

1. Тематический план учебной дисциплины

| № | Название темы | Семинары | Самостоятельная работа | Всего часов |
|-----------------|--|-----------|------------------------|-------------|
| 1 модуль | | | | |
| 1. | Числовые функции. Последовательности. Предел последовательности. | 2 | 2 | 4 |
| 2. | Предел функции. | 2 | 2 | 4 |
| 3. | Непрерывность функции. | 2 | 2 | 4 |
| 4. | Асимптоты и графики функции. | 2 | 2 | 4 |
| 5. | Равномерная непрерывность функции. | 2 | 2 | 4 |
| 2 модуль | | | | |
| 6. | Производная. Формулы и правила вычисления производных. Дифференциал функции. | 2 | 2 | 4 |
| 7. | Геометрический и физический смысл производной. | 2 | 2 | 4 |
| 8. | Производные и дифференциалы высших порядков. | 2 | 2 | 4 |
| 9. | Теоремы о среднем для дифференцируемых функций. | 2 | 2 | 4 |
| 10. | Правило Лопиталю. | 2 | 2 | 4 |
| 11. | Формула Тейлора. | 2 | 4 | 6 |
| 12. | Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора. | 2 | 4 | 6 |
| Итого | | 24 | 28 | 52 |

2. Содержание программы дисциплины

1. Теория пределов и непрерывных функций одной переменной.

Числовые последовательности. Примеры. Понятие предела последовательности. Теорема о единственности предела сходящейся последовательности. Ограниченные и неограниченные последовательности. Теорема об ограниченности сходящейся последовательности. Теорема о переходе к пределу в неравенствах. Теорема о вынужденном пределе. Теорема о сходимости монотонных ограниченных последовательностей. Определение числа ε . Бесконечно малые последовательности. Связь со сходящимися последовательностями. Арифметические свойства бесконечно малых и сходящихся последовательностей. Бесконечно большие последовательности, их связь с бесконечно малыми. Арифметические свойства для последовательностей, имеющих конечные и бесконечные пределы. Неопределенности. Определение предела функции в точке в терминах окрестностей, неравенств (Коши) и последовательностей (Гейне). Теорема об эквивалентности этих определений. Односторонние пределы, их связь с двусторонними. Пределы функции в бесконечности. Арифметические свойства функций, имеющих пределы (конечные или бесконечные) в точке или в бесконечности. Неопределенности. Теоремы о переходе к пределу в неравенствах, о вынужденном пределе. Теорема о пределе сложной функции. Первый и второй замечательные пределы. Сравнение функций, o -символика. Определения непрерывности функции в точке, их эквивалентность. Точки разрыва, их классификация. Непрерывность основных элементарных функций.

Арифметические свойства непрерывных функций. Теорема о непрерывности сложной функции.

Теоремы о локальной ограниченности и локальном сохранении знака для функций, непрерывных в точке.

Свойства функций, непрерывных на отрезке (первая и вторая теоремы Вейерштрасса, теорема Коши).

Критерий непрерывности монотонной функции на промежутке.

Критерий существования и непрерывности обратной функции на промежутке.

2. Дифференциальное исчисление для функций одной переменной.

Понятие производной функции в точке. Геометрический смысл производной.

Уравнение касательной к графику функции в точке.

Понятие дифференцируемости функции в точке. Необходимое и достаточное условие дифференцируемости.

Правила дифференцирования. Теорема о дифференцируемости и производной сложной функции. Теорема о дифференцируемости и производной обратной функции. Таблица производных основных элементарных функций.

Производные функций, графики которых заданы параметрически.

Понятие гладкой кривой, касательный вектор к гладкой кривой в точке.

Понятие дифференциала (первого) функции в точке. Геометрический смысл дифференциала. Инвариантность формы первого дифференциала.

Производные и дифференциалы высших порядков функции одной переменной в точке.

Понятие об экстремумах функции одной переменной. Локальный экстремум.

Необходимое условие для внутреннего локального экстремума (теорема Ферма).

Основные теоремы о дифференцируемых функциях на отрезке (теоремы Ролля, Лагранжа и Коши). Правило Лопиталя.

Многочлен Тейлора и формула Тейлора для функций одной переменной с остаточным членом в форме Пеано и Лагранжа. Формулы Тейлора-Маклорена для основных элементарных функций. Применения для приближенных вычислений.

3. Оценочные средства для текущего контроля и аттестации студента

Образцы задач контрольной работы и экзаменационных работ по математическому анализу.

Типовые задачи для подготовки к экзаменационной работе за 1 и 2 модуль

1. Доказать по определению, что $\frac{(n^5+3n)}{n^5+4} = 1$. В ответ записать явную формулу для подходящего номера $N(\varepsilon)$.

2. Определить, существует ли $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ и, в случае существования, найти предел:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 0, \quad a_{n+2} = \frac{3n+a_{n+1}}{4}.$$

3. С помощью Критерия Коши исследовать на сходимость последовательность:

$$a_n = \frac{\arctg(1+\frac{1}{n})}{\sqrt[4]{1}} + \frac{\arctg(2+\frac{1}{n})}{\sqrt[4]{2}} + \dots + \frac{\arctg(n+\frac{1}{n})}{\sqrt[4]{n}}$$

4. Найти функцию вида Ax^n , эквивалентную функции $\frac{4x^4-1}{x^4+1} + (x + \sqrt[3]{ch x})^{\sqrt[3]{\cos \cos x - ch x}}$ при $x \rightarrow 0$.

5. Вычислить производную функции: а) $y = \frac{3-\sin \sin x}{2} \sqrt{x-2} \sin \sin x + 2 \arcsin \arcsin \frac{1+\sin \sin x}{\sqrt{2}}$,

б) $y = (3 - \arctg(5x^3 - \sqrt{3x}))^{\sin \sin(x^2+4x^6)}$, в) $x = ctg 2t$, $y = \frac{2 \cos \cos 2t - 1}{2 \cos \cos t}$, $0 < t < \frac{\pi}{2}$,

д) $4xy^3 + \ln \ln \sqrt[3]{x/(x+y)} = 0$

6. Провести полное исследование функции $y = (x-4)e^{\frac{1}{x+2}}$ и построить график.

7. Исследовать функцию $y = \frac{x^6-1}{\sqrt{1-x^4}}$ на равномерную непрерывность на множестве $X = (-1; 1)$.

8. Разложить функцию $\sqrt{1+e^{x^2}}$ по формуле Тейлора до $o(x^4)$ при $x \rightarrow 0$.

9. Вычислить предел: a) $\left(\frac{\operatorname{tg}(x-x^3)}{\operatorname{arctg}(x-2x^3)}\right)^{-\frac{1}{x^2}}$, b) $x \left(\pi - 2 \operatorname{arcsin} \operatorname{arcsin} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right) \right)$, c)

$$\frac{\operatorname{arcsin} \operatorname{arcsin} x + 3 \cos \cos x - 3\sqrt[3]{1+x}}{1 + \ln \ln(1+x) - e^x}$$