

# КОМПАКТНАЯ РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

*В.А. Гордин, А.С. Романов.*

*Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», (ФЭН & ФКН) & Гидрометцентр РФ*

Эволюционное квазилинейное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка – закон сохранения.

$$\partial_t u + \partial_x g(u) = 0, \quad (1)$$

$g$  – заданная гладкая функция,  $x \in [0, 2\pi]$ . Решаем задачу Коши с условиями периодичности.

Аппроксимируем дифференциальное уравнение (1) на сетке  $x_j = jh$ ,  $h = 2\rho / N$ ,  $j = 0, \dots, N$ , где  $t$  - шаг по времени,  $t = 2\rho / M$ ,  $h$  - шаг по пространству; с условием периодичности  $\forall n \quad u_0^n = u_N^n$ . Важна точность решения и гладкого, и скачком.

Здесь разное время возникновения разрыва для разных начальных условий. Для начального условия  $u_0(x) = \sin(x)$  разрыв возникает при  $t \sim 1,05$ . Для начального условия  $u_0(x) = x \sin^3(x)$  разрыв возникает при  $t \sim 0,3$ .

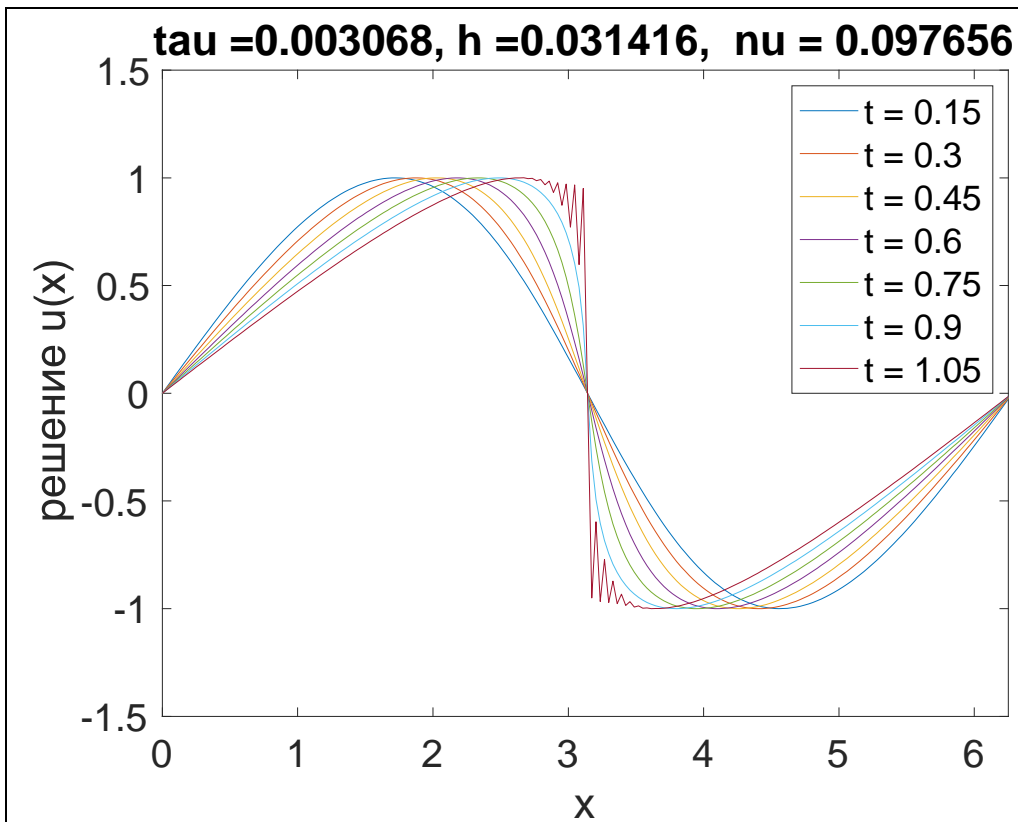
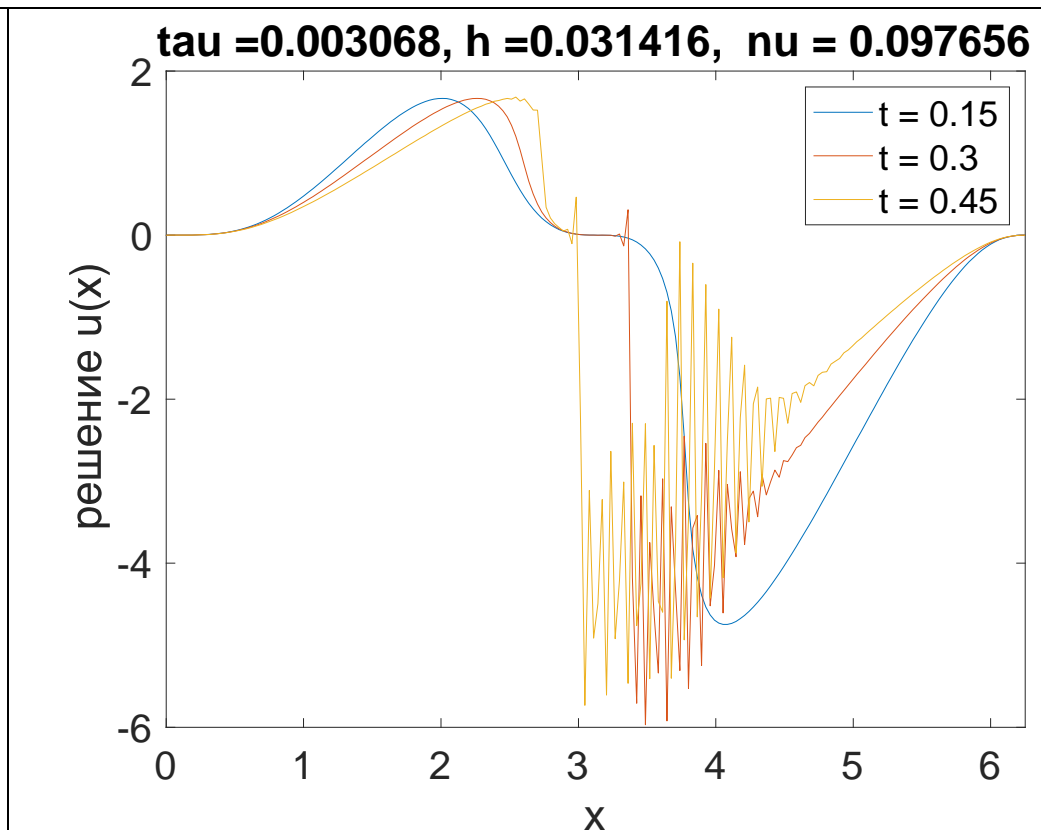


Рис 1. Решение уравнения Эйлера - Хопфа по схеме Лакса - Вендроффа для разных моментов времени. Явная схема. Начальное условие  $u_0(x) = \sin(x)$ .



Решение уравнения Эйлера - Хопфа по схеме Лакса - Вендроффа для разных моментов времени. Явная схема. Начальное условие  $u_0(x) = x \sin^3(x)$ .

На Рис 1. Явная схема имеет лишь 2 порядок точности + в решении возникает «пила» при приближении к градиентной катастрофе. Второе решение для аппроксимации «труднее» первого. Будем исправлять пилу компактной схемой.

## Компактная разностная аппроксимация

Однослойная (двухуровневая) неявная по времени схема с 4 порядком точности на шаблонах 3x2 для вычисления значений  $\{u_j^{n+1}\}$ :

$$a_1 u_{j-1}^{n+1} + b_1 u_j^{n+1} + c_1 u_{j+1}^{n+1} + a_0 u_{j-1}^n + b_0 u_j^n + c_0 u_{j+1}^n = p_1 f_{j-1}^{n+1} + q_1 f_j^{n+1} + r_1 f_{j+1}^{n+1} + p_0 f_{j-1}^n + q_0 f_j^n + r_0 f_{j+1}^n \quad (2)$$

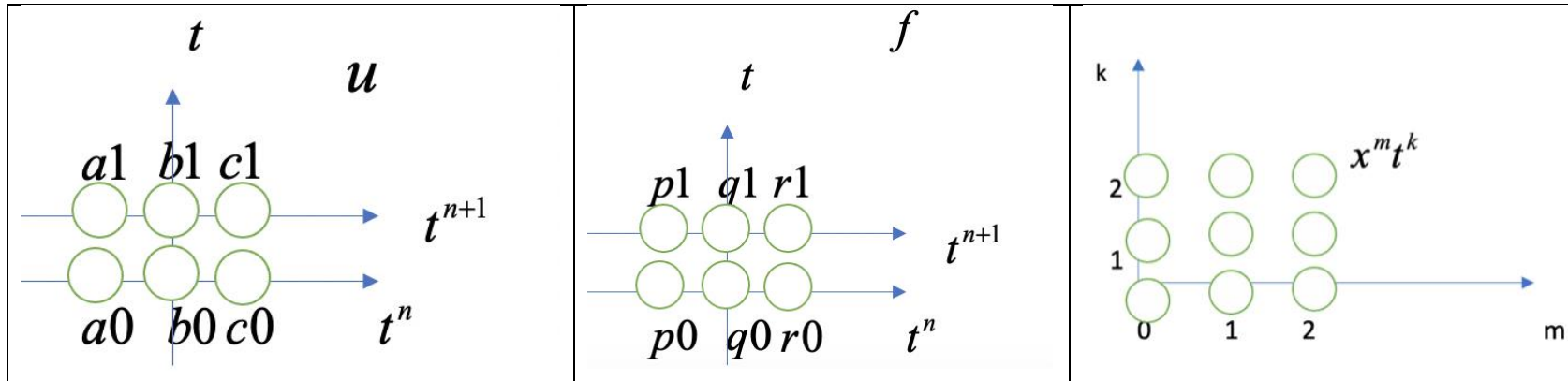


Рис 2. Шаблоны для решения  $u$  и для правой части  $f$  компактной схемы (2) и диаграмма Ньютона тестовых функций

Для обеспечения высокого порядка аппроксимации компактной схемой уравнения (1) для определения ее 12 коэффициентов потребуем точности схемы на 11 тестовых функциях (см. Рис.2с и Табл.1).

Функции  $f_{km}$  получаются из  $u_{km}$  дифференцированием. Кроме того, две пары тестовых функций с  $u=0$  – функция  $f$  может быть отлична от нуля, см. табл. 1.

Таблица 1. Пары тестовых функций и «локальная» СЛАУ для определения коэффициентов компактной схемы (2)

№	$u_{km}$	$f_{km}$	Уравнение
1	1	0	$a_0 + b_0 + c_0 + a_1 + b_1 + c_1 = 0$
2	0	1	$p_0 + q_0 + r_0 + p_1 + q_1 + r_1 = 0$
3	0	$t$	$(p_1 + q_1 + r_1)\tau = 0$
4	$t$	$x$	$(a_1 + b_1 + c_1)\tau = (r_0 + r_1 - p_0 - p_1)h$
5	$t^2$	$2tx$	$(a_1 + b_1 + c_1)\tau^2 = 2h\tau(r_1 - p_1)$
6	$x$	0	$(c_0 + c_1 - a_0 - a_1)h = 0$
7	$x^2$	$t$	$(c_0 + c_1 + a_0 + a_1)h^2 = 0$
8	$tx$	$x^2/2$	$(c_1 - a_1)\tau h = (r_0 + r_1 + p_0 + p_1)h^2/2$
9	$tx^2$	$x^3/3$	$(c_1 + a_1)h^2\tau = (r_0 + r_1 - p_0 - p_1)h^3/3$
10	$xt^2$	$tx^2$	$(c_1 - a_1)h\tau^2 = \tau h^2(r_1 + p_1)$
11	$x^2t^2$	$2tx^3/3$	$(c_1 + a_1)h^2\tau^2 = 2\tau(r_1 - p_1)h^3/3$
12	Нормиров. условие		$p_1 = -3\tau/(2h)$

Решение «локальной» СЛАУ (Таблица 1):

$$a_1 = 1; b_1 = 4; c_1 = 1; a_0 = -1; b_0 = -4; c_0 = -1;$$

$$p_1 = -3t / (2h); q_1 = 0; r_1 = 3t / (2h); p_0 = -3t / (2h); q_0 = 0; r_0 = 3t / (2h).$$

Поскольку здесь  $f = -\frac{u^2}{2}$ , получаем из (2) систему квадратных алгебраических уравнений порядка  $N$  относительно значений  $\{u_j^{n+1}\}$ :

$$\begin{aligned} a_1 u_{j-1}^{n+1} + c_1 u_{j+1}^{n+1} + b_1 u_j^{n+1} = & -a_0 u_{j-1}^n - c_0 u_{j+1}^n - b_0 u_j^n - p_0 \frac{(u_{j-1}^n)^2}{2} - r_0 \frac{(u_{j+1}^n)^2}{2} - \\ & - p_1 \frac{(u_{j-1}^{n+1})^2}{2} - r_1 \frac{(u_{j+1}^{n+1})^2}{2} - q_1 \frac{(u_j^{n+1})^2}{2} - q_0 \frac{(u_j^n)^2}{2}, \quad j = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (3)$$

Чтобы сделать шаг по времени в неявной схеме:  $nt \rightarrow (n+1)t$ , требуется решить систему нелинейных уравнений (3) относительно неизвестных значений  $\{u_j^{n+1}\}_{j=1}^N$ . Это трудная вычислительная задача, которая может иметь много решений. Применим идею линеаризации.

## Явные схемы Лакса – Вендроффа, Адамса-Бэшфорда, и Мак Кормака, как первое приближение для неявной компактной

Например, на каждом шаге для решения системы (1), будем использовать явную схему: Лакса – Вендроффа, а затем применять компактную корректировку.

Явная схема ЛВ (второй порядок точности) состоит из двух шагов:

- Предиктор 
$$u_{j+1/2}^{n+1/2} = \frac{u_j^n + u_{j+1}^n}{2} - th^{-1} \frac{g(u_{j+1}^n) - g(u_j^n)}{2}.$$
- Корректор 
$$u_j^{n+1} = u_j^n - th^{-1} \frac{g(u_{j+1/2}^{n+1/2}) - g(u_{j-1/2}^{n+1/2})}{1}.$$

Другая явная разностная схема Адамса – Бэшфорда (АБ) (второй порядок точности) состоит из двух шагов:

- Предиктор 
$$\tilde{u}_j^{n+1} = u_j^n + \frac{\tau}{2h} [g(u_{j-1}^n) - g(u_{j+1}^n)].$$
- Корректор 
$$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{\tau}{2h} (g(\tilde{u}_{j-1}^{n+1}) - g(\tilde{u}_{j+1}^{n+1})).$$

Также рассматривалась схема Мак-Кормака (МК) (второй порядок точности), которая состоит из двух шагов:

Предиктор  $\tilde{u}_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\tau}{h}[g(u_{j+1}^n) - g(u_j^n)].$

• Корректор  $u_j^{n+1} = \frac{1}{2}[u_j^n + \tilde{u}_j^{n+1} - \frac{\tau}{h}(g(\tilde{u}_j^{n+1}) - g(\tilde{u}_{j-1}^{n+1}))].$

Результат явной схемы обозначим  $\{\tilde{u}_j^{n+1}\}_{j=0}^{N-1}$ . Будем искать решение системы (3) в виде малой поправки к решению, полученному по явной схеме. Введем малые поправки  $\{e_j\}_{j=1}^N$  к  $\tilde{u}_j^{n+1}$ . Подставим  $u_j^{n+1} = \tilde{u}_j^{n+1} + \varepsilon_j$  в нелинейную систему (3):

$$a_1(\tilde{u}_{j-1}^{n+1} + \varepsilon_{j-1}^{n+1}) + c_1(\tilde{u}_{j+1}^{n+1} + \varepsilon_{j+1}^{n+1}) + b_1(\tilde{u}_j^{n+1} + \varepsilon_j^{n+1}) = -a_0 u_{j-1}^n - c_0 u_{j+1}^n - b_0 u_j^n - p_0 \frac{(u_{j-1}^n)^2}{2} - r_0 \frac{(u_{j+1}^n)^2}{2} -$$

$$-p_1 \frac{(\tilde{u}_{j-1}^{n+1} + \varepsilon_{j-1}^{n+1})^2}{2} - r_1 \frac{(\tilde{u}_{j+1}^{n+1} + \varepsilon_{j+1}^{n+1})^2}{2} - q_1 \frac{(\tilde{u}_j^{n+1} + \varepsilon_j^{n+1})^2}{2} - q_0 \frac{(u_j^n)^2}{2}, j = 1, \dots, N-1$$

и используем предположение о малости поправок  $\{e_j\}_{j=1}^N$  по сравнению с решением  $\{u_j\}_{j=1}^N$  - отбросим квадраты поправки. Решаем трехдиагональную «глобальную» (порядок =  $N$ ) СЛАУ:

$$\varepsilon_{j-1}^{n+1} (a_1 + \tilde{u}_{j-1}^{n+1} p_1) + \varepsilon_j^{n+1} (b_1 + \tilde{u}_j^{n+1} q_1) + \varepsilon_{j+1}^{n+1} (c_1 + \tilde{u}_{j+1}^{n+1} r_1) = F_j, \quad j = 0, \dots, N-1, \text{ где}$$

$$F_j = -a_1 \tilde{u}_{j-1}^{n+1} - b_1 \tilde{u}_j^{n+1} - c_1 \tilde{u}_{j+1}^{n+1} - a_0 u_{j-1}^n - c_0 u_{j+1}^n - b_0 u_j^n - p_0 \frac{(u_{j-1}^n)^2}{2} - r_0 \frac{(u_{j+1}^n)^2}{2} - p_1 \frac{(\tilde{u}_{j-1}^{n+1})^2}{2} - r_1 \frac{(\tilde{u}_{j+1}^{n+1})^2}{2} - q_1 \frac{(\tilde{u}_j^{n+1})^2}{2} - q_0 \frac{(u_j^n)^2}{2}$$

- Прибавляем поправки к решению по явной схеме.
- Делаем следующий шаг по явной схеме.

Оценим порядок точности компактных схем до градиентной катастрофы. При начальном условии  $u_0(x) = \sin(x)$  через время  $T_* = \frac{\rho}{2}$  в решении уравнения (1) возникает разрыв в точке  $\rho$ . Поскольку перед этим производная по  $x$  решения неограниченно растет, такое явление называется градиентной катастрофой.

Метод оценки точности: вычислялось эталонное решение  $u_{etal}$  на мелкой сетке при  $N = 400, M=8192$ . Затем для грубых разрешений  $N_i$  вычислялись решения  $u_i$ . Далее  $u_{etal}$  и  $u_i$  ограничиваем на грубую сетку ( $N = 50, M = 32$ ), и вычисляем погрешность  $err_i = \|u_{etal} - u_i\|$

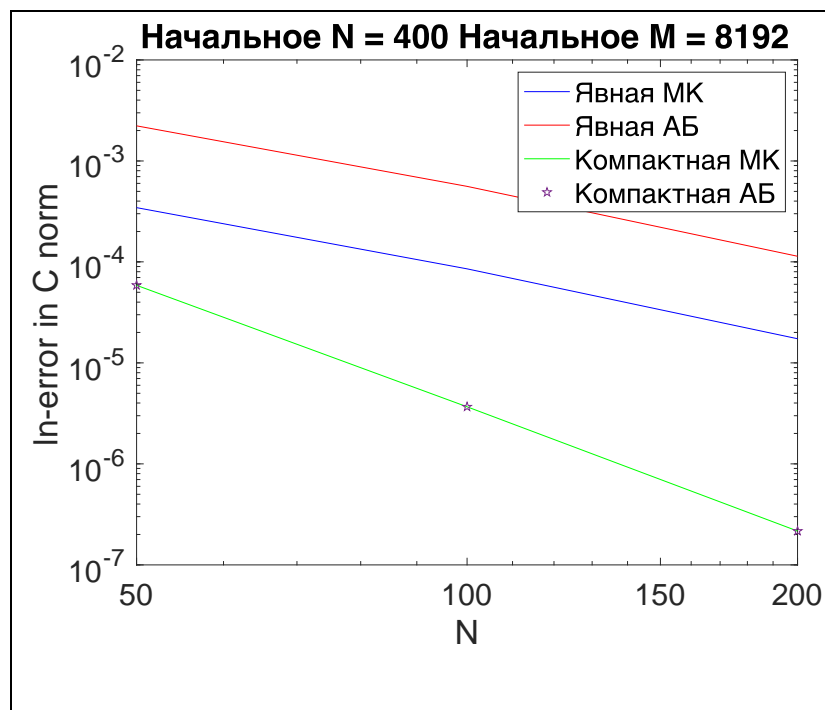
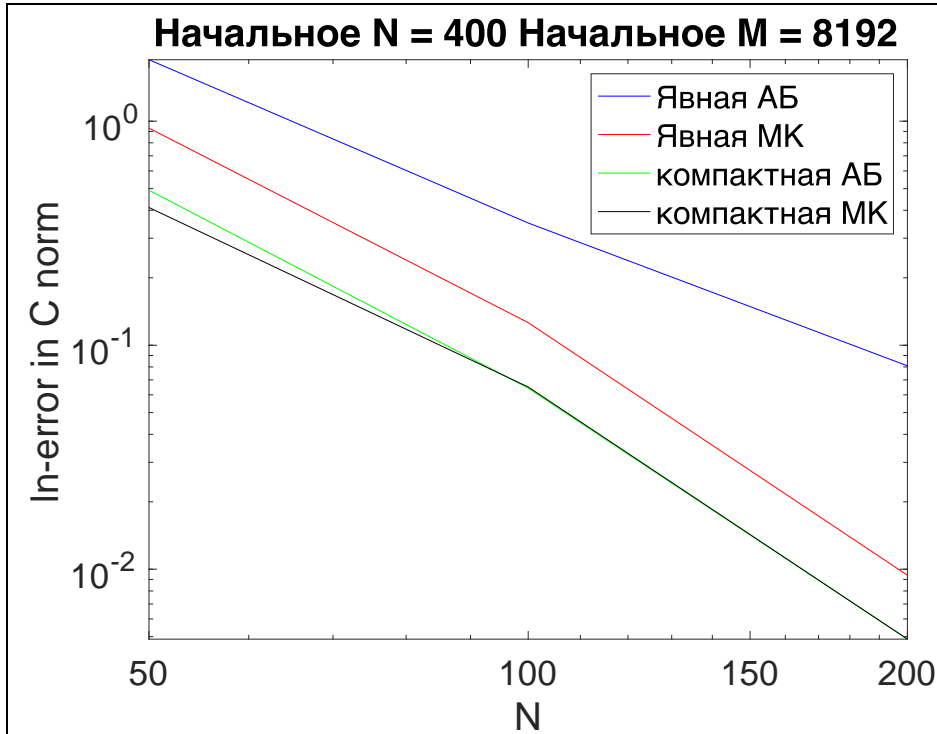


Рис 3. C-норма погрешности схем в зависимости от разрешения  $N$  в ln-системе до  $T = 1$ . Параметры для мелкой сетки  $V = 0,1, h = 0,015, \tau = 7,67e-04$ . Начальное условие  $u_0(x) = \sin(x)$ .

**Порядки точности:**  
**2,15 (Явная - МК)/2,14(Явная - АБ)/4,04 (компактная МК, компактная АБ - совпадают). Компактная много лучше!**





**Рис 4.** C-норма погрешности схем в зависимости от разрешения  $N$  в ln-системе до  $T = 1$ . Параметры для мелкой сетки  $V = 0,1$ ,  $h = 0,015$ ,  $\tau = 7,67e-04$   
Начальное условие  $u_0(x) = x \sin^3(x)$ .

**Порядки точности:**  
**2,8 (Явная МК)/2,26(Явная АБ)/3,32**  
**(компактная МК, компактная АБ).**  
**Компактная много лучше!**

Второе пробное решение труднее для аппроксимации: оно не симметрично, имеет большую амплитуду функции и производной. Поэтому и результаты решения на нем хуже, чем на первом.

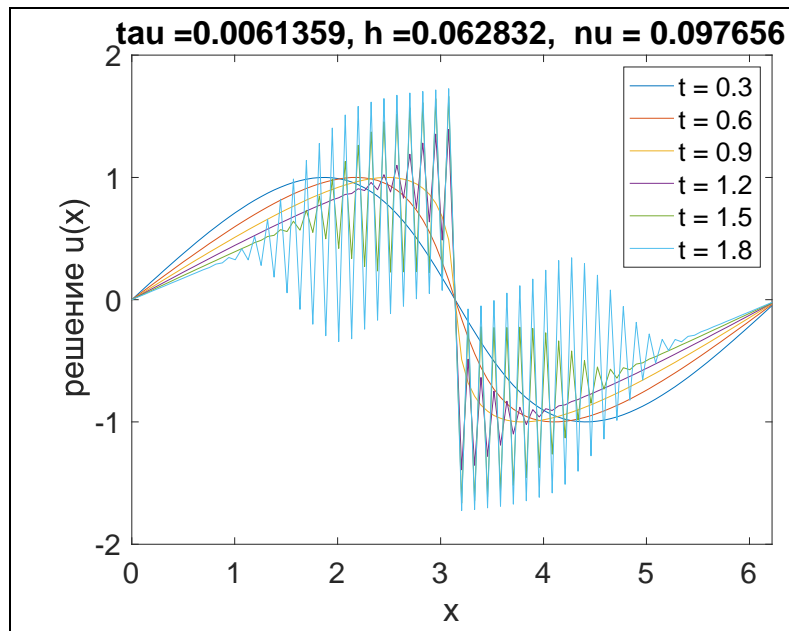


Рис 5. Решение уравнения Эйлера - Хопфа по схеме (Лакса - Вендроффа & компактная схема) для разных моментов времени.

Начальное условие  $u_0(x) = \sin(x)$ .

Численное решение начинает осциллировать по мере приближения к градиентной катастрофе - моменту возникновения скачка в решении дифференциальном уравнении

В решении даже по компактной схеме при приближении к градиентной катастрофе возникает двухшаговая пила. Поэтому используем следующий специальный трехшаговый оператор сглаживания, чтобы подавить двухшаговую пилу в решении, минимально исказив длинные волны.

Пусть  $P$  – оператор десглаживания (аналогичный второй разностной производной, действует по формуле:  $(Pf)_j = f_j - (f_{j+1} + f_{j-1})/2$ .

Замечание. Здесь все функции предполагаются периодическими. В противном случае на краях нужно использовать граничные условия на сглаживаемую функцию. Пусть оператор  $S = P^3/8$ . При применении его к функции выделяется коротковолновая составляющая, которую можно вычесть:  $u \Rightarrow u - P[P[Pu]]/8$ .

Процедуру сглаживания мы применяем только в точках осцилляции решения. Сначала найдем точки, для которых в решении выполнено неравенство:

$$|S| > 0,0001. \quad (4)$$

Далее для точек сетки, в которых выполнено (4), используем оператор сглаживания  $r[u] = \frac{1}{4}[u_{j-1} + 2u_j + u_{j+1}]$ . Этот оператор позволяет вычислительные осцилляции в решении.

Отдельным алгоритмом обрабатываются точки на краю скачка. Здесь сглаживание совершенно неуместно. Для диагностики таких точек вычисляем значение  $g_j = \frac{|u_{j-1} - u_j|}{|u_{j+1} - u_j|}$ .

Если  $g_j > 100$ , то мы полагаем, что точка находится на правом берегу скачка и используем формулу  $u_j = 2u_{j+1} - u_{j+2}$ . Если  $g_{j+1} < 0.01$ , то используем формулу  $u_{j-1} = 2u_{j-2} - u_{j-3}$ .

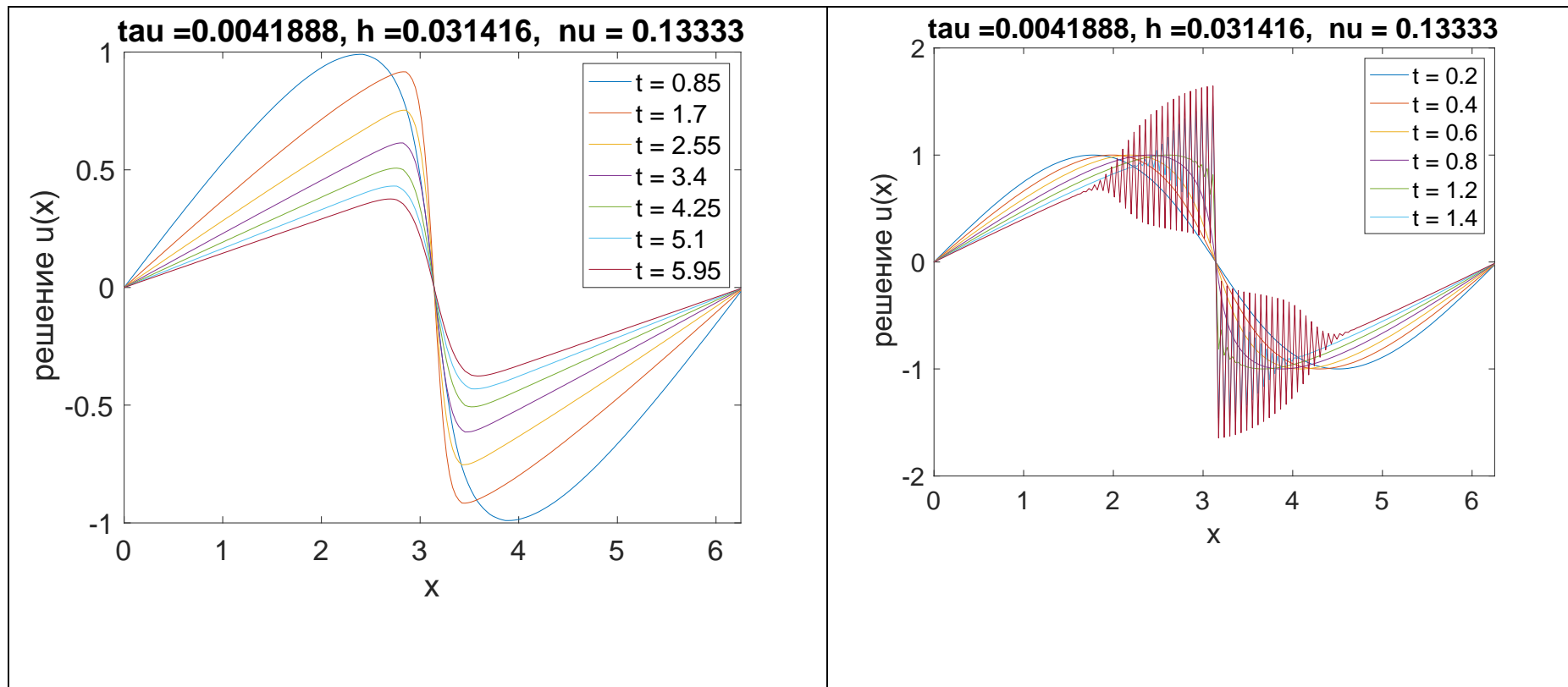


Рис 6. Слева решение уравнения Эйлера - Хопфа по схеме Лакса - Вендроффа для компактной схемы с операторами сглаживания. Справа – без операторов сглаживания. Начальное условие  $u_0(x) = \sin(x)$ . Компактная схема & ЛВ с оператором сглаживания подавляет вычислительную пилу, которая возникает у явной схемы.

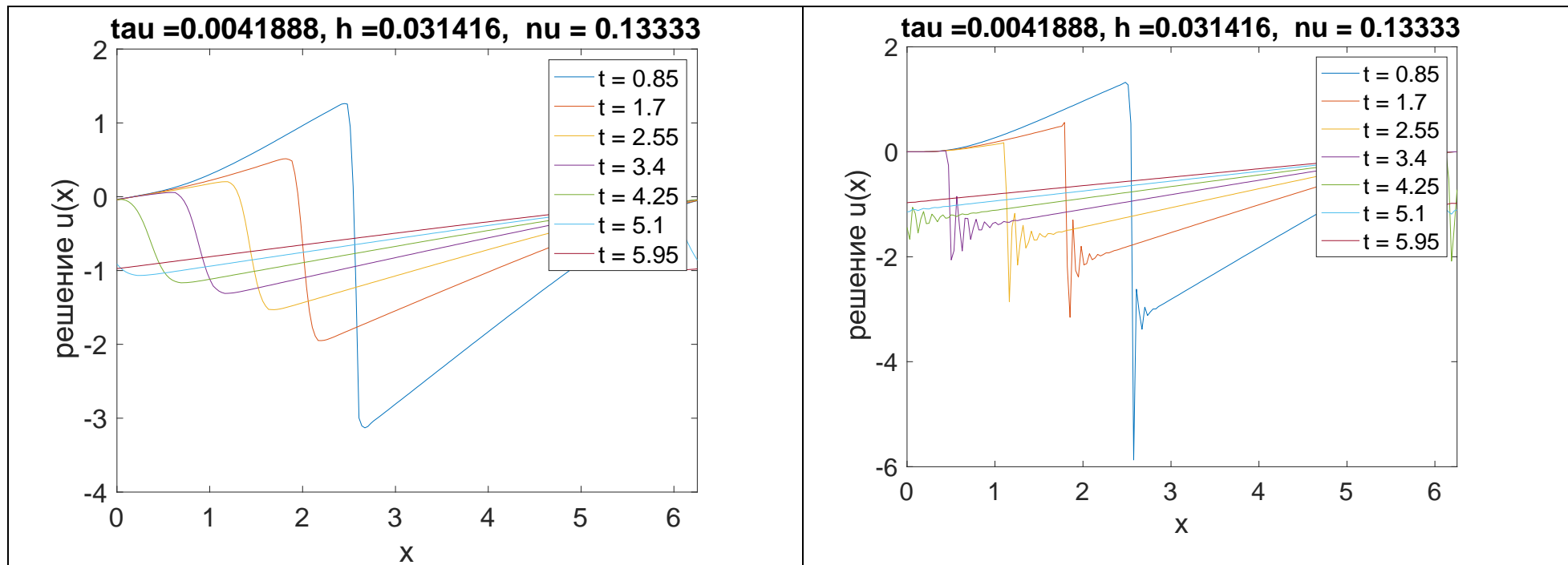


Рис 7. Слева решение уравнения Эйлера - Хопфа по схеме Лакса - Вендроффа для компактной схемы с операторами сглаживания. Справа – без операторов сглаживания. Начальное условие  $u_0(x) = x \sin^3(x)$ .

Для начального условия  $u_0(x) = x \sin^3(x)$ , компактная схема с операторами сглаживания также лучше ведет себя по сравнению с компактной схемой без операторов сглаживания. На рис 7. использовалась схема с операторами сглаживания.

С оператором сглаживания компактная схема устойчива. Компактные схемы без оператора сглаживания с первым шагом по МК/АБ неустойчивы для  $D = 0$ .

Компактная схема с операторами сглаживания устойчива при  $\eta < 2$  для начального условия  $u_0(x) = \sin(x)$ . Для начального условия  $u_0(x) = x \sin^3(x)$  компактная схема со сглаживанием устойчива при  $\eta < 0.5$ .

Проверяли при длинном времени интегрирования (когда в аналитическом решении давно возник скачок):  $T = 2\rho$ .

## Простейшая модель газо- и гидро-динамики – уравнение Бейтмана - Бюргерса:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \text{число Рейнольдса } Re = \frac{UL}{D}.$$

где  $u = u(t, x)$  - скорость,  $D$  - коэффициент вязкости,  $x \in [0, 2\pi]$ , периодичность по  $x$ .

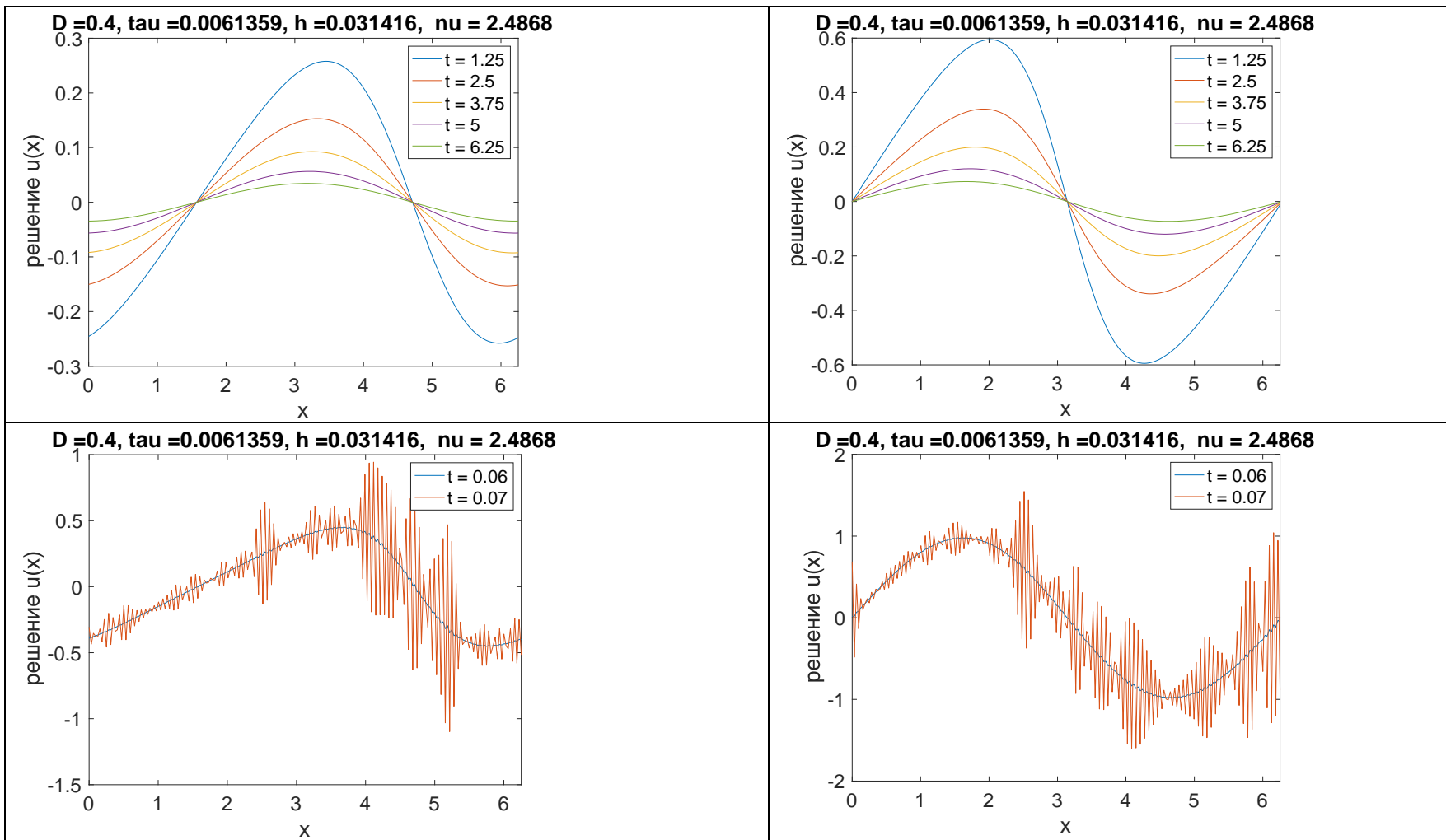
Для компактной аппроксимации перепишем в виде:

$$\frac{\mathbb{1}u}{\mathbb{1}t} - D \frac{\mathbb{1}^2 u}{\mathbb{1}x^2} = \frac{\mathbb{1}f}{\mathbb{1}x}, \quad f = -u^2 / 2. \quad (1)$$

С помощью замены Форсайта – Флорина – Коула – Хопфа получаем из решения  $\sin(2\pi x) \exp(-4\pi^2 Dt)$  для обычного уравнения диффузии точное решение уравнения (1):

$$u_0(x) = \frac{-2D \cos(x)}{2 \exp(Dt) + \sin(x)}. \quad (2)$$

На нем оценим погрешности различных разностных схем.



**Рис 8.** Решение компактной схемы после АБ для  $\tau = 0.006$ ,  $h = 0.03$ ,  $D = 0.4$ ,  $\nu = D\tau h^{-2}$  в разные моменты времени. 8а) начальное условие для аналитического решения (2) уравнения Б-Б:  $u_0(x) = \frac{-2D \cos(x)}{2 + \sin(x)}$ ; 8б)  $u_0(x) = \sin(x)$ ; 8в) решение по явной схеме для начального условия 8а); 8г) решение по явной схеме для начального условия 8б)



Аппроксимируем дифференциальное уравнение (1) с условием периодичности на сетке  $x_j = jh$ ,  $h = 1/N$ ,  $j = 0, \dots, N$ ;  $t = nt$ , где  $t$  - шаг по времени,  $t = T/M$ ,  $h$  - шаг по пространству;  $\forall n \quad u_0^n = u_N^n$ .

### Компактная разностная аппроксимация для Б-Б

Однослойная неявная (двухуровневая) по времени схема с 3 порядком точности на шаблонах  $3 \times 2$  для вычисления значений  $\{u_j^{n+1}\}$ :

$$a_1 u_{j-1}^{n+1} + b_1 u_j^{n+1} + c_1 u_{j+1}^{n+1} + a_0 u_{j-1}^n + b_0 u_j^n + c_0 u_{j+1}^n = p_1 f_{j-1}^{n+1} + q_1 f_j^{n+1} + r_1 f_{j+1}^{n+1} + p_0 f_{j-1}^n + q_0 f_j^n + r_0 f_{j+1}^n \quad (3)$$

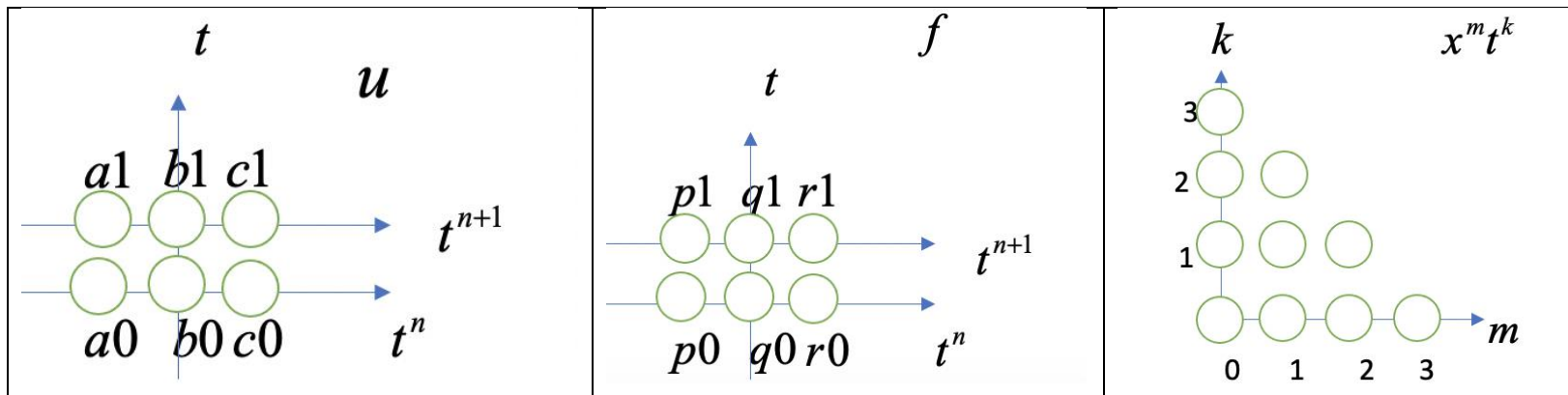


Рис 9. Шаблоны для решения  $u$  и для правой части  $f$  компактной схемы (3) и диаграмма Ньютона тестовых функций. Для обеспечения высокого порядка аппроксимации компактной схемой уравнения (1) для определения ее 12 коэффициентов потребуем точности схемы на 11 тестовых функциях (см. Рис.9с и Табл.1).

Пара тестовых функций  $u = 0$ ,  $f = t^2$  дает уравнение, пропорциональное уравнению №3, поэтому его из СЛАУ исключаем.

Таблица 1. Пары тестовых функций и «локальная» СЛАУ для определения коэффициентов компактной схемы (3)

№	$u$	$f$	Уравнение
1	1	0	$a_0 + b_0 + c_0 + a_1 + b_1 + c_1 = 0$
2	0	1	$p_0 + q_0 + r_0 + p_1 + q_1 + r_1 = 0$
3	0	$t$	$(p_1 + q_1 + r_1)\tau = 0$
4	$t$	$x$	$(a_1 + b_1 + c_1)\tau = (r_0 + r_1 - p_0 - p_1)h$
5	$t^2$	$2tx$	$(a_1 + b_1 + c_1)\tau^2 = 2h\tau(r_1 - p_1)$
6	$x$	0	$(c_0 + c_1 - a_0 - a_1)h = 0$
7	$x^2$	$-2Dx$	$(c_0 + c_1 + a_0 + a_1)h^2 = -2D(r_0 + r_1 - p_0 - p_1)h$
8	$x^3$	$-3Dx^2$	$(c_0 + c_1 - a_0 - a_1)h^3 = -3D(r_0 + r_1 + p_0 + p_1)h^2$
9	$tx$	$x^2/2$	$(c_1 - a_1)\tau h = (r_0 + r_1 + p_0 + p_1)h^2/2$
10	$tx^2$	$x^3/3 - 2Dtx$	$(c_1 + a_1)h^2 = (r_0 + r_1 - p_0 - p_1)h^3/3 - 2Dh\tau(r_1 - p_1)$
11	$xt^2$	$tx^2$	$(c_1 - a_1)h\tau^2 = \tau h^2(r_1 + p_1)$

Решение «локальной» СЛАУ (где параметр Куранта  $\nu = D\tau h^{-2}$ ):

$$a_1 = -2/3 + 2\nu; \quad b_1 = -8/3 - 4\nu; \quad c_1 = -2/3 + 2\nu; \quad a_0 = 2/3 + 2\nu; \quad b_0 = 8/3 - 4\nu; \quad c_0 = 2/3 + 2\nu;$$

$$p_1 = t/h; \quad q_1 = 0; \quad r_1 = -t/h; \quad p_0 = t/h; \quad q_0 = 0; \quad r_0 = -t/h.$$

## Схемы Адамса – Бэшфорда и Мак-Кормака, как первое приближение для компактной

На каждом шаге для решения системы (4), будем использовать явные схемы: Адамса – Бэшфорда или Мак-Кормака, а затем применять компактную корректировку со сглаживанием. Явная схема МК лучше, имеет меньшую абсолютную ошибку (рис 11).

Явная схема АБ (второй порядок точности) состоит из двух шагов:

- Предиктор 
$$u_j^{n+1/2} = u_j^n + \tau \frac{u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n}{2} + t \frac{(u_{j-1}^n)^2 - (u_{j+1}^n)^2}{4h}$$
- Корректор 
$$\hat{u}_j^{n+1} = u_j^n + \tau(u_{j-1}^{n+1/2} - 2u_j^{n+1/2} + u_{j+1}^{n+1/2}) + t \frac{(u_{j-1}^{n+1/2})^2 - (u_{j+1}^{n+1/2})^2}{4h}$$

Явная схема МК (второй порядок точности) состоит из двух шагов:

- Предиктор 
$$u_j^{n+1/2} = u_j^n + \tau[u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n] - t \frac{(u_{j+1}^n)^2 - (u_j^n)^2}{2h}$$
- Корректор 
$$\hat{u}_j^{n+1} = \frac{1}{2}[u_j^n + u_j^{n+1/2}] + \frac{\tau(u_{j+1}^{n+1/2} - 2u_j^{n+1/2} + u_{j-1}^{n+1/2})}{2} - t \frac{(u_j^{n+1/2})^2 - (u_{j-1}^{n+1/2})^2}{4h}$$

**Но ведь здесь начинаются численные эксперименты для Б-Б, а не где-то еще!!!**

## Устойчивость схем.

D							
0,32	Уст(6e-07)	уст (1,16e-06)	Уст(2,4e-06)	Уст(9e-05)	Уст(0.0004)	Уст(0.0015)	Уст(0.012)
0,16	Уст(1,3e-06)	уст (2,7e-06)	Уст(1e-05)	Уст(0.0002)	Уст(0.0008)	Уст(0.005)	Уст(0.013)
0,08	Уст(6e-06)	уст (2,5e-05)	Уст(9e-05)	Уст(0.0008)	Уст(0.0032)	уст(0,04)	Уст(0,02)
0,04	Уст(5e-05)	уст (0.0002)	Уст(0.0007)	Уст(0.003)	Уст(0,011)	уст(0,21)	Уст(0,17)
0,02	Уст(0.0002)	уст (0.0009)	Уст(0.0035)	Уст(0.007)	уст(0,054)	Уст(0,58)	Уст(0,6/0,12)
0,01	Уст(0.0005)	уст (0.002)	Уст(0.008)	Уст(0,034)	Уст(0,13)	пик в $\rho$	Неуст(0,8/0,4/0,080)
0,007	Пик в $\rho$ (0,001)	Пик в $\rho$ (0,003)	Пик в $\rho$	пик в $\rho$ (0,04)	Пик в $\rho$ (0,19)	пик в $\rho$ (1,45/0,29)	неуст
0,005	пик в $\rho$ (0.0012)	пик в $\rho$ (0.0042)	пик в $\rho$ (0,017)	пик в $\rho$ (0,07)	пик в $\rho$ (0,305)	неуст	неуст
0,0001	неуст	неуст	неуст	неуст	неуст	неуст	неуст
D=0	неуст	неуст	неуст	неуст	неуст	неуст	неуст
$\tau * U_{\max}/h$	0,05	0,1	0,2	0,4	0,8	1,6	3,2

**Таблица 1.** Таблица устойчивости решения для компактной схемы в координатах  $(D, \frac{tU_{\max}}{h})$ . В скобках

указана максимальная ошибка по эpsilonам  $\max_j |\varepsilon_j(t)|$ , где эpsilonоны – значения из компактной схемы.

Начальное условие бралось  $u_0(x) = \sin(x)$ .  $N = 200$ ,  $M$  менялось от 50 до 4096. Пик – невыпуклая функция между соседними точками.

Две итерации улучшают решение при  $D = 0,007$   $\tau * U_{\max}/h = 1,6$ . Тогда после второй итерации схема имеет пик в точке пи. Максимальное значение после первой итерации равно 1,45, после второй 0,29. Если делать больше итераций ( $\max(|\varepsilon_j|) > 0,15$ ), то решение становится устойчивым.

Три итерации улучшают решение при  $D = 0,005$ ,  $\tau * U_{\max}/h = 1,6$ . Тогда схема имеет пик в точке пи. После первой итерации  $\text{Max}(|\varepsilon_j|) = 1,52$ . После второй итерации  $\text{Max}(|\varepsilon_j|) = 0,38$ , После третьей  $\text{max}(|\varepsilon_j|) = 0,19$ .

Если сделать 10 итераций, то все схемы табл 1 устойчивы, кроме  $D = 0,0001$ . Если брать 90 итераций, то схемы с  $D = 0,0001$  также неустойчивы. Получается, что компактная схема с большим количеством итераций устойчива, кроме случая, когда  $D$  весьма мало.

Будем считать компактную корректировку решения на каждом шаге по времени до тех пор, пока не обеспечим неравенство  $\max(|\varepsilon_j|) < 0,1$ . В таком случае решение схемы для значений в табл 1 устойчиво для различных  $D$ , кроме очень малых  $D$ , начиная от  $D = 0,0005$ . Значение 0,1 выбрано исходя из таблицы 1. При  $\tau * U_{\max}/h = 3,2$  для  $D = 0,02$  компактная схема устойчива и имеет пики при  $\max(|\varepsilon_j|) = 0,12$ . Аналогично при  $\tau * U_{\max}/h = 3,2$  для  $D = 0,01$  компактная схема устойчива и имеет пики при  $\max(|\varepsilon_j|) = 0,08$ . Если положить условие на компактную корректировку  $\max(\text{eps}) > 0,01$ , то обе схемы будут устойчивы. Аналогичный анализ был проведен для различных  $\tau * U_{\max}/h$  в таблице 1. При  $\max(|\varepsilon_j|) > 0,01$  компактная схема устойчива. Если же  $\max(|\varepsilon_j|) > 0,02$ , то при  $D = 0,007$ ,  $\tau * U_{\max}/h = 3,2$  схема неустойчива, но при  $\max(|\varepsilon_j|) > 0,01$  она устойчива.

Вывод: компактная схема устойчива при больших  $D$ . При маленьких  $D$  наблюдается немонотонность решения (пила).

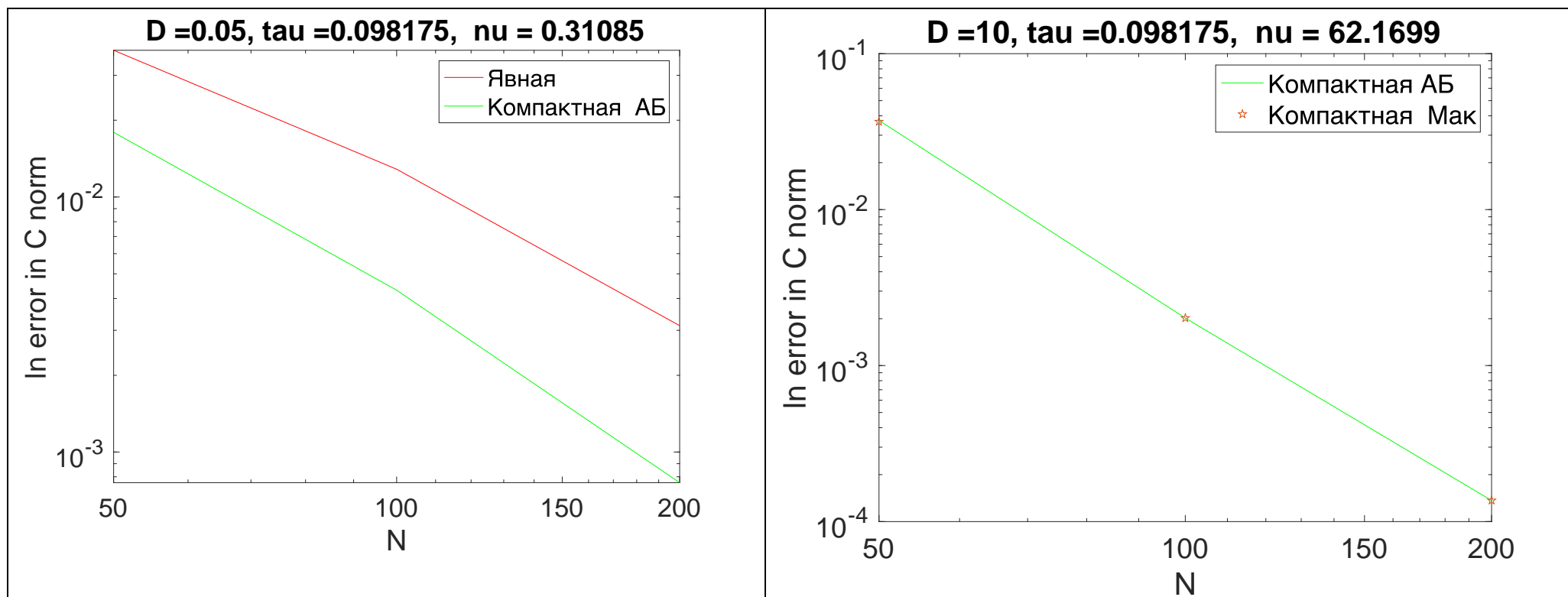
$D$							
0,32	уст	неуст	неуст	неуст	неуст	неуст	неуст
0,16	уст	уст	неуст	неуст	неуст	неуст	неуст
0,08	уст	уст	уст	неуст	неуст	неуст	неуст
0,04	уст	уст	уст	уст	неуст	неуст	неуст
0,02	уст	уст	уст	уст	уст	неуст	неуст
0,01	уст	уст	уст	уст	уст	неуст	неуст
0,005	пик в пи	пик в пи	пик в пи	пик в пи	пик в пи	неуст	неуст
0,0001	Пик в пи	Пик в пи	Пик в пи	Пик в пи	Пик в пи	неуст	неуст
$D=0$	Пик в пи	Пик в пи	Пик в пи	Пик в пи	Пик в пи	неуст	неуст
$\tau * U_{\max}/h$	0,05	0,1	0,2	0,4	0,8	1,6	3,2

**Таблица 2.** Таблица устойчивости решения для явной схемы в координатах  $D$ ,  $\tau * U_{\max}/h$ . Начальное условие бралось  $u_0(x) = \sin(x)$ .  $N = 200$ ,  $M$  менялось от 50 до 4096.

Вывод: явная схема (в ней есть вычислительная вязкость) устойчива при маленьких  $D$ . Компактная схема с итерациями по эpsilonам  $\max(|\varepsilon_j|) > 0,15$  устойчива даже при  $D = 0$ .

Будем считать порядок схемы для различных начальных условий.

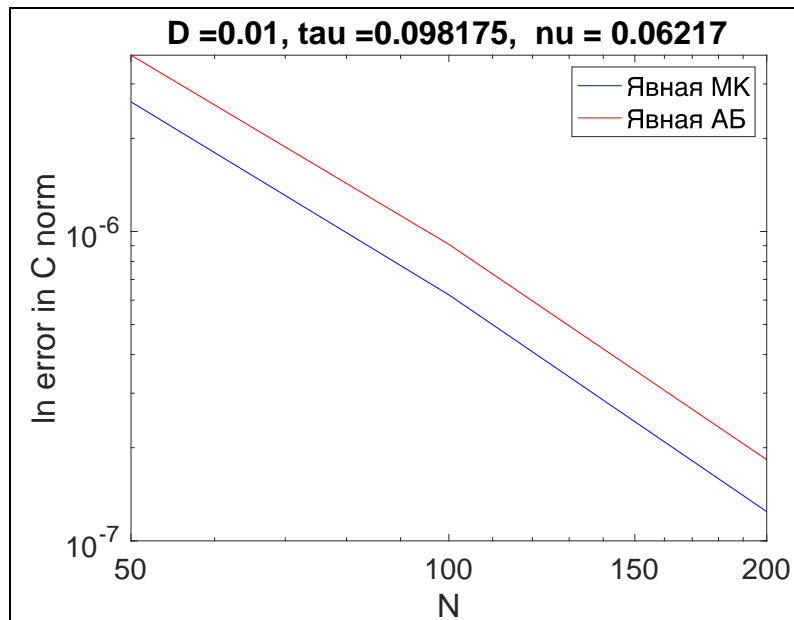
Близкое к ударной волне решение уравнения (1) с начальной функцией  $u_0 = \sin(x)$ ,  $x \in [0, 2\pi]$ . Большой градиент решения при  $t \rightarrow +\infty$  около точки  $x = \pi$ , особенно при малых  $D$ . Сначала вычислялось эталонное решение  $u_{etal}$  на мелкой сетке при  $N = 400$ ,  $M=4096$ . Затем для грубых разрешений  $N_i$  вычислялись решения  $u_i$ . Далее  $u_{etal}$  и  $u_i$  ограничиваем на грубую сетку ( $N = 25$ ,  $M = 16$ ), и вычисляем погрешность  $err_i = \|u_{etal} - u_i\|$ .



**Рис 10.** Ошибка для компактной/явной схемы до  $T = 1$ .

На рис 10 с  $D = 0,05$  порядок компактной = 2,2. Порядок явной = 1,66.

Если увеличить коэффициент диффузии  $D$ , то порядок компактной до разрыва равен 4. (При  $D = 10$  порядок компактной даже равен 5). Явная схема при этом неустойчива. Компактная схема до  $T = 1$  имеет порядок **на 2** раза выше явной.



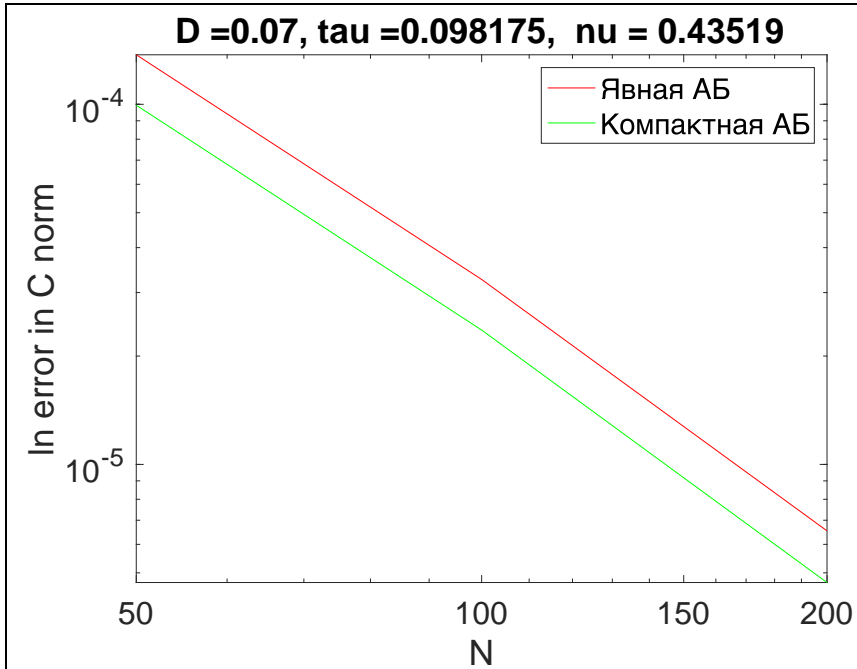
**Рис 11.** C-норма погрешности схем в зависимости от разрешения  $N$  в ln-системе до  $T = 2\pi$ . Параметры для мелкой сетки  $D = 0,01$ ,  $h = 2\pi/400$ ,  $\tau = 2\pi/4096$

Начальное условие  $u_0(x) = \frac{-2D \cos(x)}{2 + \sin(x)}$ .

**Порядки точности:**

**2,2 (Явная МК)/2,17(Явная АБ)**





**Рис 12.** C-норма погрешности схем в зависимости от разрешения  $N$  в **ln**-системе до  $T = 2\pi$ . Параметры для мелкой сетки  $D = 0,07, h = 2\pi/400, \tau = 2\pi/4096$

Начальное условие  $u_0(x) = \frac{-2D \cos(x)}{2 + \sin(x)}$ .

**Порядки точности:**

**2,19 (Явная АБ)/2,2(Компактная АБ)**

На рис 11: явная схема МК имеет такой же порядок как явная схема АБ, но имеет меньшее значение ошибки. На рис 12 компактная схема имеет такой же порядок, как явная схема АБ, но имеет меньшее значение ошибки.

### **Результаты численных экспериментов на точном решении уравнения Б-Б**

Приведем результаты порядка схемы в зависимости от различных начальных условий и параметров.

**Таблица 2.** Погрешность явных/компактных схем в зависимости от параметров

уравнения Б-Б для  $u_0(x) = \frac{-2D \cos(x)}{2 + \sin(x)}$

Схема явная/компактная	Норма	Параметры	Порядок
МК	C	$D = 0,01, T = 2\rho, n = 0,062$	2,14/2,18
МК	C	$D = 0,001, T = 2\rho,$ $n = 6,26e - 04$	2,14/2,19
МК	C	$D = 0,1, T = 2\rho, n = 0,62$	Неуст/2,21
МК	C	$D = 1, T = 2\rho, n = 6,21$	Неуст/2,69
МК	C	$D = 0,1, T = 1,25, n = 0,62$	Неуст/ 2,19
АБ	C	$D = 0,1, T = 2\rho, n = 0,62$	Неуст/2,19
АБ	C	$D = 0,04, T = 2\rho, n = 0,25$	2,17/2,19
АБ	C	$D = 0,001, T = 2\rho$	2,15/2,15

На этом тестовом решении случай  $D=0$  не адекватен – получается нулевое решение.

Из табл 2. следует, что компактная схема везде лучше явной схемы. Часто, компактная схема устойчива и имеет 2,2 порядок, когда явная неустойчива.

**Таблица 3** Погрешность явных/комп схем в зависимости от параметров уравнения  
Б-Б для начальной функции  $u_0 = \sin(x), x \in [0, 2\pi]$

Схема явная /компактная	Параметры	Порядок
МК	$D = 0.000025, T = 0.5, \nu = 0.0000125$	1.81/3.93
МК	$D = 0.0025, T = 1, \nu = 0.0025$	0.64/1.52
МК	$D = 0.04, T = 1, \nu = 0.04$	Неуст/2.11
МК	$D = 0.02, T = 0.5, \nu = 0.01$	0.5/2.5
МК	$D = 1, T = 0.5, \nu = 0.5$	Неуст/ 2.11
АБ	$D = 0.06, T = 6, \nu = 0.356$	1.55/1.98
АБ	$D = 0.01, T = 6, \nu = 0.06$	0.84/1.14
АБ	$D = 0,1, T = 2\rho, \nu = 0,62$	Неуст/2.36
АБ	$D = 5, T = 2\rho, \nu = 31$	Неуст/3.8
АБ	$D = 10, T = 2\rho, \nu = 62$	Неуст/4.04

На табл 3. компактная схема везде имеет порядок лучше явной. Часто она устойчива и имеет 4 порядок, в то время как явная неустойчива. А для  $D=0$  обе схемы неуст.

После Мак-Кормака - устойчивость компактной схемы при параметре Куранта  $n < 5$ .

Устойчивость для явной схемы Мак-Кормака:  $n < 0,01$ .

После Адамса - Бешфорда -устойчивость компактной схемы  $n > 0,03$ .

Устойчивость для явной схемы АБ:  $n < 0,4$ .

До  $n < 0,4$  лучше применять компактную схему после Мак-Кормака. При больших  $\nu$  компактная схема после АБ дает больший порядок точности, чем после МК. (От 2 до 4,4 при больших  $n$ ) Ее стоит использовать для  $120 > n > 0,4$ .

Две итерации по приспособлению результата явной к компактной схеме полезны при различных наборах  $D$  и  $\tau * U_{\max}/h$ . Порядок улучшается на десятые величины, при двойных итерациях.

При применении многократной корректировки решения компактной схемой на каждом шаге по времени до  $\max(|\varepsilon_j|) < 0,01$ , компактная схема со сглаживанием устойчива для всех  $D$ , кроме весьма малых.

**Уравнение ФКП - описывает распространение доминантного гена:**

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u), D = \text{const} > 0, f(u) = u(1 - u), \quad (5)$$

где  $u = u(t, x)$  - относительная плотность распределения числа особей с доминантным геном,  $x \in R$ .

Тестовые функции схемы - мономы  $x^{2m}t^k, m \leq 2, k \leq 2$ .

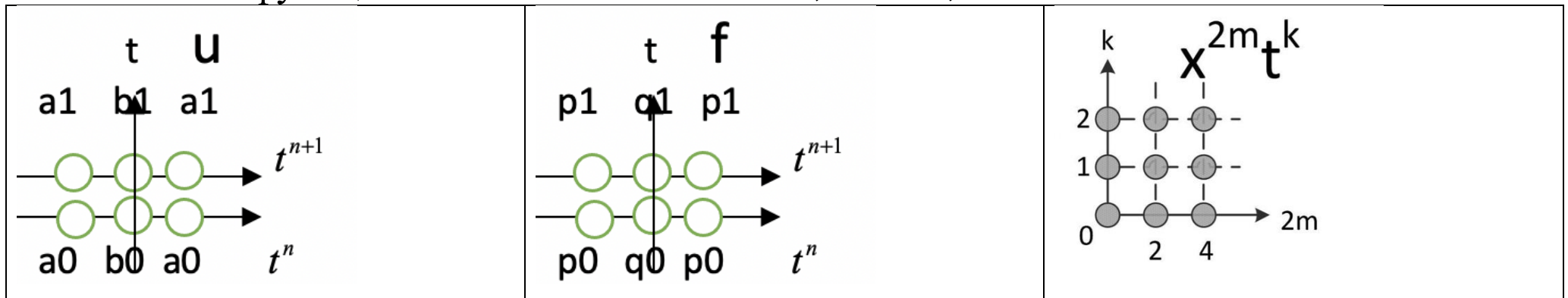


Рис 13. Шаблоны для решения  $u$  и правой части  $f$  компактной схемы и диаграмма Ньютона тестовых функций

Таблица 4. Пары тестовых функций и «локальная» СЛАУ для определения коэффициентов компактной схемы (5)

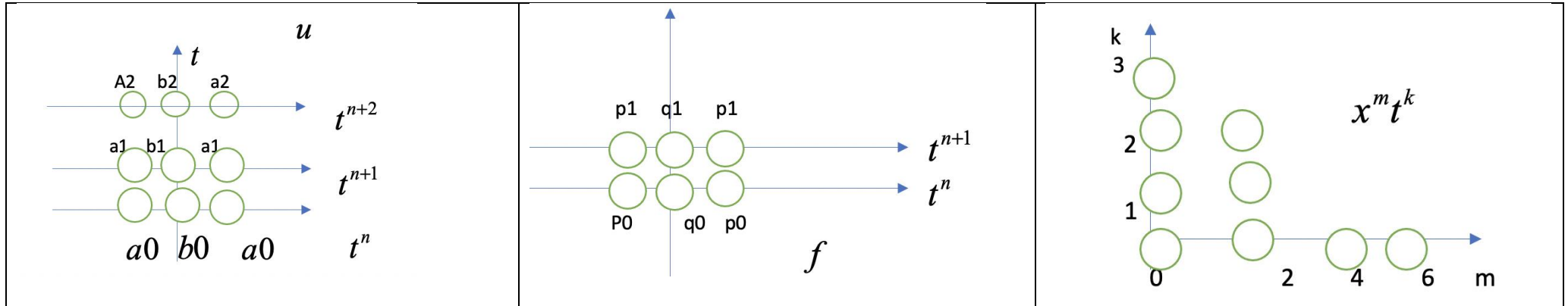


Рис 14. Шаблоны для решения  $u$  и правой части  $f$  компактной схемы и диаграмма Ньютона тестовых функций

Для рис 14 коэффициенты равны  $a_0 = -1, b_0 = 2, a_1 = 2, b_1 = -4, a_2 = -1, b_2 = 2$ . Они дают второй порядок компактной схемы. Поэтому далее данную схему рассматривать не будем.

№	$u$	$f$	Уравнение
1	1	0	$2a_0 + b_0 + 2a_1 + b_1 = 0$
2	$t$	1	$(2a_1 + b_1)t = 2p_0 + q_0 + 2p_1 + q_1$
3	$t^2$	$2t$	$(2a_1 + b_1)t^2 = 2t(2p_1 + q_1)$
4	$x^2$	$-2V$	$(2a_0 + 2a_1)h^2 = -2V(2p_0 + q_0 + 2p_1 + q_1)$
5	$x^4$	$-12Vx^2$	$(2a_0 + 2a_1)h^4 = -12V(2p_0 + 2p_1)h^2$
6	$x^2 t$	$x^2 - 2Vt$	$2a_1 h^2 t = (2p_0 + 2p_1)h^2 - 2Vt(2p_0 + q_0)$

7	$x^2 t^2$	$2x^2 t - 2Vt^2$	$2a_1 h^2 t^2 = 2(2p_0)h^2 t - 2Vt^2(2p_0 + q_0)$
		нормировочное	$p_0 = -1$

Решение локальной СЛАУ:  $a_1 = c_1 = 12\nu - 2$ ,  $b_1 = -24\nu - 20$ ,  $a_0 = c_0 = 12\nu + 2$ ,  
 $b_0 = -24\nu + 20$ ,  $p_0 = p_1 = r_0 = r_1 = -\tau$ ,  $q_0 = q_1 = -10\tau$ .

На каждом шаге для решения системы (4), будем использовать явные схемы: Адамса – Бэшфорда или Эйлера, а затем применять компактную корректировку.

Явная схема АБ (второй порядок точности) состоит из двух шагов:

- Предиктор  $u_j^{n+1/2} = u_j^n + \tau \frac{u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n}{2} + \frac{\tau u_j^n (1 - u_j^n)}{2}$ .

- Корректор  $\hat{u}_j^{n+1} = u_j^n + \tau(u_{j-1}^{n+1/2} - 2u_j^{n+1/2} + u_{j+1}^{n+1/2}) + \tau u_j^{n+1/2}(1 - u_j^{n+1/2})$ .

Явная схема Эйлера (первый порядок точности) состоит из одного шага:

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \tau(u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n) + \tau u_j^n(1 - u_j^n).$$

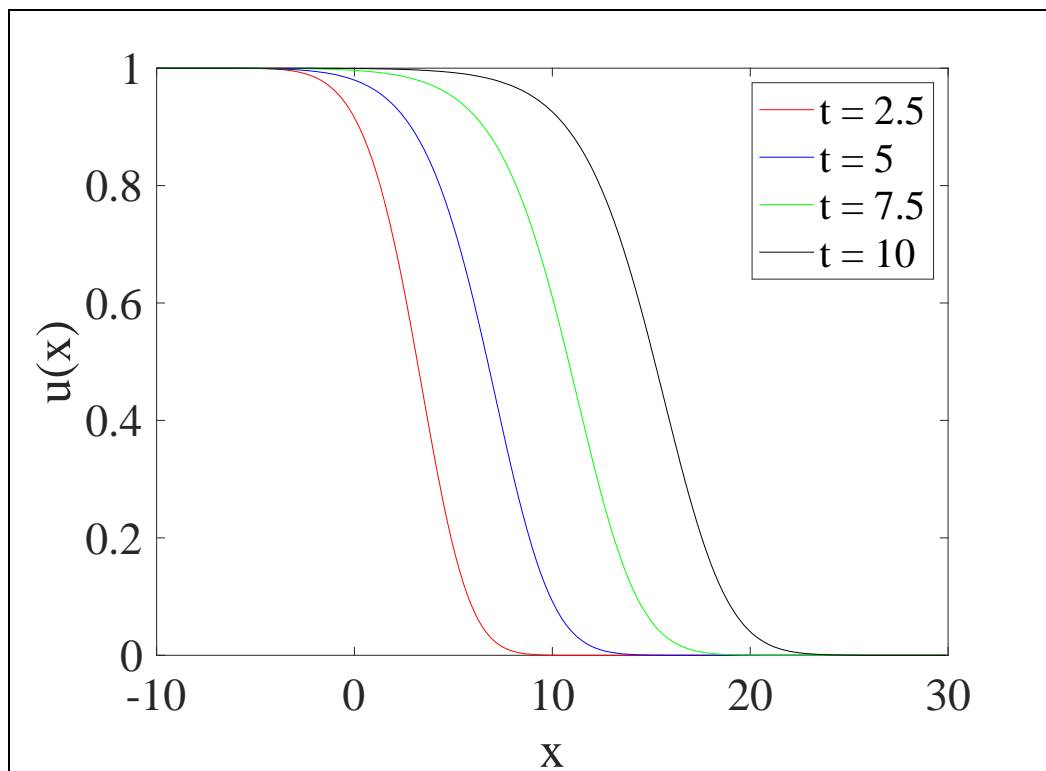
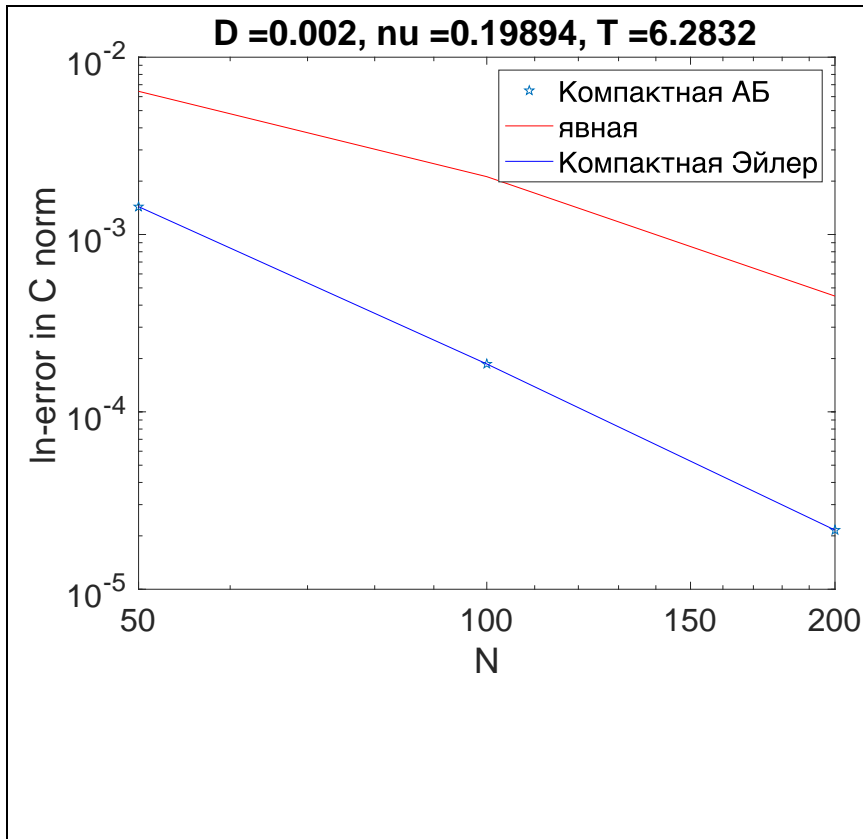


Рис. 14 График точного решения (5) уравнения ФКПП,  $D = 1$ ,  $T = 10$

$$x \in [-10, 30]$$

График ведет себя как “бегущая волна”.





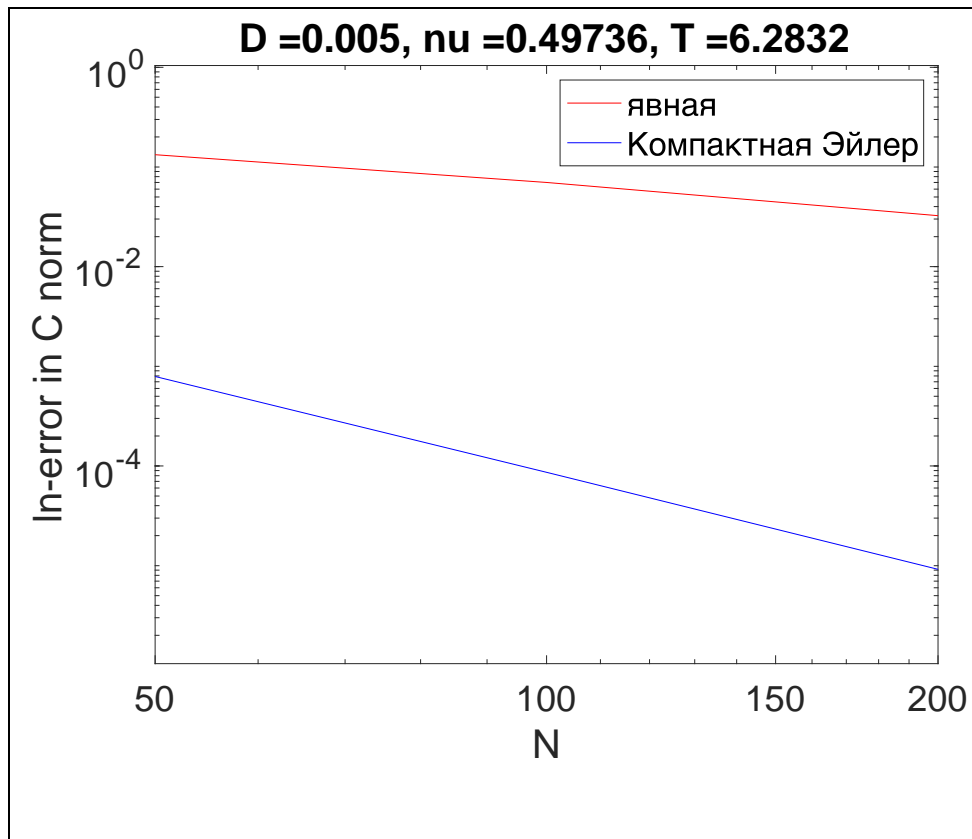
**Рис 15.** C-норма погрешности схем в зависимости от разрешения  $N$  в лог-системе до  $T = 2\pi$ . Параметры для мелкой сетки  $D = 0,004, h = \pi/(2*400), \tau = 2\pi/4096$

Начальное условие.  $u_0(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-10, 0] \\ \cos^2 x, & x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ 0, & x \in [\frac{\pi}{2}, 10] \end{cases}$

**Порядки точности:**

**1,8 (Явная АБ)/3,02(Компактная АБ)/3,02(Компактная Эйлер)**

На рис. 15 компактная схема с первым шагом по АБ/Эйлера имеет порядок **на 1,7** раза больше, чем явная схема.



**Рис 16.** C-норма погрешности схем в зависимости от разрешения  $N$  в **ln**-системе до  $T = 2\pi$ . Параметры для мелкой сетки  $D = 0,002, h = 2\pi/400, \tau = 2\pi/4096$

Начальное условие.  $u_0(x) =$

$$\begin{cases} 1, x \in [-10, 0] \\ \cos^2 x, x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ 0, x \in [\frac{\pi}{2}, 10] \end{cases}$$

**Порядки точности:**

**1,05(Явная АБ)/3,4(Компактная АБ)**

На рис. 16 компактная схема имеет порядок в 3,3 раза больший порядка явной схемы. При данном параметре Куранта явная схема имеет граничное состояние устойчивости. При  $\tau < 0.5$  явная схема устойчива, при  $\tau > 0.5$  неустойчива.

Таблица 5. Погрешность явных/компактных схем в зависимости от параметров

уравнения ФКПД для  $u_0(x) = \begin{cases} 1, x \in [-10, 0] \\ \cos x, x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ 0, x \in [\frac{\pi}{2}, 10] \end{cases}$

Схема явная/компактная	Норма	Параметры	Порядок
АБ	С	$D = 0,0002, T = 2\pi, \eta = 0,02$	1,67/1,91
АБ	С	$D = 0,005, T = 2\pi, \eta = 0,5$	1/3,4
Эйлер	С	$D = 0,002, T = 2\pi, \eta = 0,2$	1,9/3,02

Граница устойчивости компактной схемы:  $\eta < 2$  до  $T = 2\rho$ .

Граница устойчивости схемы АБ:  $\eta < 0,5 T = 2\rho$ .