уравнения Пуассона заменой: $g = f - \rho(x, y)u$. Составим глобальную систему для u и g:

$Au = Pg \Leftrightarrow (A + \rho P)u = Pf \Leftrightarrow Bu = Pf$, здесь матрица $B = A + P\rho$, ρ - матрица со значениями коэффициента ρ в диффуре (2) для соответствующей точки сетки. Если коэффициент ρ - положителен, то спектр дифференциального оператора будет тоже положительным, а матрица **A** будет хорошо обусловленной. Если ρ - отрицателен, то гарантии хорошей обусловленности матрицы **A** - нет.

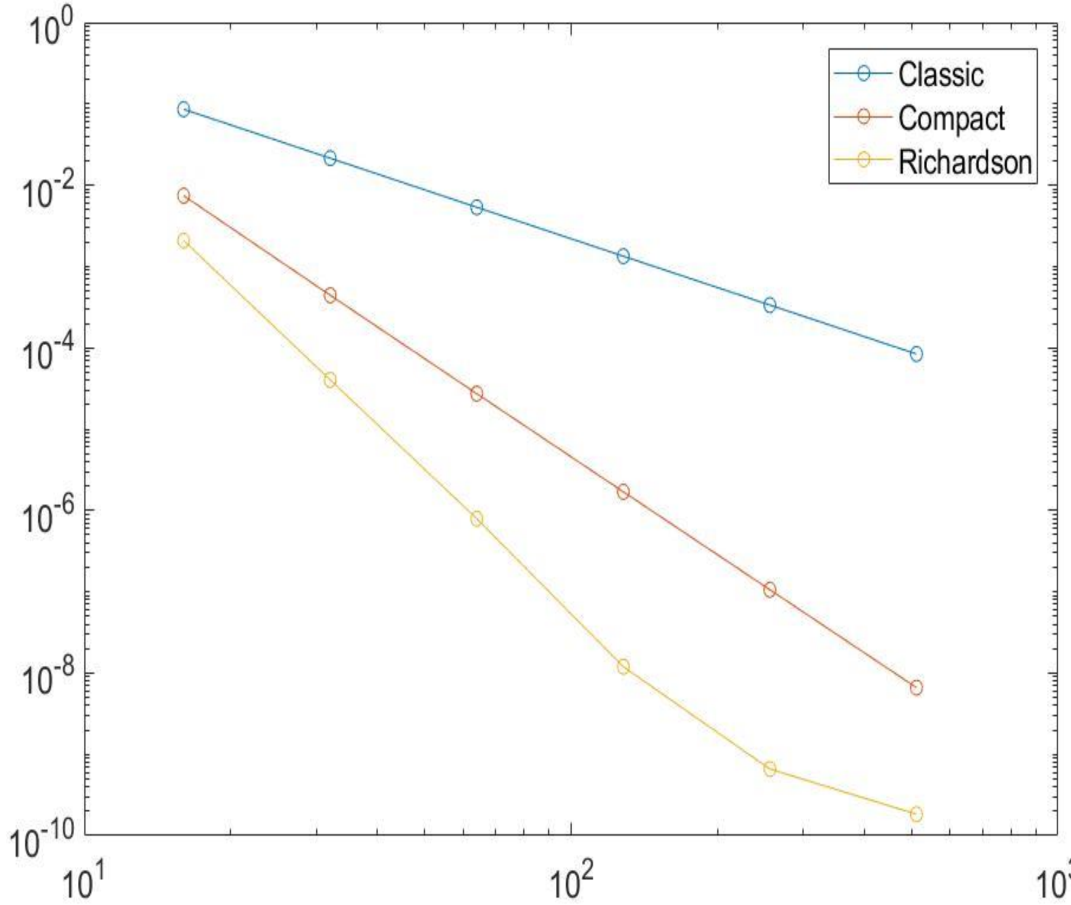


Рис.13. *График погрешности схемы в зависимости от N для уравнения Гельмгольца. Здесь* $\tilde{u} = x^6 \sin(y)$. *Коэффициент*

$$\rho(x, y) = \exp\left(-\frac{1}{y(y-2\pi)}\right)$$

положителен

Случай разрыва в младшем члене уравнения Гельмгольца ρ.

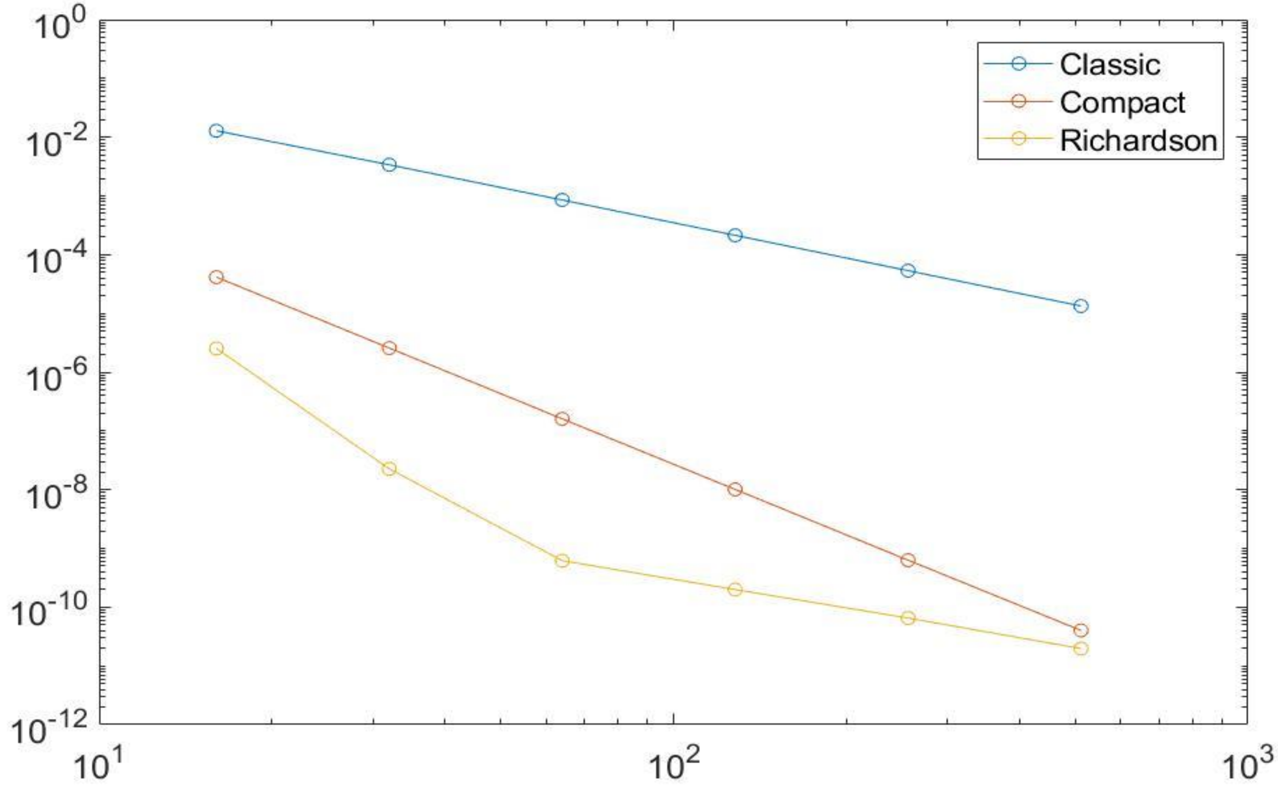


Рис.14. *График погрешности схемы в зависимости от N для уравнения Гельмгольца.* *Здесь* $\tilde{u} = \sin(y+x)+2$. *Коэффициент*

$$\rho(x,y)=\begin{cases}1, & x\le 0\\ 10, & x\ge 0\end{cases}.$$

Обобщенные собственные функции задачи при условиях Дирихле.

Обобщенными собственными функциями (ОСФ) краевой задачи для оператора (1) назовем функции u, такие что

$$-div\,\vartheta(x,y)\;grad(u) = \lambda\vartheta(x,y)u\,,$$

u – периодическая по y, удовлетворяющая стыковочным условиям (3) и граничным однородным условиям Дирихле ($u(-\pi,y) = u(\pi,y) = 0$). Из периодичности u получаем

$$u(x,y) = \exp(imy)Y_\mu(x),$$

где Y_μ – решение уравнения: $-d_x\vartheta(x)d_xY_\mu(x) = \mu^2\vartheta(x)Y_\mu(x)$. Решая это уравнение слева и справа от Г, получаем общий вид ОСФ: $Y_\pm = a_\pm \sin\mu x + b_\pm \cos\mu x$.

Из стыковочных условий (3) выражаем $b_+ = b_-, a_+ = \dfrac{\vartheta_-}{\vartheta_+}a_-$.

Осталось определить значения μ из условий Дирихле на внешних границах:

$$\frac{\vartheta_-}{\vartheta_+}\cos(\pi\mu)\sin(\pi\mu) + \sin(\pi\mu)\cos(\pi\mu) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{\vartheta_-}{\vartheta_+}\right)\sin(2\pi\mu) = 0. \qquad (7)$$

Из уравнения (7) $\mu_j = \frac{j}{2}, \textit{где } j - \textit{целое}$. Значения μ и m определяют собственные функции.

Оценка точности схемы на обобщенных собственных функциях.

Собственные функции определяются с точностью до ненулевого множителя. Это прямая, а не вектор. Поэтому для оценки точности разностной схемы на обобщенных собственных функциях используется параметр: $\alpha = \arccos\left(\frac{(u, u_N)}{\sqrt{(u_N, u_N)(u, u)}}\right)$. Здесь u – сама обобщенная собственная функция, u_N - решение компактной схемы.

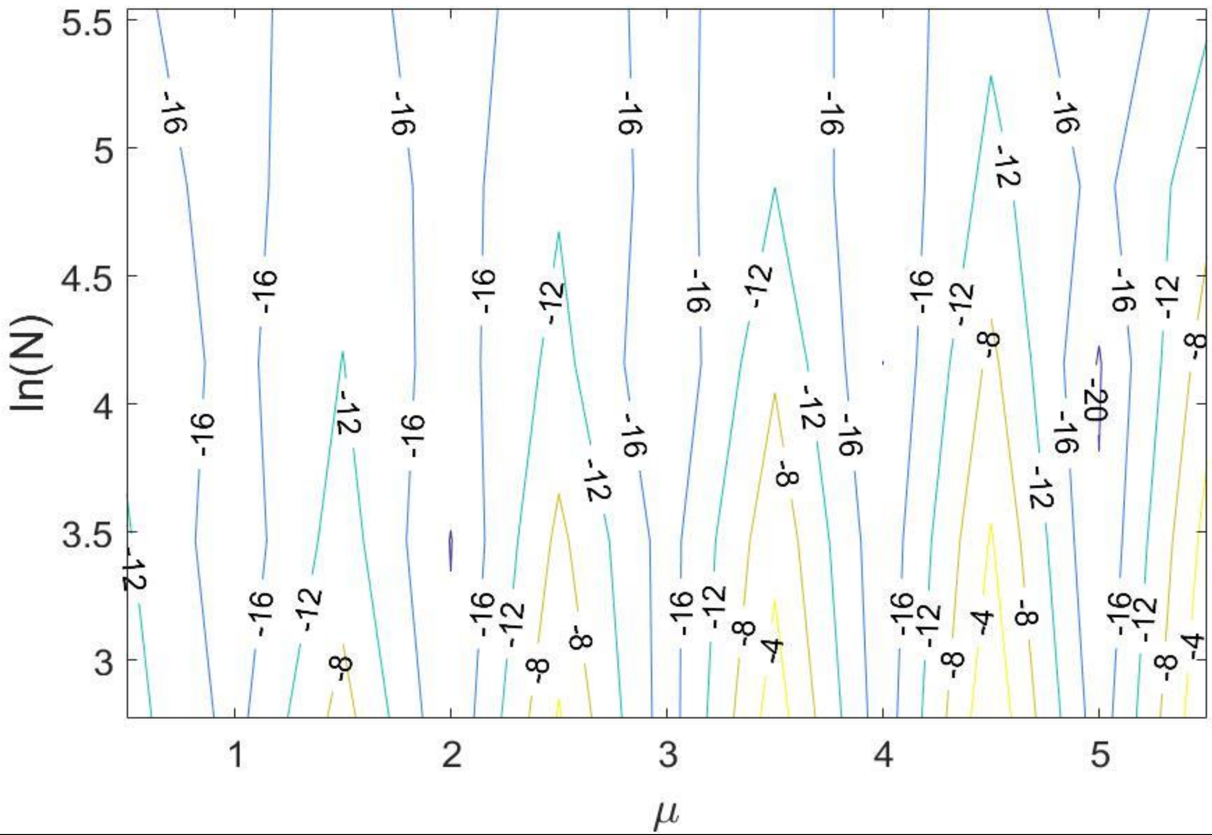


Рис. 15. *Изолинии для углового параметра* α*, в зависимости от обобщенного собственного числа* μ *и* $\ln(N)$ *при постоянном m=1.Здесь N – число подотрезков сетки.*

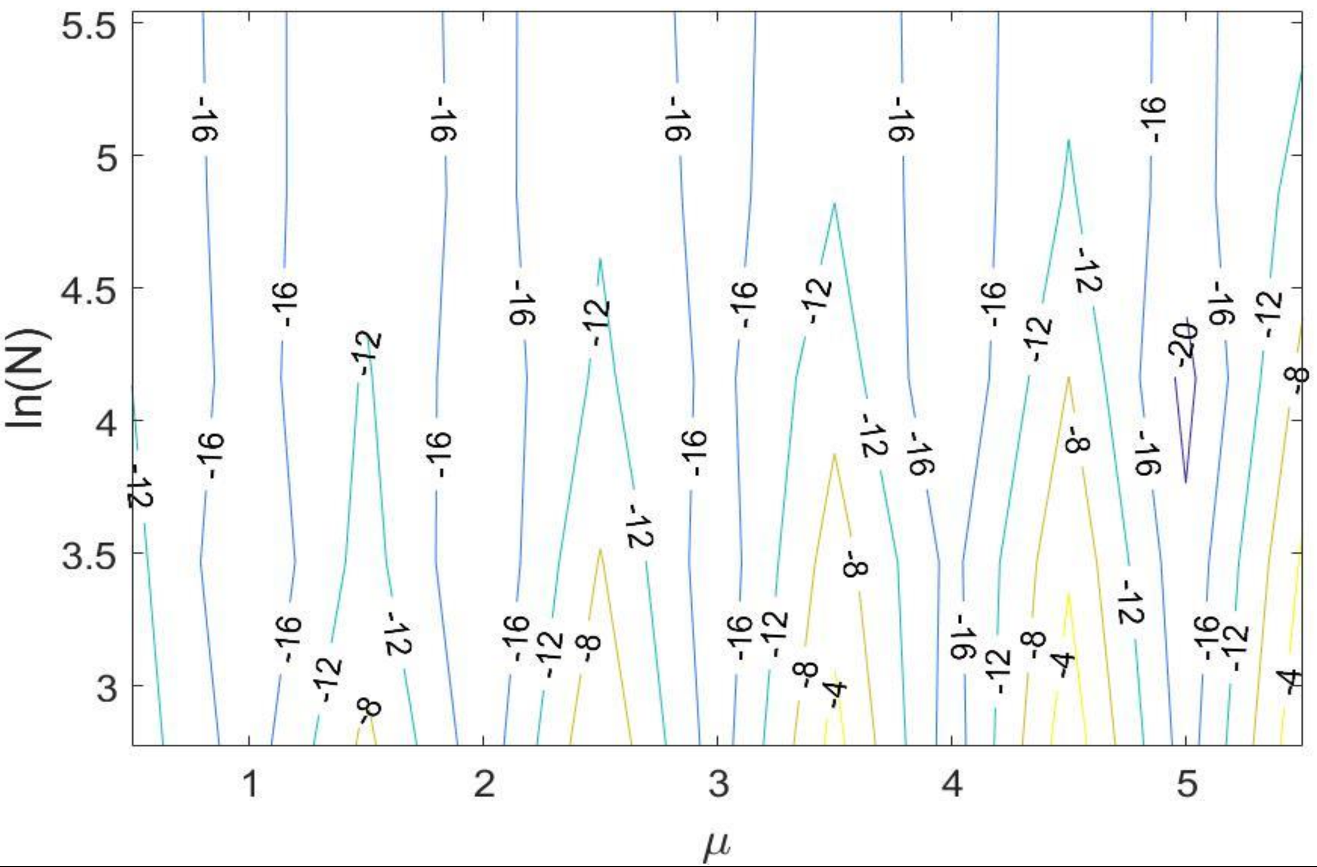


Рис. 16. *Изолинии для параметра* α, *в зависимости от* μ *и* $\ln(N)$ *при постоянном* m*=2.*

Другие внешние граничные условия

Решаем дифференциальное уравнение (1). На левой внешней границе оставим условие Дирихле, на правой – поставим однородное условие Неймана:

$$\partial_x u(L,y)=0. \tag{8}$$

Аппроксимация условия Неймана на шаблоне Рис. 11 и набора тестовых мономов, удовлетворяющих условиям 8.

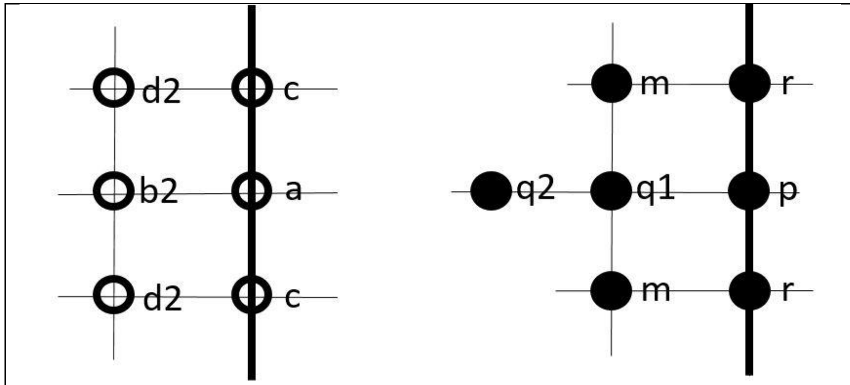
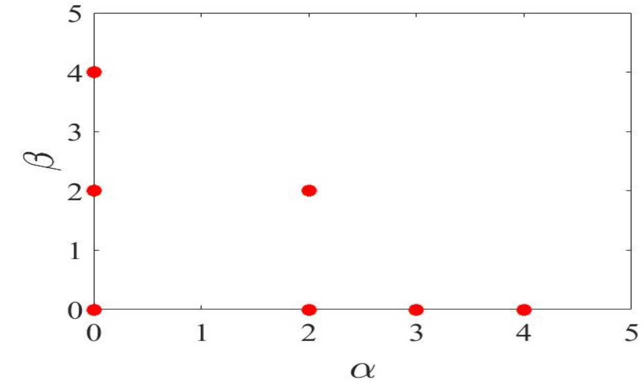


Рис.17 *Шаблон для аппроксимации граничных условий Неймана и диаграмма Ньютона для тестовых функций* $1, x^2, x^3, x^4, y^2, y^2x^2, y^4$



Степеней свободы для коэффициентов при таких шаблонах на две больше чем тестовых функций. Зададим условия нормировки: $a=1, q_1=\bar{q}_1 h^2$, зависящее от параметра $\bar{q}$. получим следующие значения коэффициентов: $a=1,\ c=-0.2,\ d_2=-0.1,\ b_2=-0.4,\ p=(0.275-\bar{q}_1)h^2,\ r=\left(-0.05+\dfrac{\bar{q}_1}{2}\right)h^2,$

$m = \left(0.075 - \dfrac{\overline{q}_1}{2}\right)h^2, q_1 = \overline{q}_1 h^2, q_2 = -0.025h^2$. Эксперименты показывают, что оптимальное $\overline{q}$ лежит в диапазоне от 0.15 до 0.19.

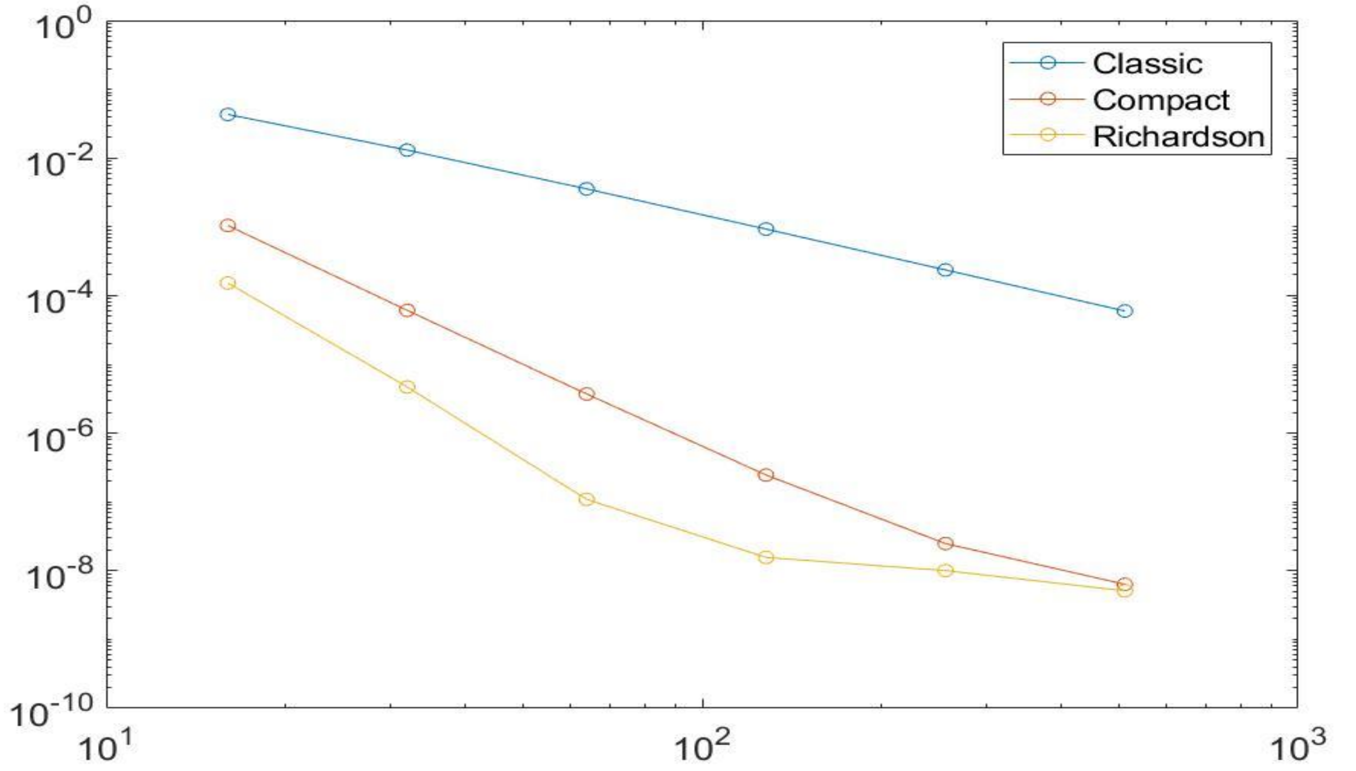


Рис. 18. *Графики погрешности решения смешанной задачи для* $\tilde{u} = (L - x)^5 \sin(y)$.