

КОМПАКТНАЯ РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

В.А. Гордин, А.С. Романов.

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», (ФЭН & ФКН) & Гидрометцентр РФ

Простейшая модель газо- и гидро-динамики – уравнение Бюргерса:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

где $u = u(t, x)$ - скорость, D - коэффициент вязкости, $x \in [0, 1]$, периодичность по x .

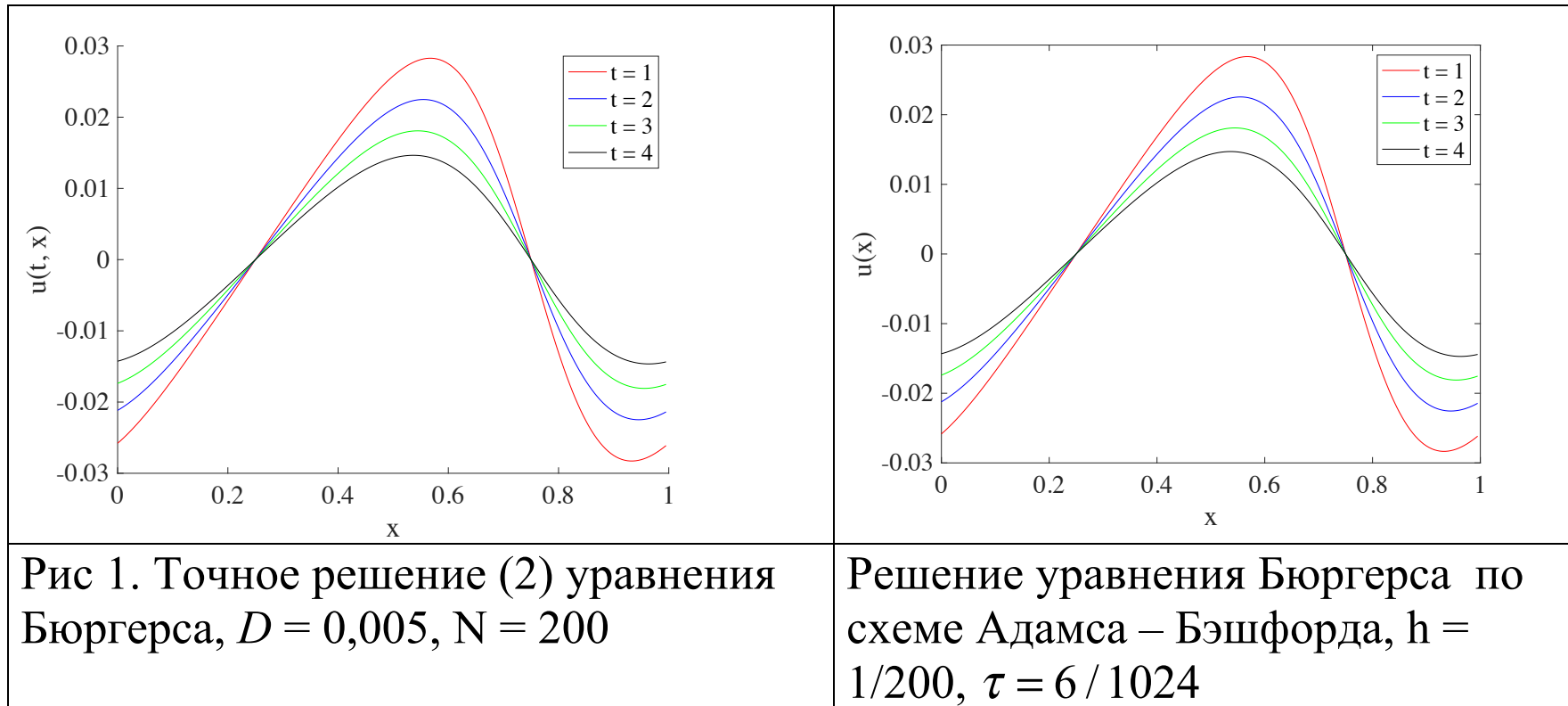
Для компактной аппроксимации его удобно переписать в виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad f = -u^2 / 2. \quad (1)$$

С помощью замены Форсайта – Флорина – Коула – Хопфа получаем из решения $\sin(2\pi x) \exp(-4\pi^2 Dt)$ обычного уравнения диффузии точное решение уравнения (1):

$$u(t, x) = \frac{-4D\pi \cos(2\pi x)}{2 \exp(4\pi^2 Dt) + \sin(2\pi x)}. \quad (2)$$

На нем оценим погрешности различных разностных схем.



Аппроксимируем дифференциальное уравнение (1) с условием периодичности на сетке $x_j = jh$, $h = 1 / N$, $j = 0, \dots, N$; $t = n\tau$, где τ - шаг по времени, $\tau = T / M$, h - шаг по пространству; $\forall n \quad u_0^n = u_N^n$.

Компактная разностная аппроксимация

Однослойная неявная (двухуровневая) по времени схема с 3 порядком точности на шаблонах 3x2 для вычисления значений $\{u_j^{n+1}\}$:

$$a_1 u_{j-1}^{n+1} + b_1 u_j^{n+1} + c_1 u_{j+1}^{n+1} + a_0 u_{j-1}^n + b_0 u_j^n + c_0 u_{j+1}^n = p_1 f_{j-1}^{n+1} + q_1 f_j^{n+1} + r_1 f_{j+1}^{n+1} + p_0 f_{j-1}^n + q_0 f_j^n + r_0 f_{j+1}^n \quad (3)$$

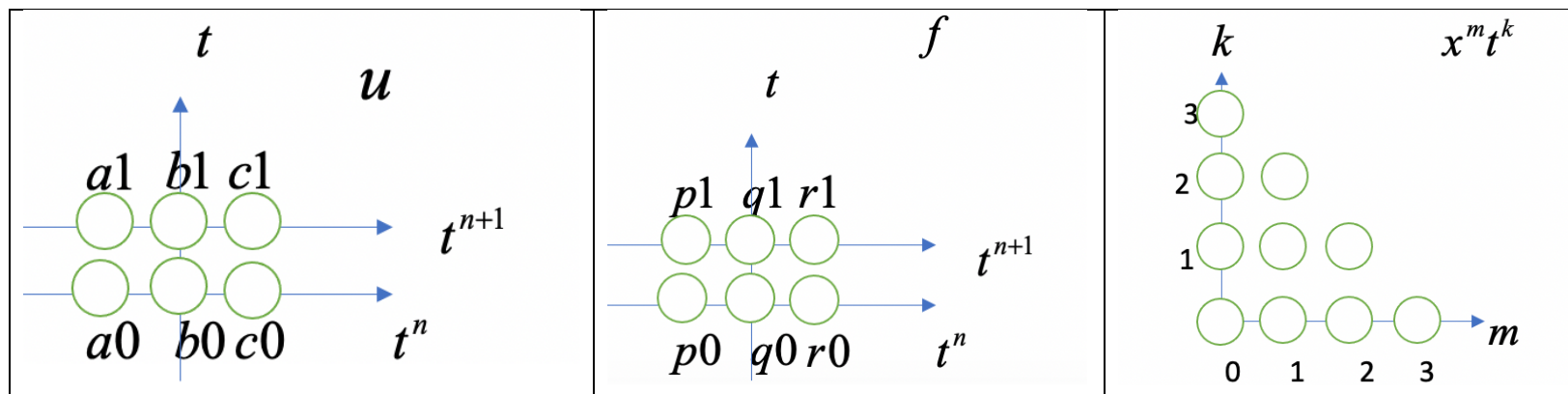


Рис 2. Шаблоны для решения u и для правой части f компактной схемы (3) и диаграмма Ньютона тестовых функций

Для обеспечения высокого порядка аппроксимации компактной схемой уравнения (1) для определения ее 12 коэффициентов потребуем точности на 11 тестовых функциях (см. Рис.2с и Табл.1).

Пара тестовых функций $u = 0$, $f = t^2$ дает уравнение пропорциональное уравнению №3, поэтому его из СЛАУ исключаем.

Таблица 1. Пары тестовых функций и СЛАУ для определения коэффициентов компактной схемы (3)

№	u	f	Уравнение
1	1	0	$a_0 + b_0 + c_0 + a_1 + b_1 + c_1 = 0$
2	0	1	$p_0 + q_0 + r_0 + p_1 + q_1 + r_1 = 0$
3	0	t	$(p_1 + q_1 + r_1)\tau = 0$
4	t	x	$(a_1 + b_1 + c_1)\tau = (r_0 + r_1 - p_0 - p_1)h$
5	t^2	$2tx$	$(a_1 + b_1 + c_1)\tau^2 = 2h\tau(r_1 - p_1)$
6	x	0	$(c_0 + c_1 - a_0 - a_1)h = 0$
7	x^2	$-2Dx$	$(c_0 + c_1 + a_0 + a_1)h^2 = -2D(r_0 + r_1 - p_0 - p_1)h$
8	x^3	$-3Dx^2$	$(c_0 + c_1 - a_0 - a_1)h^3 = -3D(r_0 + r_1 + p_0 + p_1)h^2$
9	tx	$x^2/2$	$(c_1 - a_1)\tau h = (r_0 + r_1 + p_0 + p_1)h^2/2$
10	tx^2	$x^3/3 - 2Dtx$	$(c_1 + a_1)h^2 = (r_0 + r_1 - p_0 - p_1)h^3/3 - 2Dh\tau(r_1 - p_1)$
11	xt^2	tx^2	$(c_1 - a_1)h\tau^2 = \tau h^2(r_1 + p_1)$

Решение СЛАУ:

$$a_1 = -2/3 + 2\nu; \quad b_1 = -8/3 - 4\nu; \quad c_1 = -2/3 + 2\nu; \quad a_0 = 2/3 + 2\nu; \quad b_0 = 8/3 - 4\nu; \quad c_0 = 2/3 + 2\nu;$$

$$p_1 = t/h; \quad q_1 = 0; \quad r_1 = -t/h; \quad p_0 = t/h; \quad q_0 = 0; \quad r_0 = -t/h.$$

Поскольку здесь $f = -\frac{u^2}{2}$, получаем из (3) систему квадратных алгебраических уравнений порядка N относительно значений $\{u_j^{n+1}\}$:

$$\begin{aligned} a_1 u_{j-1}^{n+1} + c_1 u_{j+1}^{n+1} + b_1 u_j^{n+1} = & -a_0 u_{j-1}^n - c_0 u_{j+1}^n - b_0 u_j^n - p_0 \frac{(u_{j-1}^n)^2}{2} - r_0 \frac{(u_{j+1}^n)^2}{2} - \\ & - p_1 \frac{(u_{j-1}^{n+1})^2}{2} - r_1 \frac{(u_{j+1}^{n+1})^2}{2} - q_1 \frac{(u_j^{n+1})^2}{2} - q_0 \frac{(u_j^n)^2}{2}, \quad j = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (4)$$

Чтобы сделать шаг по времени в неявной схеме: $n\tau \rightarrow (n+1)\tau$, требуется решить систему нелинейных уравнений (4) относительно неизвестных значений $\{u_j^{n+1}\}_{j=1}^N$.

Схемы Адамса – Бэшфорда и Мак-Кормака, как первое приближение для компактной

На каждом шаге для решения системы (4), будем использовать явные схемы: Адамса – Бэшфорда или Мак-Кормака, а затем компактная корректировка.

Явная схема АБ (второй порядок точности) состоит из двух шагов:

- Предиктор

$$u_j^{n+1/2} = u_j^n + \nu \frac{u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n}{2} + \tau \frac{(u_{j-1}^n)^2 - (u_{j+1}^n)^2}{4h}.$$

- Корректор

$$\hat{u}_j^{n+1} = u_j^n + v(u_{j-1}^{n+1/2} - 2u_j^{n+1/2} + u_{j+1}^{n+1/2}) + \tau \frac{(u_{j-1}^{n+1/2})^2 - (u_{j-1}^n)^2}{4h}.$$

Явная схема МК(второй порядок точности) состоит из двух шагов:

- Предиктор

$$u_j^{n+1/2} = u_j^n + v[u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n] - \tau \frac{(u_{j+1}^n)^2 - (u_j^n)^2}{2h},$$

- Корректор

$$\hat{u}_j^{n+1} = \frac{1}{2}[u_j^n + u_j^{n+1/2}] + v(u_{j+1}^{n+1/2} - 2u_j^{n+1/2} + u_{j-1}^{n+1/2}) / 2 - \tau \frac{(u_j^{n+1/2})^2 - (u_{j-1}^{n+1/2})^2}{4h}.$$

Для того чтобы на каждом шаге по времени уменьшить погрешность, введем малые поправки $\{\varepsilon_j\}_{j=1}^N$ к $\hat{u}_j^{n+1}$. Подставим $u_j^{n+1} = \hat{u}_j^{n+1} + \varepsilon_j$ в нелинейную систему (4):

$$\begin{aligned} a_1(\tilde{u}_{j-1}^{n+1} + \varepsilon_{j-1}^{n+1}) + c_1(\tilde{u}_{j+1}^{n+1} + \varepsilon_{j+1}^{n+1}) + b_1(\tilde{u}_j^{n+1} + \varepsilon_j^{n+1}) = & -a_0 u_{j-1}^n - c_0 u_{j+1}^n - b_0 u_j^n - p_0 \frac{(u_{j-1}^n)^2}{2} - r_0 \frac{(u_{j+1}^n)^2}{2} - \\ & - p_1 \frac{(\tilde{u}_{j-1}^{n+1} + \varepsilon_{j-1}^{n+1})^2}{2} - r_1 \frac{(\tilde{u}_{j+1}^{n+1} + \varepsilon_{j+1}^{n+1})^2}{2} - q_1 \frac{(\tilde{u}_j^{n+1} + \varepsilon_j^{n+1})^2}{2} - q_0 \frac{(u_j^n)^2}{2}, j = 1, \dots, N-1 \end{aligned}$$

и воспользуемся предположением о малости поправок $\{\varepsilon_j\}_{j=1}^N$ по сравнению с решением: отбросим квадраты поправки. Получаем трехдиагональную СЛАУ:

$$\varepsilon_{j-1}^{n+1} \left(a_1 + \tilde{u}_{j-1}^{n+1} p_1 \right) + \varepsilon_j^{n+1} \left(b_1 + \tilde{u}_j^{n+1} q_1 \right) + \varepsilon_{j+1}^{n+1} \left(c_1 + \tilde{u}_{j+1}^{n+1} r_1 \right) = F_j, \quad j = 0, \dots, N-1,$$

$$F_j = -a_1 \tilde{u}_{j-1}^{n+1} - b_1 \tilde{u}_j^{n+1} - c_1 \tilde{u}_{j+1}^{n+1} - a_0 u_{j-1}^n - c_0 u_{j+1}^n - b_0 u_j^n - p_0 \frac{(u_{j-1}^n)^2}{2} - r_0 \frac{(u_{j+1}^n)^2}{2} - p_1 \frac{(\tilde{u}_{j-1}^{n+1})^2}{2} - r_1 \frac{(\tilde{u}_{j+1}^{n+1})^2}{2} - q_1 \frac{(\tilde{u}_j^{n+1})^2}{2} - q_0 \frac{(u_j^n)^2}{2}$$

- Делаем следующий шаг по явной схеме.

Тестирование порядка точности разностных схем

В качестве начальной брали функция $u(t=0, x) = \frac{-4D\pi \cos(2\pi x)}{2 + \sin(2\pi x)}$.

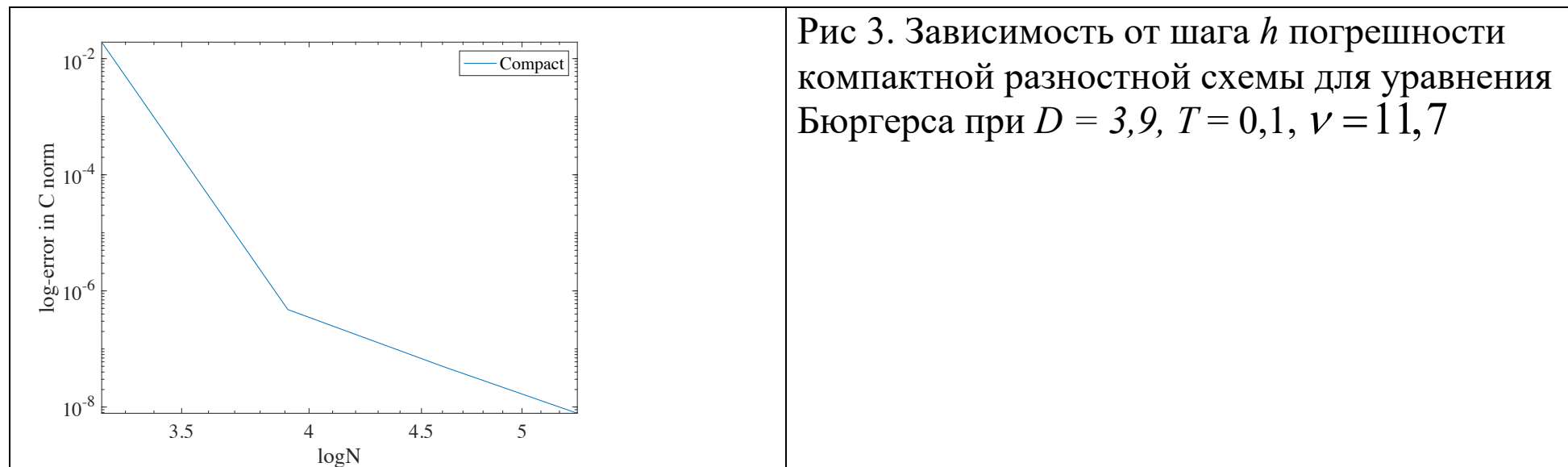
Оценим погрешность - С-норму разности сеточных функций (точного решения и решения схемы). $\nu = D\tau / h^2$ - параметр Куранта разностной аппроксимации

Таблица 2.Погрешность явных/компактных схем в зависимости от параметров

уравнения Бюргерса для $u(t=0, x) = \frac{-4D\pi \cos(2\pi x)}{2 + \sin(2\pi x)}$

Схема явная/компактная	Норма	Параметры	Порядок
Мак-Кормак	С	$D = 0,1, T = 0,1, \nu = 0,488$	Неуст/2,08
Мак-Кормак	С	$D = 0,0001, T = 0,01, \nu = 0,00003906$	2/1,68
Мак-Кормак	С	$D = 0,5, T = 0,1, \nu = 2,44$	Неуст/1,96
АБ	С	$D = 0,1, T = 0,01, \nu = 0,039$	1,94/2
АБ	С	$D = 0,125, T = 0,1, \nu = 0,488$	2/ 2

АБ	С	$D = 1, T = 0,1, \nu = 3,9$	Неуст/2,38
АБ	С	$D = 3,5, T = 0,1, \nu = 11,7$	Неуст/6,14
АБ	С	$D = 3,9, T = 0,1, \nu = 13,04$	Неуст/7,08



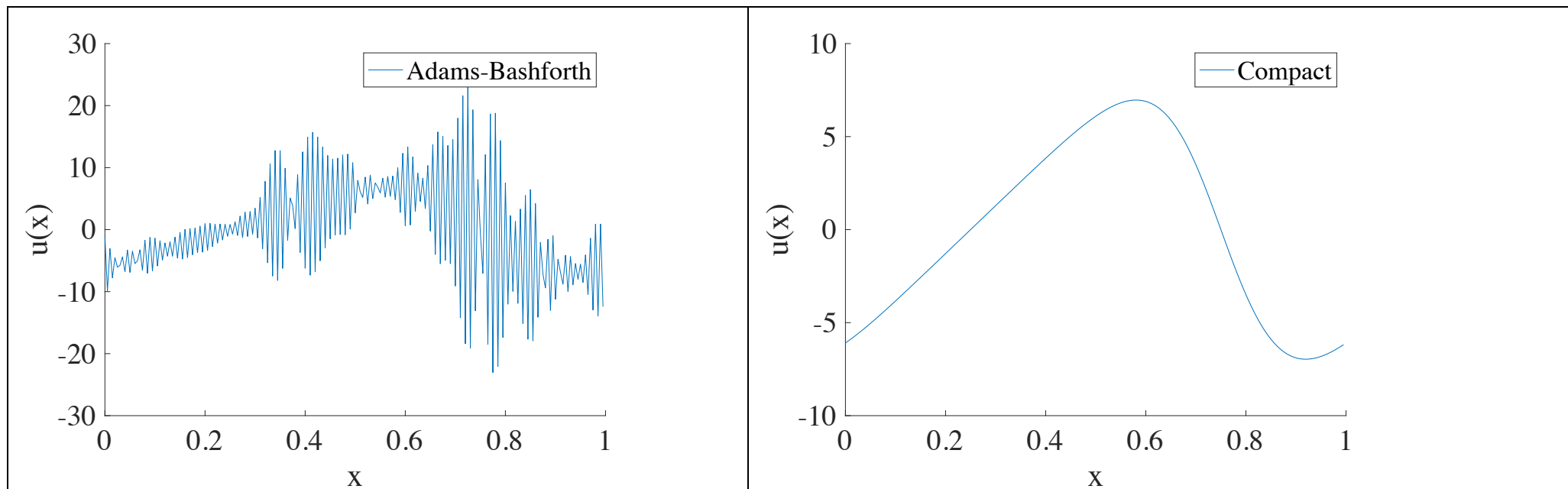


Рис 4. Решения на 9 шаге по времени для уравнения (1) для схем АБ/Компактной, $D = 1$, $T = 0,1$, $N = 200$, $h = 2\pi / N$, $\tau = 0,1/1024$

Ударная волна – решение уравнения (1) с $u_0 = \sin(x)$, $x \in [0, 2\pi]$. Сначала вычислялось эталонное решение u_{etal} на мелкой сетке при $N = 400, M = 4096$. Затем для грубых разрешений N_i вычислялись решения u_i . Далее u_{etal} и u_i ограничиваются на грубую сетку ($N = 25, M = 16$), и вычислялась погрешность $err_i = \|u_{etal} - u_i\|$.

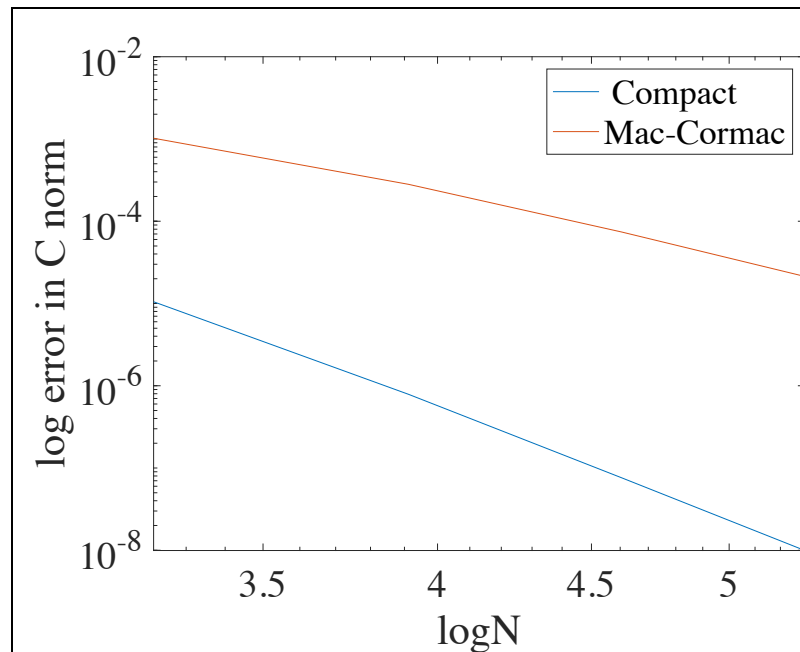


Рис 5. C-норма погрешности схем в зависимости от разрешения N в log-системе. Параметры для мелкой сетки $D = 0,0025$, $T = 0,05$, $\nu = 0,000125$

Порядки точности:
1,86(МК)/3,35 (компактная).

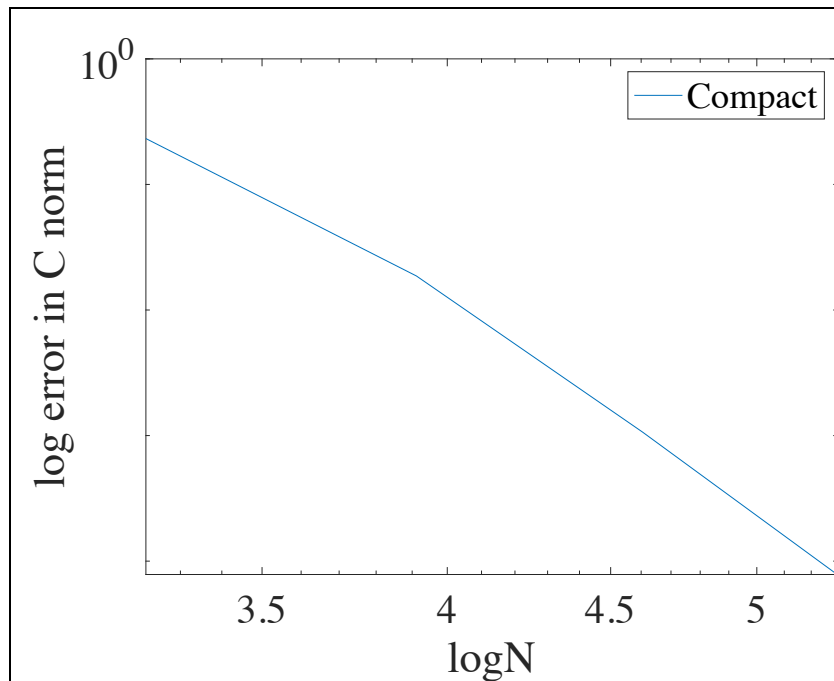


Рис 6. Погрешность схемы в зависимости от разрешения N в log-системе. Параметры для мелкой сетки

$$D = 7,5, T = 6, \nu = 44,5$$

Порядок компактной схемы = 3,99.

Схема Адамса- Бэшфорда неустойчива

Таблица 3. Погрешность явных/компактных схем в зависимости от параметров уравнения Бюргера для $u_0 = \sin(x), x \in [0, 2\pi]$

Схема явная /компактная	Параметры	Порядок
Мак-Кормак	$D = 0.000025, T = 0.5, \nu = 0.0000125$	1.81/3.93
Мак-Кормак	$D = 0.0025, T = 0.05, \nu = 0.000125$	1.86/3.35
Мак-Кормак	$D = 0.0025, T = 1, \nu = 0.0025$	0.64/1.52
Мак-Кормак	$D = 0.04, T = 1, \nu = 0.04$	Неуст/2.11
Мак-Кормак	$D = 0.02, T = 0.5, \nu = 0.01$	0.5/2.5
Мак-Кормак	$D = 1, T = 0.5, \nu = 0.5$	Неуст/ 2.11
Мак-Кормак	$D = 5, T = 0.5, \nu = 2.5$	Неуст/ 2.21
АБ	$D = 0.06, T = 6, \nu = 0.356$	1.55/1.98

АБ	$D = 0.01, T = 6, \nu = 0.06$	0.84/1.14
АБ	$D = 0.005, T = 6, \nu = 0.03$	0.27/0.64
АБ	$D = 0.3, T = 6, \nu = 1.78$	Неуст/2.11
АБ	$D = 1.5, T = 6, \nu = 8.9$	Неуст/3.33
АБ	$D = 7.5, T = 6, \nu = 44.5$	Неуст/3.84
АБ	$D = 20, T = 6, \nu = 120$	Неуст/4.09

После Мак-Кормака устойчивость компактной схемы $\nu < 5$.

Устойчивость для явной схемы Мак-Кормака: $\nu < 0,01$.

После Адамса-Бешфорда устойчивость компактной схемы $\nu > 0,03$.

Устойчивость для явной схемы АБ: $\nu < 0,4$.

До $\nu < 0,4$ лучше применять компактную схему для Мак-Кормака. (Она имеет в среднем 3 порядок). При больших ν компактная схема для АБ дает больший порядок, чем компактная схема МК. (От 2 до 4, 4 при больших ν) Ее стоит использовать для $120 > \nu > 0,4$.

Две итерации эпсилон-метода помогают, при $T > 400$.

Уравнение ФКПП описывает распространение доминантного гена:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \phi(u), D = \text{const} > 0, \phi(u) = u(1 - u), \quad (5)$$

где $u = u(t, x)$ - плотность распределения числа особей с доминантным геном, $x \in R$.

В качестве тестовых функций для ФКПП выбраны мономы: $x^{2m}t^k, m \leq 2, k \leq 2$.

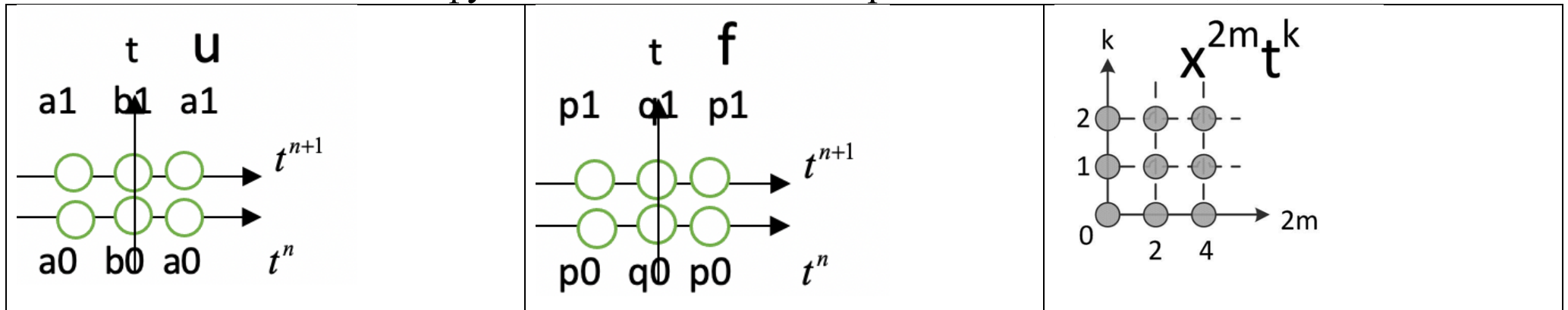


Рис 7. Шаблоны для решения u и правой части f компактной схемы и диаграмма Ньютона тестовых функций

Таблица 4. Пары тестовых функций и «локальная» СЛАУ для определения коэффициентов компактной схемы (5)

№	u	f	Уравнение
1	1	0	$2a_0 + b_0 + 2a_1 + b_1 = 0$
2	t	1	$(2a_1 + b_1)\tau = 2p_0 + q_0 + 2p_1 + q_1$
3	t^2	$2t$	$(2a_1 + b_1)\tau^2 = 2\tau(2p_1 + q_1)$
4	x^2	$-2V$	$(2a_0 + 2a_1)h^2 = -2V(2p_0 + q_0 + 2p_1 + q_1)$
5	x^4	$-12Vx^2$	$(2a_0 + 2a_1)h^4 = -12V(2p_0 + 2p_1)h^2$
6	x^2t	$x^2 - 2Vt$	$2a_1h^2\tau = (2p_0 + 2p_1)h^2 - 2V\tau(2p_0 + q_0)$
7	x^2t^2	$2x^2t - 2Vt^2$	$2a_1h^2\tau^2 = 2(2p_0)h^2\tau - 2V\tau^2(2p_0 + q_0)$
		нормировочное	$p_0 = -1$

В таблице 4 приведен набор тестовых функций для уравнения ФКПП, по которым составлена система из 7 однородных уравнений + 1 нормировочное.

Ее решение: $a_1 = c_1 = 12\nu - 2$, $b_1 = -24\nu - 20$, $a_0 = c_0 = 12\nu + 2$,
 $b_0 = -24\nu + 20$, $p_0 = p_1 = r_0 = r_1 = -\tau$, $q_0 = q_1 = -10\tau$.

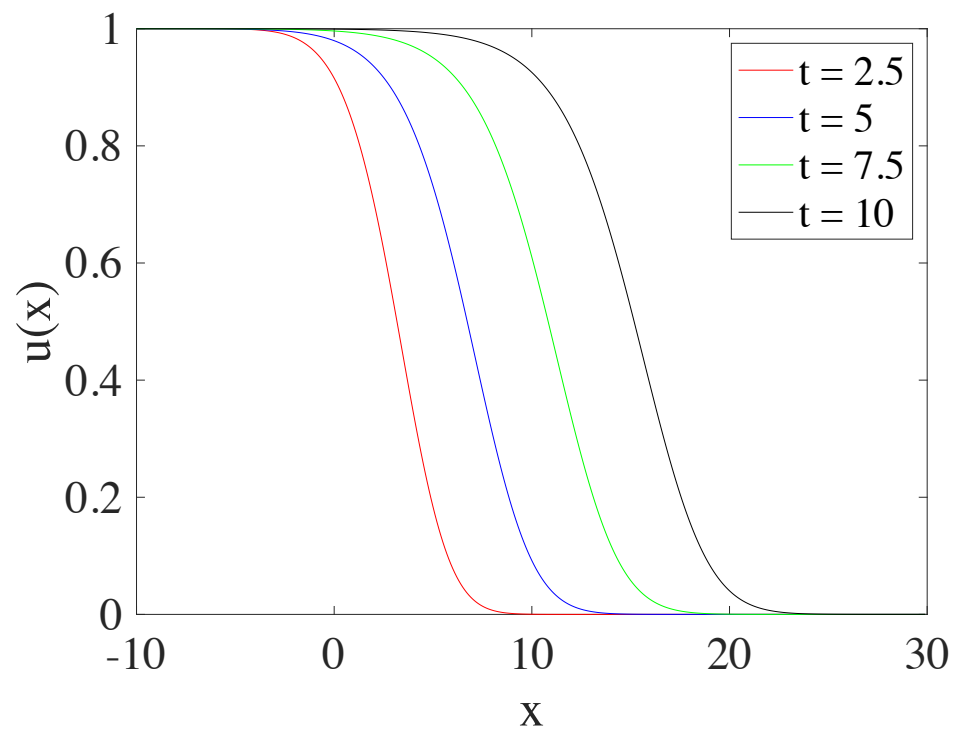


Рис. 8 График точного решения (5)
уравнения ФКПП, $D = 1$, $T = 10$

$x \in [-10, 30]$

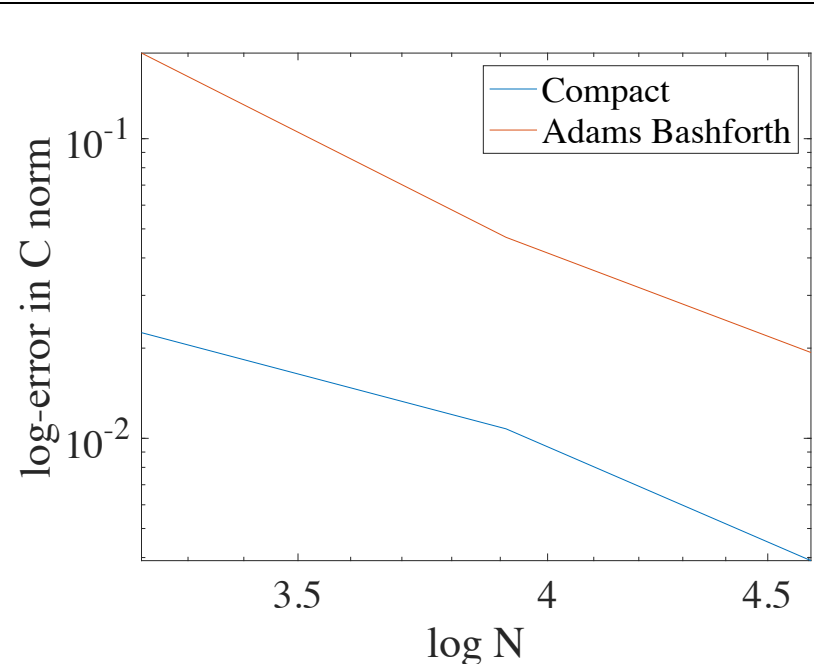


Рис 9. Погрешность схемы в зависимости от разрешения N в $\log$ -системе. Параметры для мелкой сетки $D = 1, T = 5, \nu = 0,488$

Таблица 5. Погрешность явных/компактных схем в зависимости от параметров

уравнения ФКПП для $u_0(x) = \left\{ \begin{array}{l} 1, x \in [-10, 0] \\ \cos x, x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ 0, x \in [\frac{\pi}{2}, 10] \end{array} \right\}$

Схема явная/компактная	Норма	Параметры	Порядок
---------------------------	-------	-----------	---------

АБ	С	$D = 1, T = 5,$ $\nu = 0,488$	1,66/1,28
АБ	С	$D = 0,55, T = 6,$ $\nu = 0,32$	0,83/1,6
АБ	С	$D = 0,16, T =$ $32, \nu = 0.5$	Неуст/3,81

Граница устойчивости компактной схемы: $\nu < 1,25$.

Граница устойчивости схемы АБ: $\nu < 0,5$.