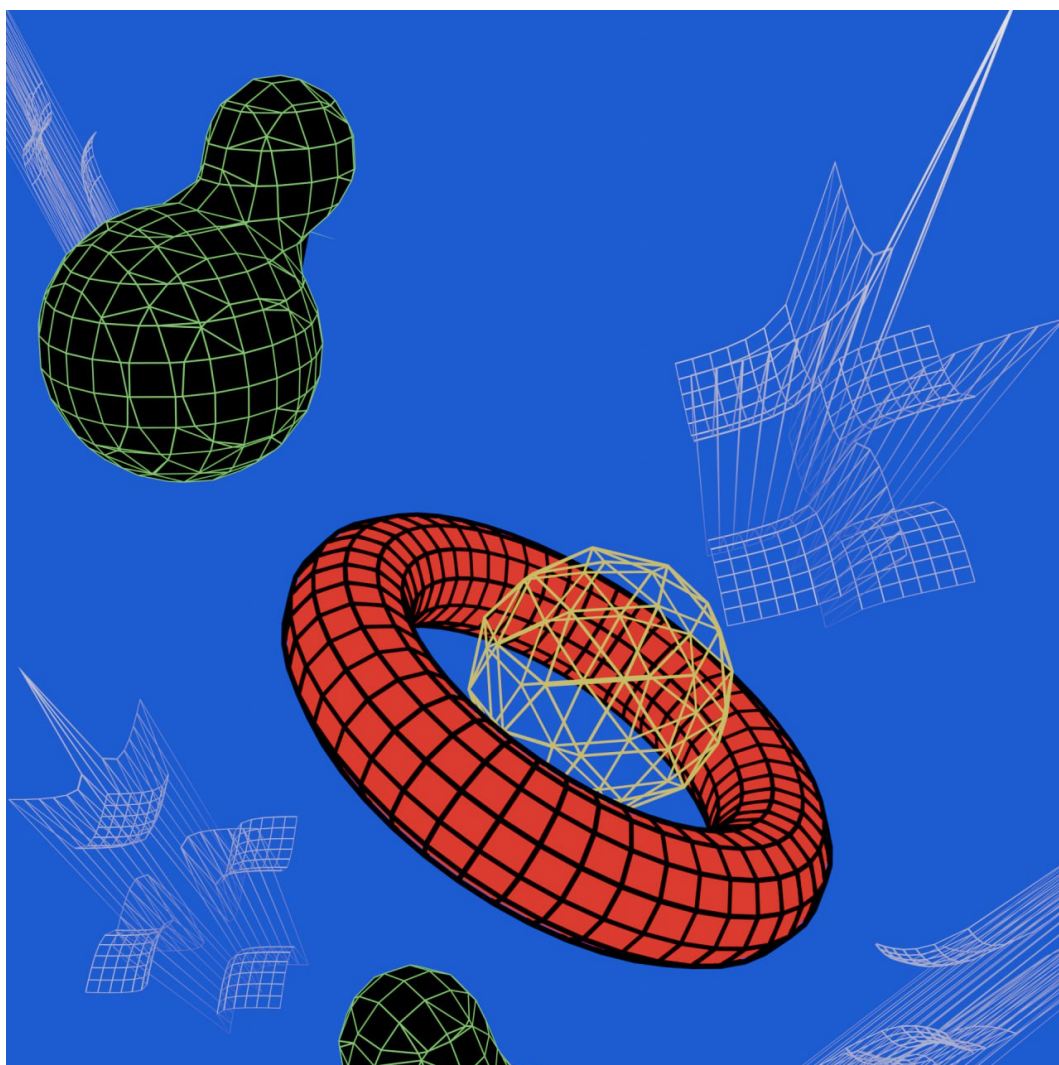


НИУ ВШЭ, Международная лаборатория  
алгебраической топологии и её приложений

# НАУЧНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ “АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ТОПОЛОГИЯ, ГИПЕРБОЛИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ И КОМПЬЮТЕРНЫЙ АНАЛИЗ ДАННЫХ”



27-29 ноября 2024, НИУ ВШЭ, Москва

## Предисловие

Научная конференция «Алгебраическая топология, гиперболическая геометрия и компьютерный анализ данных» проводится, в рамках одноименной Зеркальной Лаборатории, Международной лабораторией алгебраической топологии и её приложений ФКН НИУ ВШЭ совместно с НОМЦ Томского государственного университета.

Конференция посвящена эквивариантной и маломерной топологии, гиперболической геометрии и современным методам анализа данных. Эти направления тесно связаны с теорией групп, неевклидовой геометрией, комбинаторной и вычислительной топологией, создавая основы для решения задач как фундаментального, так и прикладного характера.

Даты проведения: 27–29 ноября 2024 г.,

Место проведения: г. Москва, Покровский бульвар, д. 11, ауд. R208.

Страница конференции:



<https://clck.ru/3Eofu4>

# Содержание

|                                                                                                                                                                                                |   |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|
| В. М. Бухштабер. Развёртки временных рядов, экстремальные задачи на многообразиях Грассмана и поперечники Колмогорова . . . . .                                                                | 3 |
| А. Ю. Веснин. Диаграммы Гаусса и инварианты планарных нотоидов . . . . .                                                                                                                       | 3 |
| А. А. Егоров. Оценки на объёмы гиперболических зацеплений и Vol-Det гипотеза                                                                                                                   | 3 |
| И. В. Дель. Разработка и применение искусственных нейронных сетей для краткосрочного прогнозирования скорости и порывов ветра на основе данных наблюдений и численного моделирования . . . . . | 4 |
| П. П. Соколов. Об инварианте виртуальных узлов . . . . .                                                                                                                                       | 4 |
| Т. Е. Панов. Экспоненциальные действия, двойственность Гейла и момент-угол-многообразия . . . . .                                                                                              | 5 |
| Т. А. Козловская. О продолжении линейных представлений . . . . .                                                                                                                               | 5 |
| О. А. Опшмарина. Полином Ямады для класса $K4$ -кривых . . . . .                                                                                                                               | 5 |
| М. Н. Зонов. Функции роста $n$ -значных групп . . . . .                                                                                                                                        | 5 |
| М. Е. Бекетов. Статистическая оценка отрицательной кривизны данных . . . . .                                                                                                                   | 6 |
| Х. Б. Вьюнг. О многочлене Александера . . . . .                                                                                                                                                | 6 |
| А. А. Айзенберг. Топология топологий, чум чумов, и машины, которые учат машины . . . . .                                                                                                       | 6 |
| Ф. Е. Вылегжанин. Коммутаторные подгруппы и подалгебры в торической топологии . . . . .                                                                                                        | 7 |
| Т. А. Рахматуллаев. Ограниченные алгебры Ли, связанные с граф-произведениями элементарных абелевых $p$ -групп . . . . .                                                                        | 7 |

## Развёртки временных рядов, экстремальные задачи на многообразиях Грассмана и поперечники Колмогорова

**В. М. Бухштабер** (МИАН им. В. А. Стеклова, МГУ им. М. В. Ломоносова, НИУ ВШЭ)

Доклад посвящен теории и приложениям многомерных разверток временных рядов. В центре внимания будут методы, основанные на теории операторов сдвига и теории функциональных уравнений.

В алгебраической топологии одним из самых известных гладких многообразий является многообразие Грассмана  $G(N, q)$  всех  $q$ -мерных подпространств в  $\mathbb{R}^N$ . Будут представлены алгоритмы решения экстремальных задач на многообразиях Грассмана.

Поперечники были введены А.Н. Колмогоровым в работе “О наилучшем приближении функций заданного функционального класса”, 1936 г. В настоящее время теория поперечников — широко известное направление в анализе функций. Мы обсудим связи теории многомерных разверток временных рядов с теорией поперечников в задачах об аппроксимации функций и восстановлении параметров семейств функций.

## Диаграммы Гаусса и инварианты планарных нотоидов

**А. Ю. Веснин** (ИМ СО РАН им. С. Л. Соболева, ТГУ)

Теория нотоидов была предложена В.Г. Тураевым в 2012 г. как естественное обобщение теории узлов. Нотоидом на двумерной поверхности называется класс эквивалентности погружений ориентированного отрезка относительно преобразований изотопии и преобразований Рейдемейстера. Нотоиды с диаграммами на плоскости называют планарными. По аналогии с узлами, нотоиду можно сопоставить диаграмму Гаусса. В докладе будет построен новый инвариант планарного нотоида, основанный на  $n$ -индексной функции для его диаграммы Гаусса. Будут приведены некоторые свойства и приложения этого инварианта.

## Оценки на объемы гиперболических зацеплений и Vol-Det гипотеза

**А. А. Егоров** (ИМ СО РАН им. С. Л. Соболева)

В приложении к работе [1] приведена верхняя оценка на объем гиперболического зацепления через число скручиваний в его диаграмме. В докладе я расскажу о новой верхней оценке на объемы гиперболических зацеплений, которая улучшает оценку из [1] в случае, если диаграмма зацепления имеет более восьми скручиваний. Кроме того, я расскажу об использовании этой оценки в доказательстве результата, связанного с так называемой гипотезой об объеме и детерминанте (Vol-Det conjecture).

- [1] M. Lackenby, The volume of hyperbolic alternating link complements. With an appendix by I. Agol and D. Thurston, Proceedings of the London Mathematical Society, 88 (2004), 204–224.

# **Разработка и применение искусственных нейронных сетей для краткосрочного прогнозирования скорости и порывов ветра на основе данных наблюдений и численного моделирования**

**И. В. Дель (ТГУ)**

Одним из самых распространенных опасных метеорологических явлений на территории России являются случаи сильного ветра. В связи с этим чрезвычайно важным является повышение точности и заблаговременности прогноза такого опасного погодного явления, зачастую приводящего к ущербу.

В настоящее время краткосрочное прогнозирование локальной погоды осуществляется с помощью численного решения гидродинамических уравнений, статистической обработки временных рядов и методов машинного обучения, в частности искусственных нейронных сетей (ИНС).

Шум во входных данных, обусловленный различными внешними факторами, часто снижает точность построенных по ним прогнозов, как следствие, влияет на качество математической модели. Для повышения достоверности краткосрочного прогнозирования скорости ветра по измеренным историческим значениям метеорологических параметров, разработан гибридный метод машинного обучения, который использует ИНС в сочетании с фильтрацией входного сигнала методом декомпозиции на вариационные моды (Variational Mode Decomposition). Предложенный метод значительно уменьшает ошибку прогнозирования временных рядов с помощью ИНС после фильтрации входящего сигнала.

Также ИНС могут использоваться для уточнения результатов численного гидродинамического прогноза. Получены результаты применения мезомасштабной метеорологической модели для прогноза порывов ветра в Томске. Разработан оригинальный метод коррекции результатов краткосрочного прогноза порывов ветра, рассчитанных на основе мезомасштабных моделей численного прогноза погоды, с помощью заблаговременных измерений и применения ИНС. Полученные результаты показывают, что предложенный способ коррекции позволяет улучшить точность численного прогноза масштаба порывов ветра.

## **Об инварианте виртуальных узлов**

**П. П. Соколов (ТГУ)**

Виртуальные узлы были введены в 1999 году Л. Кауфманом [2]. Они являются обобщением классических узлов. Известно, что фундаментальный квандл является инвариантом классических узлов.

В 2010 году в работе Т. Айто был представлен инвариант, который обобщает фундаментальный квандл классического узла [1]. В докладе обобщаются предыдущие результаты на случай виртуальных узлов и исследовал некоторые построенных объектов.

[1] A FUNCTOR-VALUED EXTENSION OF KNOT QUANDLES // T.Ito

[2] Virtual knot theory // L.Kauffman

## Экспоненциальные действия, двойственность Гейла и момент-угол-многообразия

Т. Е. Панов (МГУ, НИУ ВШЭ)

Экспоненциальные действия, задаваемые конфигурациями векторов, обеспечивают универсальную основу для многих важных конструкций голоморфной динамики, некэлеровой комплексной геометрии, торической геометрии и топологии. К ним относятся пространства листов голоморфных слоений, пересечения вещественных и эрмитовых квадрик, фактор-конструкция торических многообразий, LVM- и LVMB-многообразия, комплексно-аналитические структуры на момент-угол-многообразиях и их частичных факторах. Во всех этих случаях геометрия и топология соответствующего фактормногообразия может быть описана комбинаторными данными, включающими пару двойственных по Гейлу векторных конфигураций.

## О продолжении линейных представлений

Т. А. Козловская (ТГУ)

Одна из основных проблем теории линейных групп — продолжение известных линейных представлений на расширение групп.

В докладе будет рассмотрена эта проблема для группы кос и для группы сингулярных кос.

## Полином Ямады для класса $K_4$ -кривых

О. А. Ошмарина (НГУ)

Изучение действия группы Клейна на трехмерных орбифолдах с сингулярностями вдоль строго обратимых узлов и зацеплений приводит к необходимости исследования инвариантов пространственных графов.

В докладе будет рассмотрено семейство  $K_4$ -кривых, то есть вложений полного графа на 4 вершинах, соответствующее случаю двухмостовых узлов рода один. Для этого семейства графов будут получены формулы их полиномов Ямады.

## Функции роста $n$ -значных групп

М. Н. Зонов (ТГУ)

В работе рассмотрены введенные В. М. Бухштабером  $n$ -значные группы и порождаемые циклическими  $n$ -значными группами  $n$ -значные динамики.

Определены функции роста  $n$ -значных групп и установлены элементарные факты циклической теории групп (в том числе инвариантность степени роста относительно замены порождающего множества). Установлена связь между функцией роста группы и функцией роста  $n$ -значной динамики элемента косетной группы. Установлены ограничения сверху на функции роста циклических 2-значных инволютивных групп.

## Статистическая оценка отрицательной кривизны данных

М. Е. Бекетов (НИУ ВШЭ)

Пусть дан конечный набор точек из метрического пространства и матрица попарных расстояний  $d_{ij}$  между ними. Если дополнительно предположить, что это пространство было на самом деле римановым многообразием постоянной отрицательной секционной кривизны  $\kappa$  и известной размерности — можно ли оценить значение  $\kappa$  из имеющейся информации  $(d_{ij})$ ? Будет рассказано о некоторых результатах в данной задаче, а также вкратце о мотивирующих приложениях — в контексте популярности гиперболических вложений в современном машинном обучении.

## О многочлене Александера

Х. Б. Вьонг (ТГУ)

В докладе будет предложен краткий обзор о многочлене Александера и об условии Фокса-Милнора для срезанности узлов в гомологической сфере Пуанкаре.

## Топология топологий, чум чумов, и машины, которые учат машины

А. А. Айзенберг (НИУ ВШЭ)

(По совместной работе с М.Бекетовым и Г.Магаем)

Задача автоматического машинного обучения (метаобучение, AutoML) состоит в автоматическом подборе формы нейросети, которая максимально эффективно — в некотором смысле — обработает обучающую выборку. То есть это задача поиска на пространстве всех нейросетей. Можно задаться вопросом: а каково оно, пространство всех нейросетей? Мы рассматриваем идеализированную задачу: какова топология пространства  $\text{Digraph}(V)$  всех ориентированных графов на фиксированном конечном множестве  $V$  вершин?

Есть связанный с этим вопрос. Рассмотрим фиксированное конечное множество  $V$  и рассмотрим частично упорядоченное множество (чум)  $\text{Top}(V)$  всех топологий на  $V$ , упорядоченное по силе топологии. Какова топология геометрической реализации чума  $\text{Top}(V)$ ?

Ответы на эти вопросы известны, хотя и разбросаны по литературе. Пространство  $\text{Digraph}(V)$  гомотопно  $(d-2)$ -мерной сфере, а  $\text{Top}(V)$  гомотопно букету  $(2d-4)$ -мерных сфер в числе  $(d-1)!$  штук, где  $d = |V|$ . Мы заметили, что оба пространства можно воспринимать как нервы покрытия сферы полусферами, с центрами в системе корней типа  $A_d$ , — открытыми в первом случае и замкнутыми во втором. Мы доказали похожий результат о более общих покрытиях сферы полусферами.

Полезно ли это для машинного обучения — пока не очень ясно, но мы продолжаем думать. Доклад по препринту <https://arxiv.org/abs/2310.02827>.

## Коммутаторные подгруппы и подалгебры в торической топологии

Ф. Е. Вылегжанин (МИАН им. В. А. Стеклова, НИУ ВШЭ)

Многие понятия и результаты торической топологии имеют “вещественную и комплексную версию”: схожим образом устроены кольца когомологий момент-угол-комплекс  $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \simeq (\mathbb{C}, \mathbb{C}^\times)^{\mathcal{K}}$  и их вещественных аналогов  $\mathcal{R}_{\mathcal{K}} \simeq (\mathbb{R}, \mathbb{R}^\times)^{\mathcal{K}}$ , квазиторических многообразий  $(S^1)^n \curvearrowright M^{2n}$  и малых накрытий  $\mathbb{Z}_2^n \curvearrowright N^n$ . Продолжая эту плохо объясненную аналогию, мы обсудим способы задать образующими и соотношениями

- фундаментальные группы  $\pi_1(\mathcal{R}_{\mathcal{K}})$  вещественных момент-угол-комплекс (другими словами, коммутанты прямоугольных групп Коксетера)

и

- алгебры Понтрягина  $H_*(\Omega \mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; \mathbb{Z})$  момент-угол-комплекс (“коммутаторные подалгебры” некоторых частично коммутативных алгебр)

в случае, когда  $\mathcal{K}$  — флаговый симплициальный комплекс. Эти результаты обобщаются на полиэдральные произведения вида  $(EG, \underline{G})^{\mathcal{K}}$ , где в первом случае топологические группы  $G_i$  дискретны, а во втором — связны.

## Ограниченные алгебры Ли, связанные с граф-произведениями элементарных абелевых $p$ -групп

Т. А. Рахматуллаев (МГУ им. М. В. Ломоносова, НИУ ВШЭ)

Для симплициального комплекса  $\mathcal{K}$  на множестве вершин  $[m]$  и последовательности групп  $\underline{G} = (G_i, i \in [m])$  определено граф-произведение  $\underline{G}^{\mathcal{K}}$  — теоретико-групповой аналог полиэдральных произведений. В общем случае полиэдральное произведение можно определить в любой симметрической моноидальной категории с конечными копределами. В отличие от полиэдрального произведения в категории топологических пространств, граф-произведение в категории групп зависит только от 1-остова симплициального комплекса. В докладе будет описан функтор из категории групп в категорию  $p$ -ограниченных алгебр Ли, сохраняющий граф-произведения элементарных абелевых  $p$ -групп.