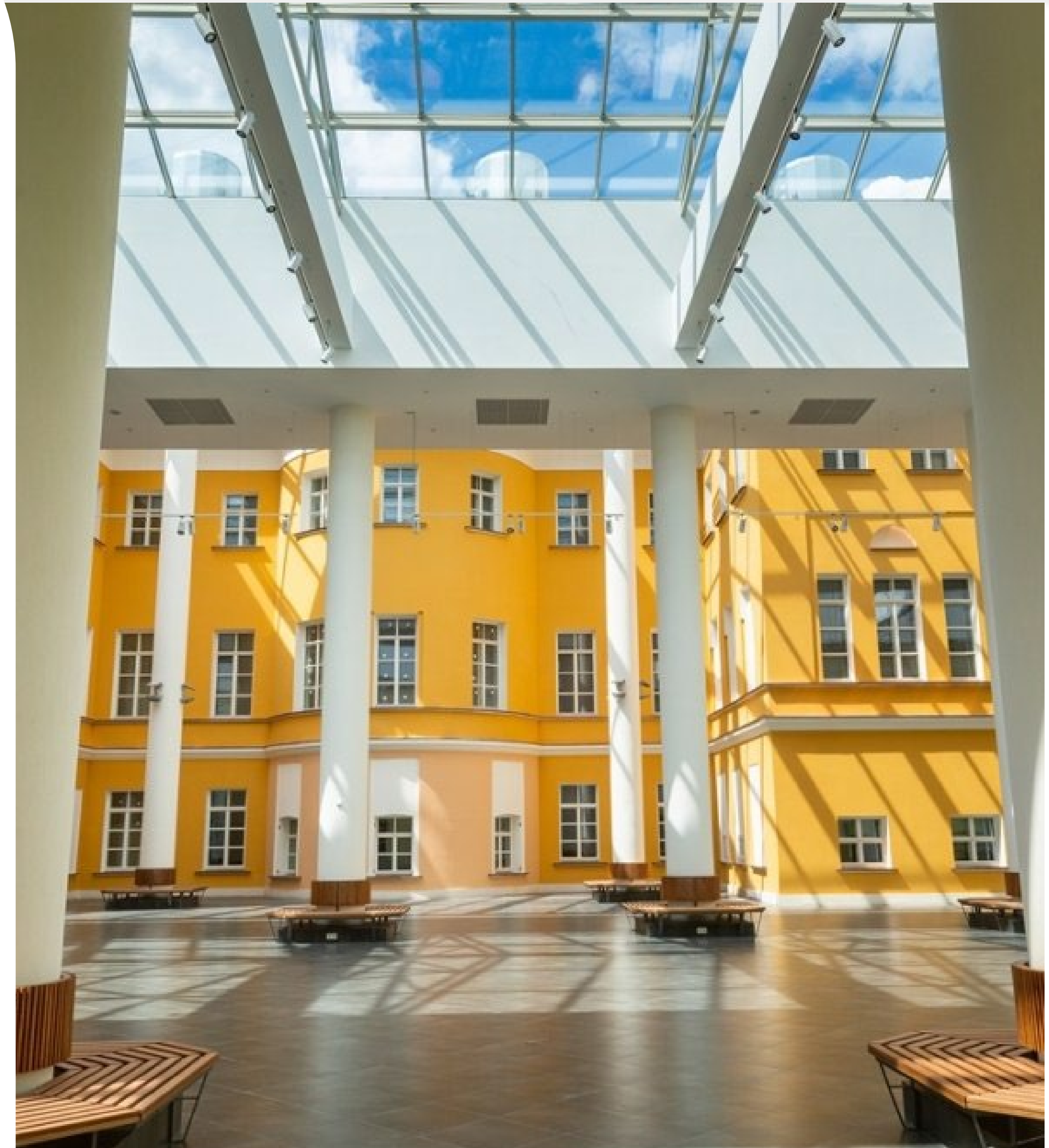
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

HSE University

Исследование модели Ланкастера при ее разных модификациях



Студент: Меликян Сепух Каренович

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, Гордин Владимир Александрович

Москва, 2021 год

Цель, задачи и структура выпускной квалификационной работы.

1 Модифицированная модель Ланкастера военных действий - наличие различных родов войск.

2 Модифицированная модель Ланкастера военных действий. Возможность отвода части армии на отдых.

Заключение

Цель, задачи и структура работы

Цель

Разработка модификаций модели Ланкастера динамики численности при боевых действиях. Проведение компьютрных экспериментов.

Задачи

1. Разработать модель с двумя родами войск.
2. Оптимизация при заданном финансовом ограничении.
3. Анализ различных критериев качества.
4. Разработать модель с возможностью отвода части войск на отдых.
5. Проведение численных эксперементов.

Стуктура

- I. Историко-теоретические аспекты
- II. Модификация с наличием различных родов войск
- IIa. Численные эксперименты
- III. Модификация с возможностью отвода части армии на отдых
- IIIa. Численные эксперименты

Историко-теоретические аспекты

- Система простых дифференциальных уравнений для моделирования войн
- Ланкастер Фредерик Уильям в 1916 г.
- Простота в анализе измерений
- Динамика численности описывается количественно

Простейшая модель Ланкастера

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -by \\ \dfrac{dy}{dt} = -cx \end{cases},$$

$x(t)$ – численность первой армии

$y(t)$ – численность второй армии

$b > 0$ – характеризует эффективность оружия нападения второй армии и защиты первой, а константа $c > 0$ наоборот.

Модель Ланкастера

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -b_1 y \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -b_2 y \\ \dfrac{dy}{dt} = -c_1 x_1 - c_2 x_2 \end{cases}.$$

$x_1(t)$ – численность первого рода первой армии

$x_2(t)$ – численность второго рода первой армии

$y(t)$ – численность второй армии

$b_1, b_2, c_1, c_2 > 0$ – коэффициенты истребления каждого рода войск.

Бюджетное ограничение

$$m^* x_1(0) + n^* x_2(0) \le K$$

Здесь m^*, n^* - стоимость подготовки воина 1-го или 2-го рода войск. $x_1(0), x_2(0)$ - количество солдат 1-го и 2-го родов войск в начале войны.

Критерии для оптимизации

1. Максимизирование суммарной численности первой армии в момент победы (J).
2. Минимизация людских потерь первой армии (J_a).

$$J = x_1(T) + x_2(T) \to \max$$

$$J_a = x_1(0) + x_2(0) - x_1(T) - x_2(T) \to \min$$

Константы

$$m^* = 20, n^* = 1, K = 200, b_1 = 1, b_2 = 1, c_1 = 2000, c_2 = 1, y(0) = 200.$$

Задача оптимизации

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -y \\ \dot{x}_2 = -y \\ \dot{y} = -2000x_1 - x_2 \\ 20x_1(0) + x_2(0) \le 200 \\ 0 \le x_1(0), 0 \le x_2(0) \\ J \to \max \text{ или } J_a \to \min \end{cases}.$$

Графики решения при разных x_1(0), x_2(0)

Траектории

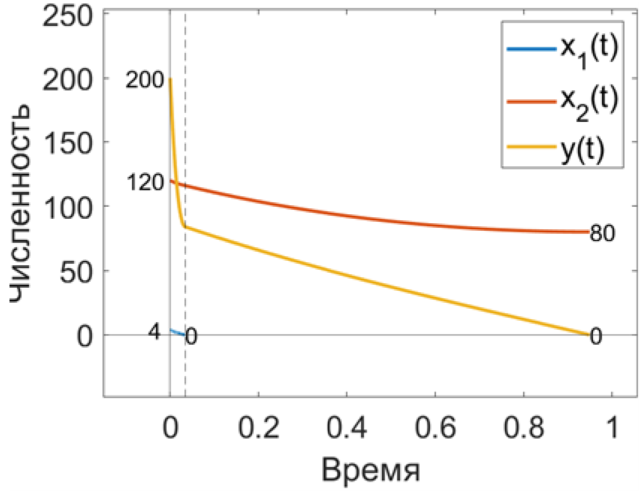


Рис. 1 $x_1(0)=4, x_2(0)=120.$

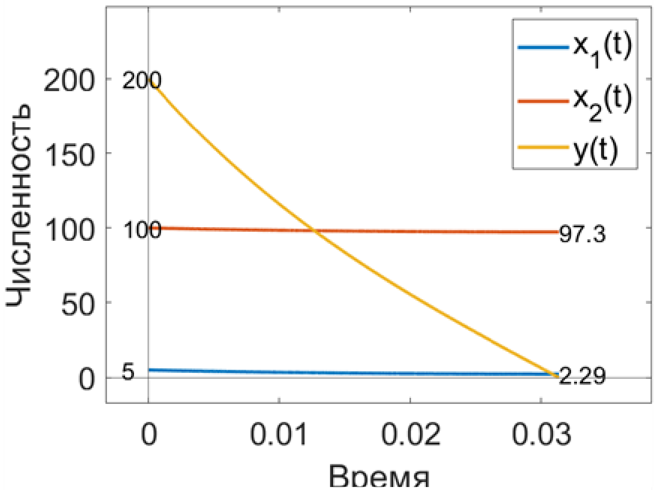


Рис. 2 $x_1(0)=5, x_2(0)=100.$

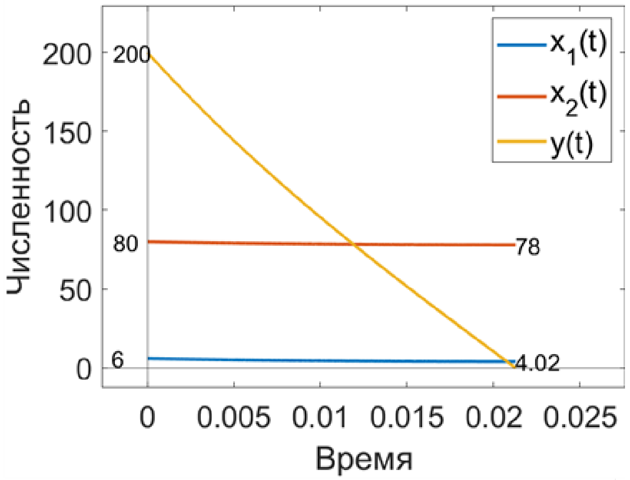


Рис. 3 $x_1(0)=6, x_2(0)=80.$

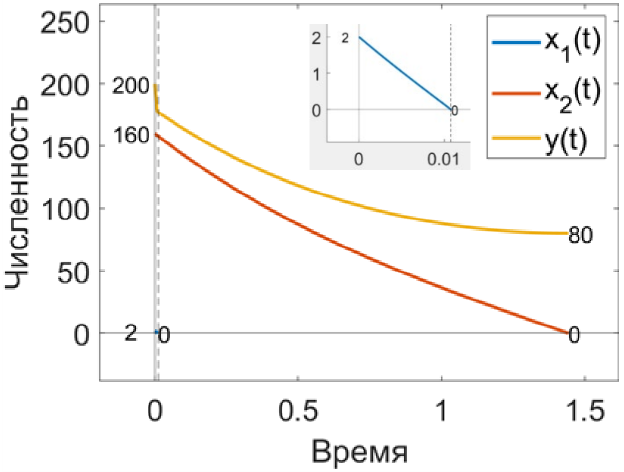


Рис. 4 $x_1(0)=2, x_2(0)=160.$

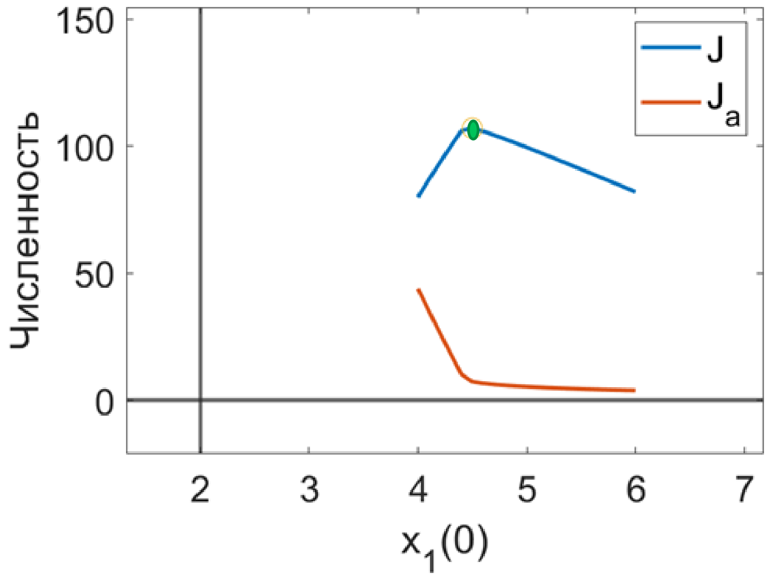


Рис. 5 Зависимость количества выживших и павших солдат от $x_1(0)$.

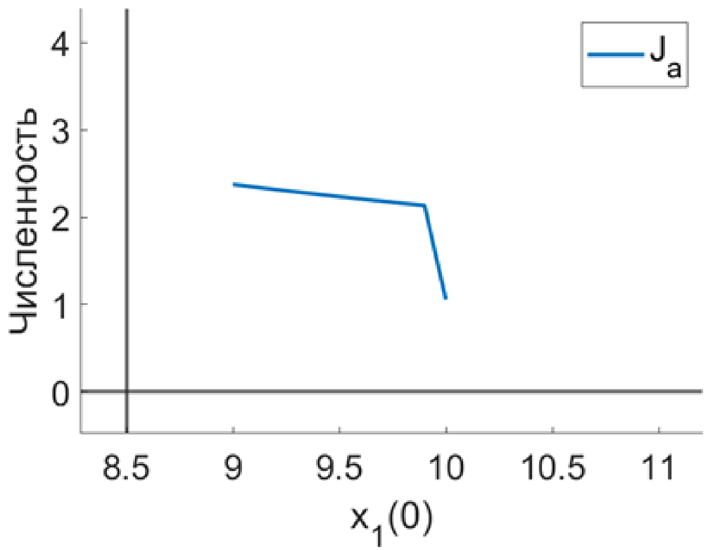


Рис. 6 Зависимость количества павших солдат от $x_1(0)$.

Оптимальное распределение для первого критерия

$$x_1^*(0) = 4,5$$

$$x_2^*(0) = 110$$

Оптимальное распределение для второго критерия

$$x_1^*(0) = 10$$

$$x_2^*(0) = 0$$

Модель Ланкастера

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -D(p)y + u - v \\ \dot{y} = -A(p)x_1 \\ \dot{p} = -\beta p + \dfrac{u(q-p)}{x_1} \\ \dot{q} = \alpha(1-q) + \dfrac{v(p-q)}{x_2} \\ \dot{x}_2 = v - u \end{cases}.$$

$x_1(t), x_2(t)$ – численность первой армии на фронте и в тылу

$y(t)$ – численность второй армии

$D(p), A(p)$ – функции эффективностей защиты и нападения первой армии в зависимости от "боевитости" солдат на фронте.

p, q – боевитость на фронте и в тылу

α, β – скорость востановления и убывания боевых качеств солдат в тылу и на фронте

u, v – интенсивность поступления солдат на фронт и вывода на отдых

Динамику параметров p и q, когда отсутствует ротация

$$\begin{cases} \dot{p} = -\beta p \\ \dot{q} = \alpha(1-q) \end{cases},$$

где числовые параметры α, β характеризуют скорость восстановления боевых качеств на отдыхе (до предельного значения 1), и скорость их убывания на фронте.

Формула усреднения

$$a^{\#} = \frac{n * a + m * b}{n + m},$$

где $a^{\#}$- это новая усредненная “боевитость”, n – количество солдат 1-й фракции, а – боевитость 1-ой фракции, m – количество солдат, поступающих из 2-й фракции, b – “боевитость” 2-ой фракции.

Боевитость группы умноженную на ее количество возьмем за фазовую координату и построим шему для процесса ротации:

Схема процесса ротации во время войны

$$\begin{cases}(px_1)(t+\tau)=(px_1)(t)+uq(t)\tau-vp(t)\tau-D(p)yp\tau\\(qx_2)(t+\tau)=(qx_2)(t)+vp(t)\tau-uq(t)\tau\end{cases}.$$

Слагаемое с u (интенсивность поступления на фронт) ответствуют за процесс перехода на фронт, а слагаемое с v (интенсивность поступления в тыл) ответствуют за процесс перехода в тыл. Слагаемое D(p)ypτ обеспечивает военные действия во время ротации.

Дифференциальные уравнения процесса ротации во время войны

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(px_1) = uq - vp - D(p)yp \\ \dfrac{d}{dt}(qx_2) = vp - uq \end{cases}.$$

С помощью формулы Лейбница выделим производные боевитостей.

Динамика боевитости во время ротации на войны

$$\begin{cases} \dot{p} = \dfrac{uq - vp}{x_1} - \dfrac{\dot{x}_1}{x_1} p - \dfrac{D(p)yp}{x_1} \\ \dot{q} = \dfrac{vp - uq}{x_2} - \dfrac{\dot{x}_2}{x_2} q \end{cases}.$$

После чего подставим выражения $\dot{x}_1$ и $\dot{x}_2$ в систему.

Динамика боевитости

$$\begin{cases} \dot{p} = -\beta p + \dfrac{u(q-p)}{x_1} \\ \dot{q} = \alpha(1-q) + \dfrac{v(p-q)}{x_2} \end{cases}.$$

Система дифференциальных уравнений, которые описывают боевитость на фронте (p) и в тылу (q). В каждом уравнении первое слагаемое описывает процесс убывания или восстановления боевых качеств. А второе слагаемое – процесс ротации.

Численный пример

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1 = -p^{-1}y + u - v \\
\dot{y} = -px \\
\dot{p} = -1,5p + \dfrac{u(q-p)}{x_1} \\
\dot{q} = 3,7(1-q) + \dfrac{v(p-q)}{x_2} \\
\dot{x}_2 = v - u
\end{cases}.
$$

В этом примере в качестве *D(p)* выбрана функция $D(p) = C_1 p^{-1}$, где $C_1 = 1$. А за A(p) - $A(p) = C_2 p, C_2 = 1$. Коэффициенты $\alpha = 3,7; \beta = 1,5$. T – время окончания войны.

Исследуемые управления

$$v = \begin{cases} 0 & t \in [0;0.6] \\ 1000 & t \in (0.6;0.65], \\ 0 & t \in (0.65;T] \end{cases} \quad u = \begin{cases} 0 & t \in [0;0.85] \\ 100 & t \in (0.85;1.35], \\ 0 & t \in (1.35;T] \end{cases}$$

$$v_1 = \begin{cases} 0 & t \in [0;0.6] \\ 100 & t \in (0.6;1.1], \\ 0 & t \in (1.1;T] \end{cases} \quad u_1 = \begin{cases} 0 & t \in [0;1.3] \\ 1000 & t \in (1.3;1.35]. \\ 0 & t \in (1.35;T] \end{cases}$$

В управлениях u_1 и v полный переход солдат производится 10 раз быстрее по сравнению управлений v_1 и u.

Траектории, когда сразу - за короткое время отводят солдат на отдых и постепенно, в десять раз медленнее переводят в театр боевых

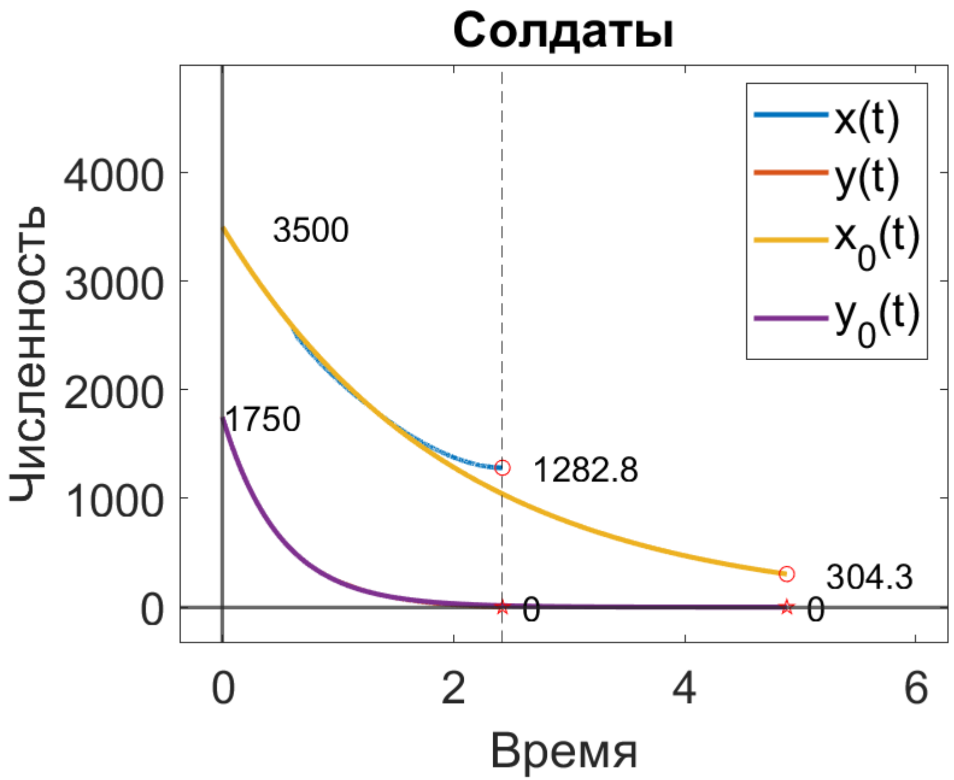


Рис. 7 Трактории при управлении (v, u)

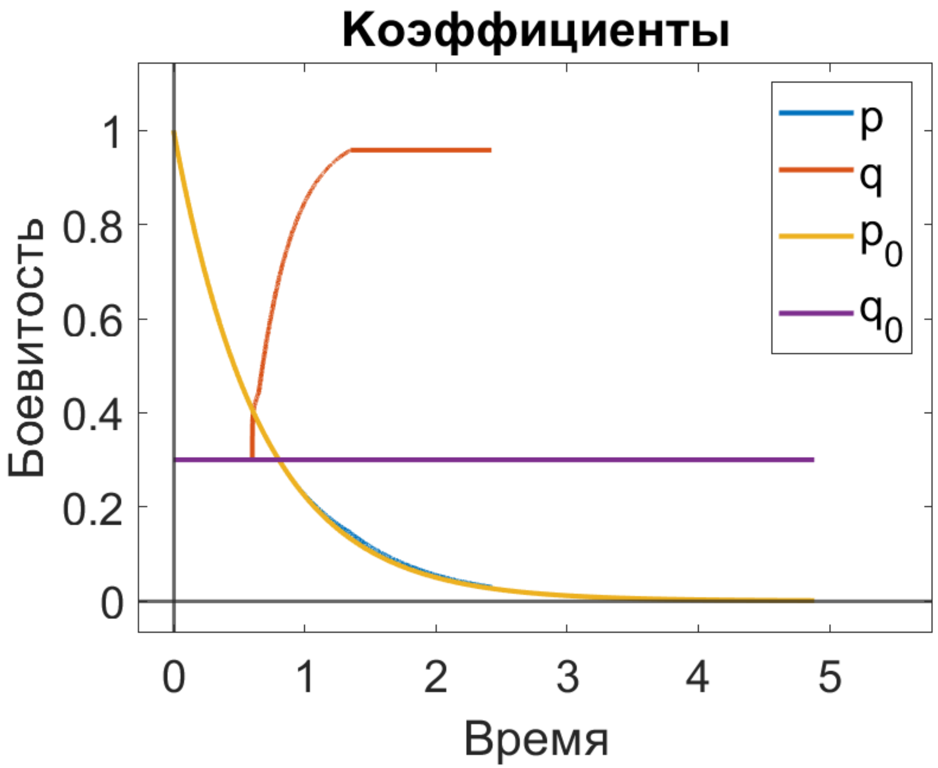


Рис. 8 Изменение коэффициентов со временем при отсутствии ротации

Траектории, когда постепенно, в десять раз медленнее переводят на отдых, чем переводят в театр боевых

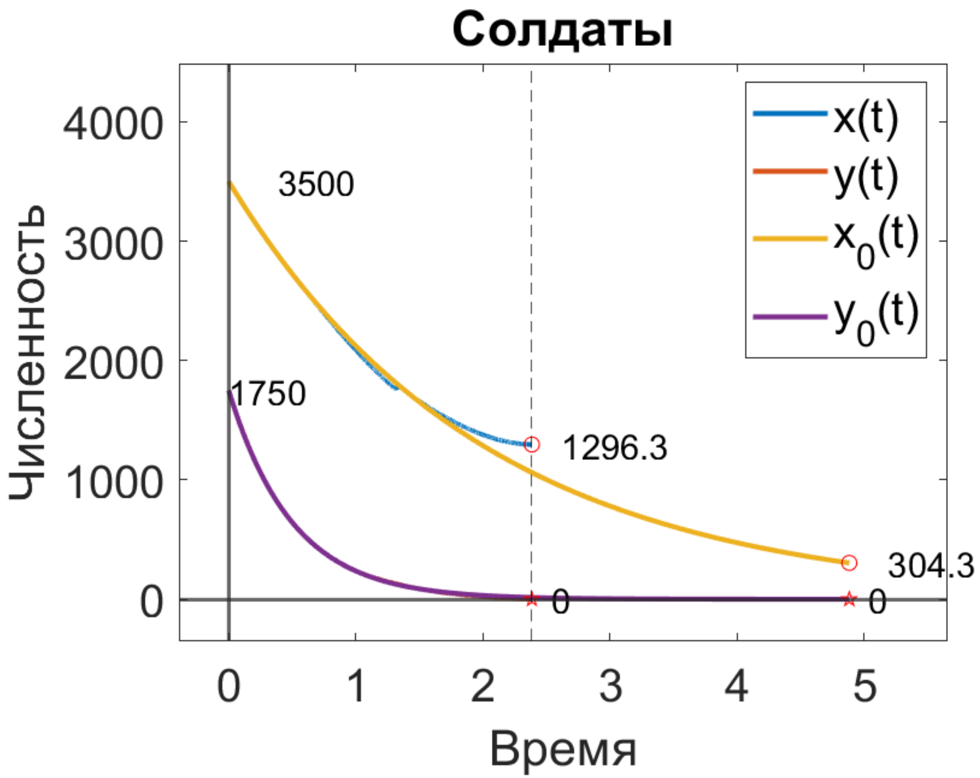


Рис. 9 Трактории при управлении (v_1, u_1)

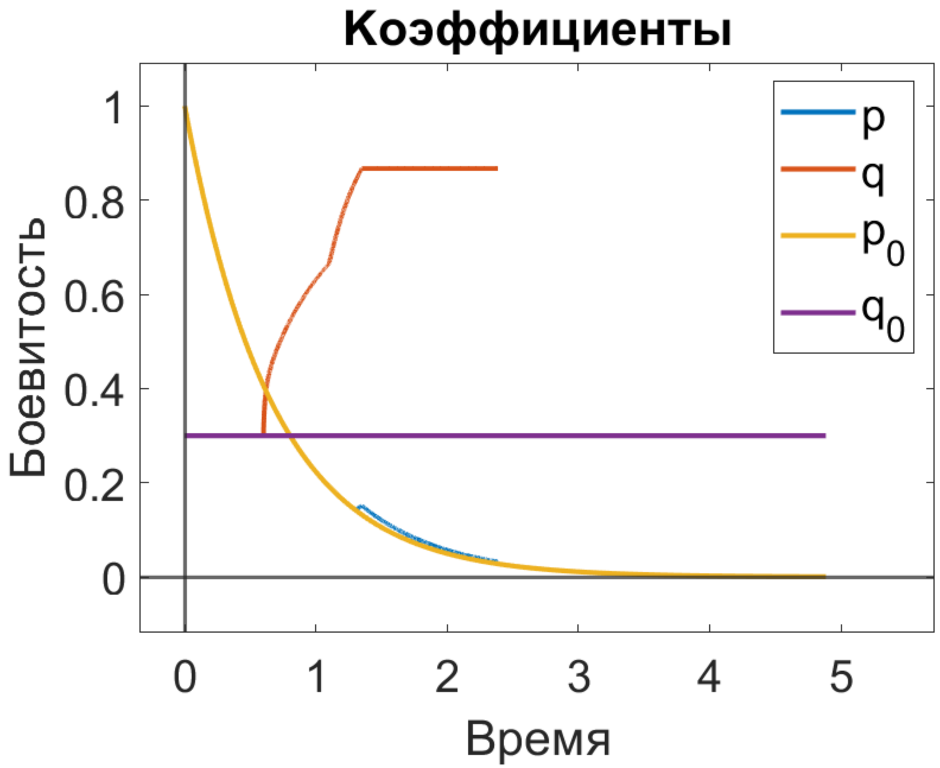


Рис. 10 Изменение коэффициентов со временем при отсутствии ротации

Траектории, когда постепено переводят и на отдых, и в бой

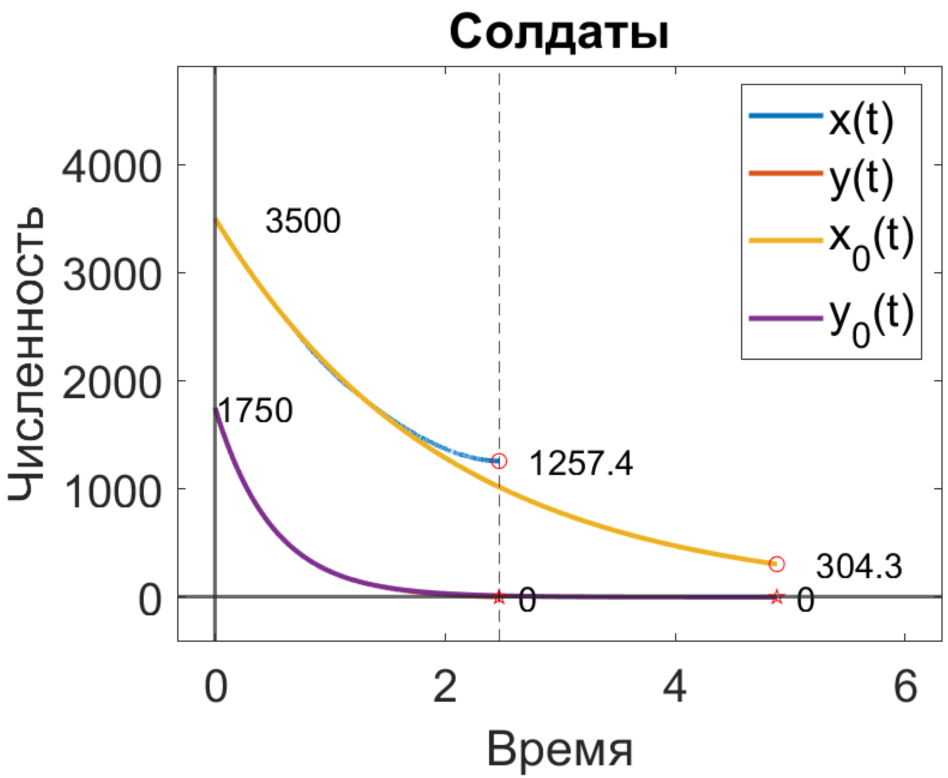


Рис. 11 Трактории при управлении (v_1, u)

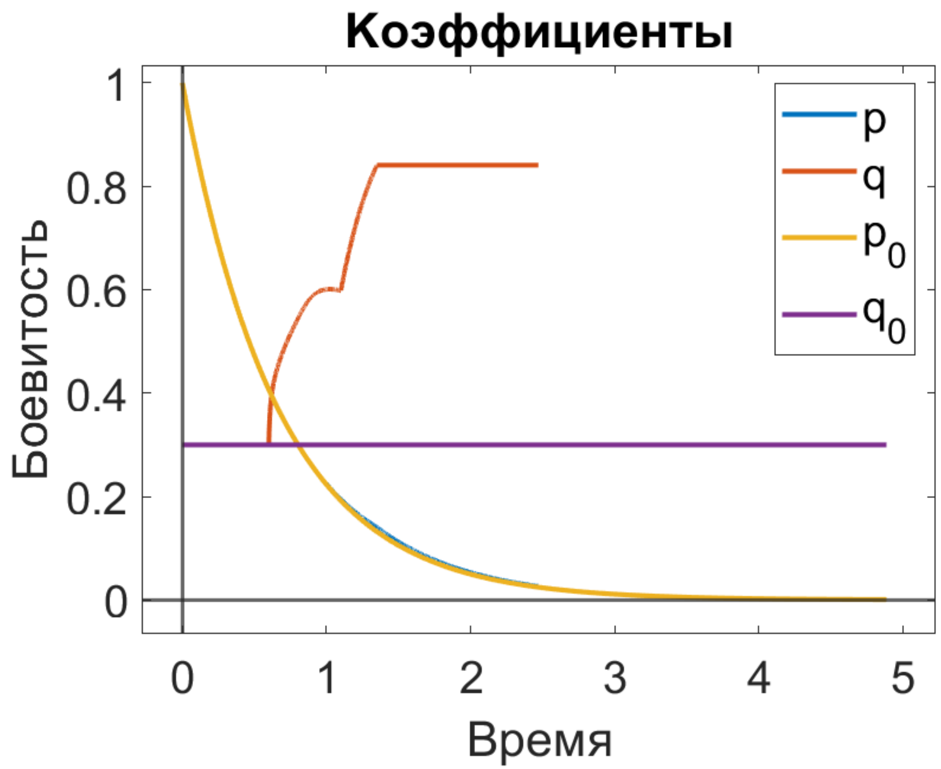


Рис. 12 Изменение коэффициентов со временем при отсутствии ротации

Траектории, когда за короткое время переводят и на отдых, и в бой

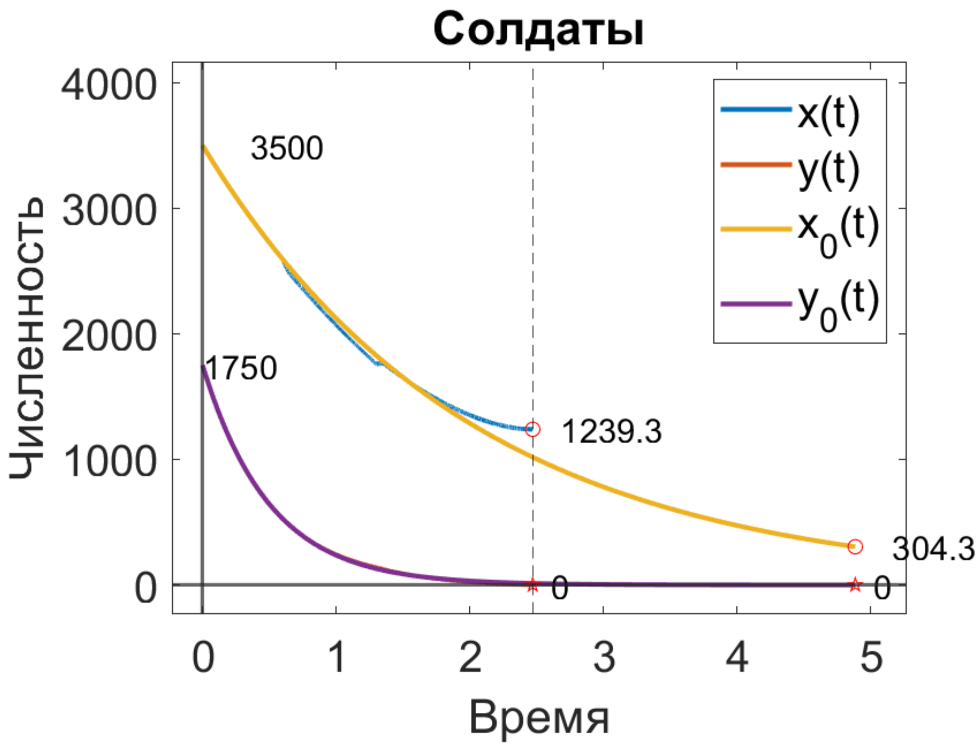


Рис. 13 Трактории при управлении

(v, u_1)

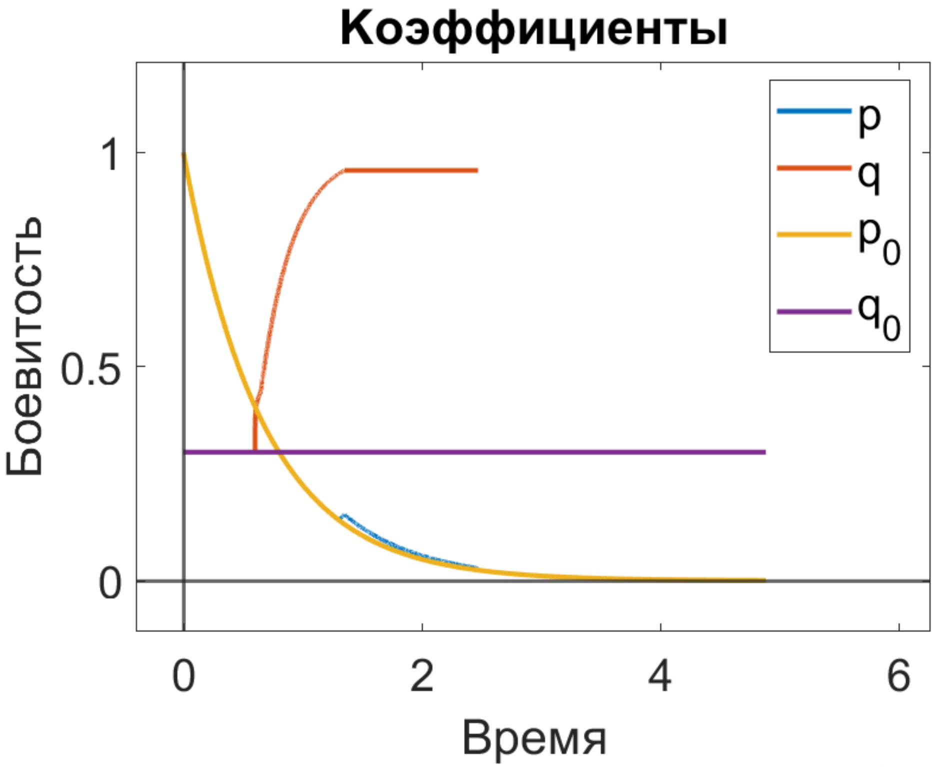


Рис. 14 Изменение коэффициентов со временем при отсутствии ротации

Моделирование военных операций

01 Метод исследований операций и его количественный подход не добавляют и не уменьшают опыта, здравого смысла и технической компетенции командира или его подчиненных.

02 Моделирование является только инструментом для исследования всех определенных факторов.

03 Метод исследования операций полезен, как при решении оперативных задач, так и, при решении вопросов закупки вооружения.

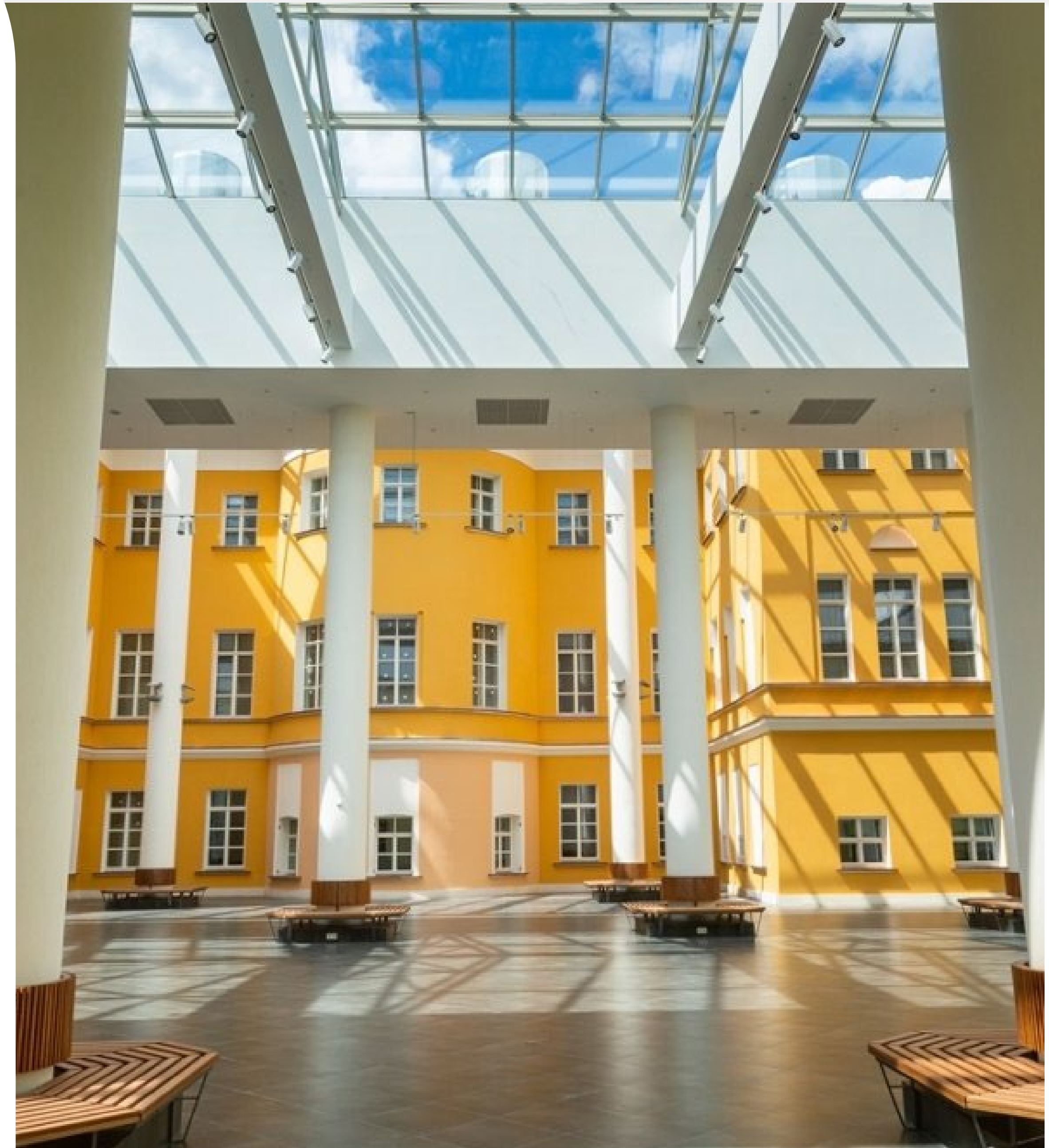
Все модели неверны, но некоторые полезны.

Д. Бокс

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

HSE University

Исследование модели Ланкастера при ее разных модификациях



Студент: Меликян Сепух Каренович

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, Гордин Владимир Александрович

Москва, 2021 год

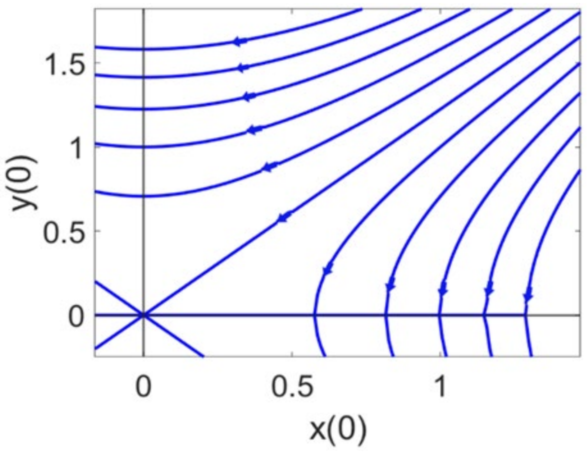
Решение системы

$$\begin{cases} x(t) = C_1\sqrt{b}e^{\lambda_1 t} + C_2\sqrt{b}e^{\lambda_2 t} \\ y(t) = -C_1\sqrt{c}e^{\lambda_1 t} + C_2\sqrt{c}e^{\lambda_2 t} \end{cases}$$

Первый интеграл

$$I(x,y) = cx^2 - by^2$$

Интегральные кривые



Время окончания войны

$$T(x(0),y(0)) = \frac{1}{2\sqrt{bc}}\ln\left(\pm\frac{\sqrt{c}x(0)+\sqrt{b}y(0)}{\sqrt{c}x(0)-\sqrt{b}y(0)}\right).$$

Квадратичный первый интеграл

$$I(x_1, x_2, y) = \frac{c_1}{b_1} x_1^2 + \frac{c_2}{b_2} x_2^2 - y^2$$

Необходимое условие победы первой армии

$$\frac{c_1}{b_1} x_1{}^2(0) + \frac{c_2}{b_2} x_2{}^2(0) > y(0)^2$$

Траектории

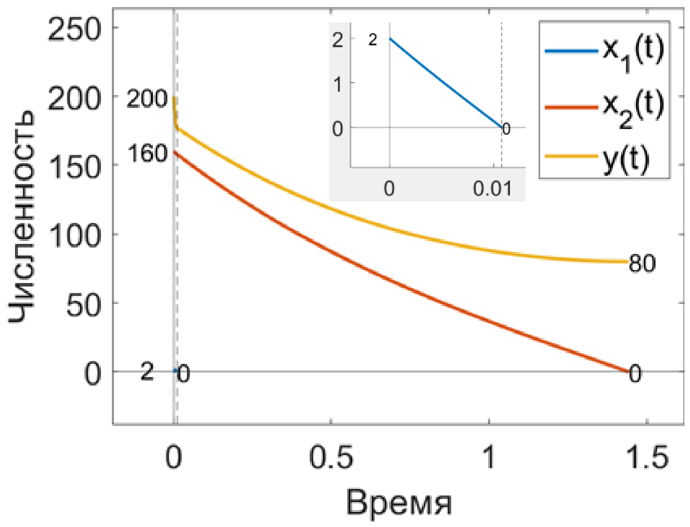


Рис. 1 $x_1(0) = 2, x_2(0) = 160.$

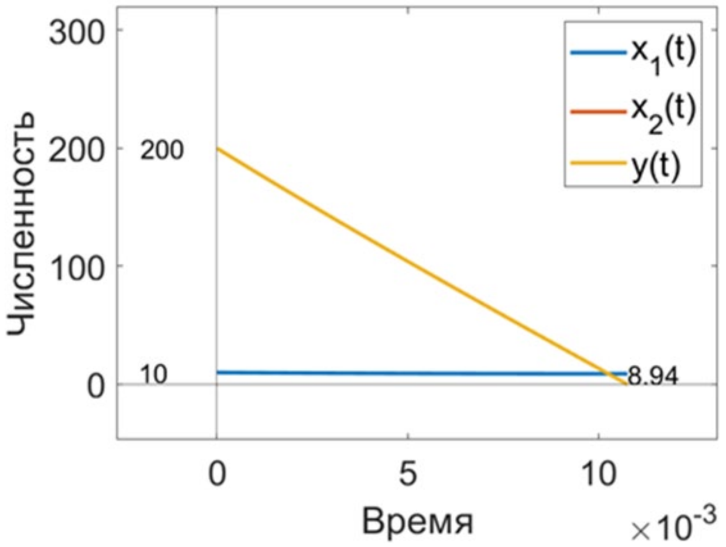


Рис. 2 $x_1(0) = 10, x_2(0) = 0.$

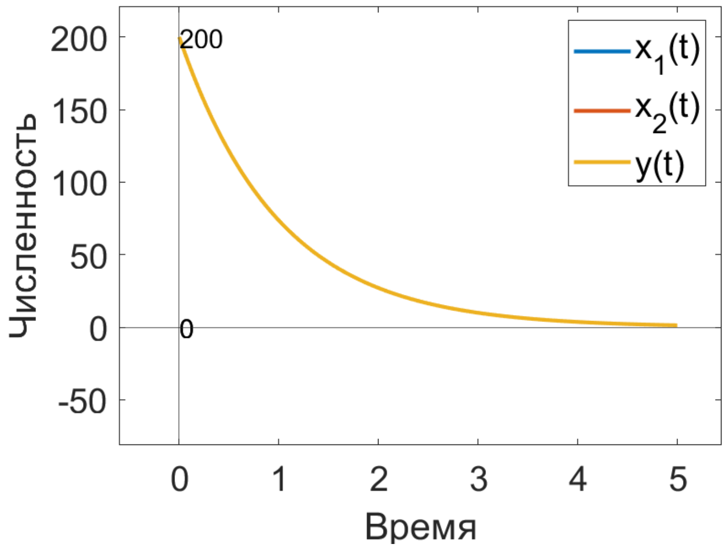


Рис. 3 $x_1(0) = 0, x_2(0) = 200.$ Случай взаимного истребления