О некоторых статистических свойствах рядов Фарея

М.А. Королёв*

*Математический институт им. В.А. Стеклова (МИАН)
Факультет компьютерных наук НИУ ВШЭ, базовая кафедра МИАН

Современные проблемы теории чисел

Москва
Факультет компьютерных наук НИУ ВШЭ
4 апреля 2025 года

$$\textbf{Ряд Фарея}: \quad \Phi(Q) = \left\{ \frac{a}{b} : 0 \leqslant a \leqslant b \leqslant Q, (a,b) = 1 \right\}$$

Индуктивное построение:

$$\Phi(1) = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{1} \right\}$$

Пусть ряд $\Phi(Q-1)$ уже построен, и $\dfrac{c}{d} < \dfrac{a}{b}$ - произвольная пара соседних дробей в $\Phi(Q-1)$.

$$\textbf{Медианта:} \quad \frac{c+a}{d+b}$$

Для неё всегда имеем

$$\frac{c}{d} < \frac{c+a}{d+b} < \frac{a}{b}.$$

Если $d+b \leqslant Q$, то медианта включается в ряд $\Phi(Q)$. В противном случае дроби $\dfrac{c}{d} < \dfrac{a}{b}$ остаются соседними и в $\Phi(Q)$.

Следствие: если $\dfrac{c}{d} < \dfrac{a}{b}$ - соседи в $\Phi(Q)$, то всегда

$$b + d > Q$$

Примеры

$$\Phi(2) = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{2} = \frac{0+1}{1+1}, \frac{1}{1}\right\}$$

$$\Phi(3) = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}\right\}$$

$$\Phi(4) = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}\right\}$$

$$\Phi(5) = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1}\right\}$$

$$\Phi(6) = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{1}{1}\right\}$$

$$\Phi(7) = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{1}{1}\right\}$$

Модулярное свойство

Пусть $\dfrac{c}{d} < \dfrac{a}{b}$ – пара соседних дробей в ряде Фарея $\Phi(Q)$.
Тогда справедливо равенство (**модулярное свойство**):

$$ad - bc = 1.$$

Например:

$$\frac{4}{7} < \frac{3}{5} \quad \Rightarrow \quad 3 \cdot 7 - 4 \cdot 5 = 1 \quad (Q = 7)$$

$$\frac{9}{29} < \frac{5}{16} \quad \Rightarrow \quad 5 \cdot 29 - 9 \cdot 16 = 1 \quad (Q = 31)$$

$$\frac{29}{882} < \frac{17}{517} \quad \Rightarrow \quad 17 \cdot 882 - 29 \cdot 517 = 1 \quad (Q = 1000)$$

(достаточно проверить для ряда $\Phi(1)$ и убедиться, что если свойство выполнялось для пары $\dfrac{c}{d} < \dfrac{a}{b}$, то оно сохранится и при замене соответствующей дроби медиантой).

Число дробей в ряде Фарея, которые имеют один и тот же знаменатель q равно количеству чисел a ряда $1, 2, 3, \ldots, q-1, q$, взаимно-простых с q.

Это число обозначается $\varphi(q)$.

Функция $\varphi(q)$ называется **функцией Эйлера**.

Соответственно, ряд $\Phi(Q)$ содержит

$$N = N(Q) = |\Phi(Q)| = 1 + \varphi(1) + \varphi(2) + \varphi(3) + \ldots + \varphi(Q) \quad \text{дробей}$$

$$N(Q) = c \cdot Q^2 + O(Q \ln Q),$$

$$c = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\right)^{-1} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) = \frac{3}{\pi^2}.$$

Тройки соседних знаменателей

Рассмотрим несколько подряд идущих дробей ряда $\mathbf{\Phi(9)}$, например:

$$\cdots < \frac{2}{9} < \frac{1}{4} < \frac{2}{7} < \frac{1}{3} < \frac{3}{8} < \frac{2}{5} < \frac{3}{7} < \frac{4}{9} < \frac{1}{2} < \frac{5}{9} < \cdots$$

и тройки соседних знаменателей:

(q_0, q_1, q_2)	$q_0 + q_2$	q_1	k
(9,4,7)	9+7=16	4	4
(4,7,3)	4+3=7	7	1
(7,3,8)	7+8=15	3	5
(3,8,5)	3+5=8	8	1
(8,5,7)	8+7=15	5	3
(5,7,9)	5+9=14	7	2
(7,9,2)	7+2=9	9	1
(9,2,9)	9+9=18	2	9

Число $k = \dfrac{q_0 + q_2}{q_1}$ - всегда целое

Оно называется **индексом** дроби Фарея a_1/q_1: $k_Q(a_1/q_1) = k$.

Индексы

Индекс дроби можно вычислять и по формуле:

$$k = \left[\frac{q_0 + Q}{q_1}\right].$$

Перепишем равенство для индекса k в виде

$$k = \left[\frac{1 + q_0/Q}{q_1/Q}\right].$$

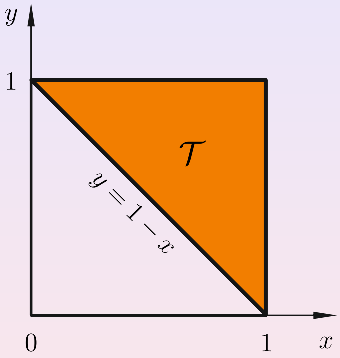
Так как

$$0 < q_0, q_1 \leqslant Q, \quad q_0 + q_1 > Q,$$

то числа $x = \dfrac{q_0}{Q}$, $y = \dfrac{q_1}{Q}$ удовлетворяют неравенствам:

$$0 < x \leqslant 1, \quad 0 < y \leqslant 1, \quad x + y = \frac{q_0 + q_1}{Q} > 1.$$

Точка $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \left(\dfrac{\boldsymbol{q_0}}{\boldsymbol{Q}}, \dfrac{\boldsymbol{q_1}}{\boldsymbol{Q}}\right)$ лежит в «**треугольнике Фарея**» $\boldsymbol{\mathcal{T}}$ – области вида



При этом:

$$\boldsymbol{q_2 = kq_1 - q_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{q_2}{Q} = k \cdot \frac{q_1}{Q} - \frac{q_0}{Q} = ky - x = \left[\frac{1+x}{y}\right]y - x}$$

Преобразование Фарея

Идея (F. Boca, C. Cobeli, A. Zaharescu): определить для произвольной точки $(x, y) \in \mathcal{T}$ **преобразование Фарея (BCZ-преобразование)** $T = T(x, y)$ следующим образом:

$$T(x, y) = (y, ky - x), \quad k = \left[\frac{1+x}{y}\right].$$

Тогда

$$T\left(\frac{q_0}{Q}, \frac{q_1}{Q}\right) = \left(\frac{q_1}{Q}, \frac{q_2}{Q}\right).$$

Иначе говоря, преобразование T позволяет сдвигаться вправо вдоль последовательности знаменателей:

$$T^2\left(\frac{q_0}{Q}, \frac{q_1}{Q}\right) = \left(\frac{q_2}{Q}, \frac{q_3}{Q}\right), \quad T^3\left(\frac{q_0}{Q}, \frac{q_1}{Q}\right) = \left(\frac{q_3}{Q}, \frac{q_4}{Q}\right), \ldots$$

Преобразование Фарея

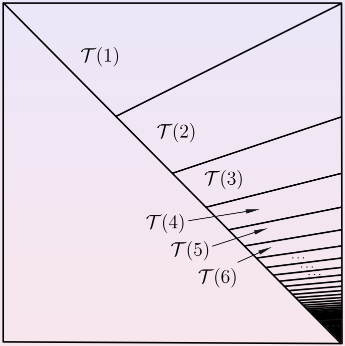
Свойства преобразования Фарея:

$$T : \mathcal{T} \to \mathcal{T} \text{ **биективно**;}$$

T **не является непрерывным**;

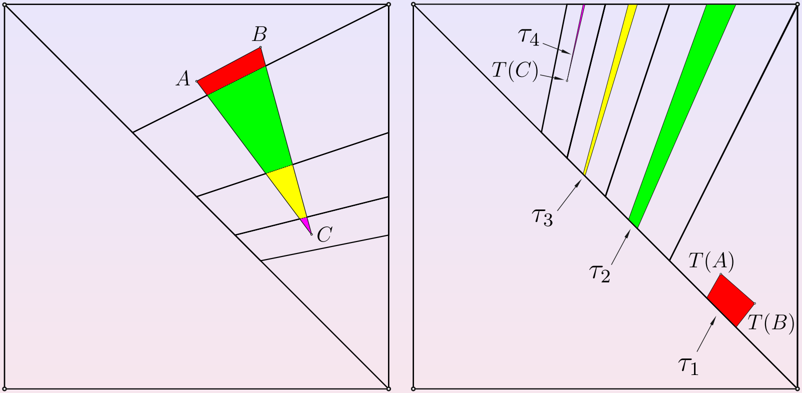
T **сохраняет площади**.

Сохранение площади: определим область $\mathcal{T}(k) \subset \mathcal{T}$ условием: $\left[\dfrac{1+x}{y}\right] = k.$



Области $\mathcal{T}(k)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$.

Внутри $\mathcal{T}(k)$ будем иметь: $\dfrac{\partial T(x,y)}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & k \end{pmatrix}, \quad \det \dfrac{\partial T(x,y)}{\partial(x,y)} = 1.$



Области $\boldsymbol{\mathcal{T}(k)}$, $\boldsymbol{k = 1, 2, 3, \ldots}$.

Треугольник с вершинами $\left(\frac{1}{2}, \frac{4}{5}\right)$, $\left(\frac{2}{3}, \frac{8}{9}\right)$, $\left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}\right)$
и его образ при преобразовании Фарея.

(1) A. Haynes (2000): Пусть $k \geqslant 1$ - фиксированное число, $N_k(Q)$ - число дробей ряда $\Phi(Q)$, индекс которых равен k. Найти асимптотику доли

$$\frac{N_k(Q)}{N(Q)} \quad \text{при} \quad Q \to +\infty.$$

(2) Пусть γ_n, $1 \leqslant n \leqslant N(Q)$ - дроби ряда $\Phi(Q)$. Найти асимптотику суммы квадратов расстояний:

$$\sum_{n=1}^{N} (\gamma_{n+h} - \gamma_n)^2$$

$h = 1$ - S. Kanemitsu, S.R.C. Rao, S.R. Sarma (1982); $h = 2$ - R. Hall (1994); $h \geqslant 3$ - любое – F. Boca, C. Cobeli, A. Zaharescu (2001).

(3) F. Boca, C. Cobeli, R. Gologan (2002): Найти асимптотику сумм произведений индексов с ограничениями:

$$\sum_{\substack{\gamma_n \in \Phi(Q) \\ \gamma_n \leqslant t}} k_Q(\gamma_n) k_Q(\gamma_{n+h}), \quad \text{где} \quad 0 < t \leqslant 1.$$

Пусть $\gamma_0 = \dfrac{a_0}{q_0} < \gamma_1 = \dfrac{a_1}{q_1} < \gamma_2 = \dfrac{a_2}{q_2}$ - соседние дроби ряда $\Phi(Q)$.

Тогда индекс можно вычислять и по формуле:

$$k_Q(\gamma_1) = a_2 q_0 - a_0 q_2.$$

Если для $\gamma = \dfrac{a}{q}$ и $\gamma' = \dfrac{a'}{q'}$ с условием $\gamma' < \gamma$ положить

$$\Delta(\gamma', \gamma) = aq' - a'q, \quad \text{то тогда}$$

$\Delta(\gamma_0, \gamma_1) = 1$ (модулярное соотношение), $\Delta(\gamma_0, \gamma_2) = k_Q(\gamma_1)$ (индекс).

Обобщение: величины

$$\Delta(\gamma_n, \gamma_{n+h}), \quad h = 3, 4, \ldots.$$

Примеры задач

Пусть $\mathcal{A}$ - некоторое арифметическое условие, и $\Phi(Q;\mathcal{A})$ - упорядоченные по возрастанию дроби из $\Phi(Q)$, знаменатели q которых удовлетворяют $\mathcal{A}$.

Для такого «прореженного» ряда Фарея ставится вопрос о числе тех пар соседних дробей $\gamma' < \gamma$, которые удовлетворяют условию $\Delta(\gamma', \gamma) = k$.

(4) A. Haynes (2003); F. Boca, C. Cobeli, A. Zaharescu (2003):

$$\mathcal{A}: \quad q \equiv 1 \pmod 2$$

(5) A. Haynes (2004):

$$\mathcal{A}: \quad \text{Н.О.Д.}(q, D) = 1, \quad D = p \quad \text{- простое.}$$

(6) Д. Бадягин, A. Haynes (2009):

$$\mathcal{A}: \quad \text{Н.О.Д.}(q, D) = 1, \quad D \quad \text{- любое.}$$

Метод F. Boca, C. Cobeli, A. Zaharescu сводит подсчёт числа нужных дробей к подсчёту числа примитивных точек в некоторых плоских подобластях треугольника Фарея.

Поэтому в большинстве задач ответ (асимптотика для доли искомых дробей в общем числе дробей), который даёт этот метод, представляет собой сумму (как конечную, так и бесконечную) площадей областей вида

$$\begin{aligned}&\mathcal{T}(\vec{k}) = \mathcal{T}(k_1,\ldots,k_r) = \\ &\quad = \mathcal{T}(k_1)\bigcap T^{-1}(\mathcal{T}(k_2))\bigcap T^{-2}(\mathcal{T}(k_3))\bigcap\ldots\bigcap T^{-(r-1)}(\mathcal{T}(k_r)) \,.\end{aligned}$$

Каждая из этих областей задаётся системой линейных неравенств и потому является либо пустым множеством, либо выпуклым многоугольником.

Пусть условие $\mathcal{A}$ имеет вид: $q \equiv 0 \pmod 3$. Между любыми соседними дробями γ', γ из $\Phi(Q;\mathcal{A})$ имеется некоторое число дробей из исходного ряда $\Phi(Q)$.

Пример: в $\Phi(31)$ имеется промежуток длины 10, не содержащий дробей Фарея со знаменателями, кратными 3:

$$\frac{8}{27} < \frac{3}{10} < \frac{7}{23} < \frac{4}{13} < \frac{9}{29} < \frac{5}{16} < \frac{6}{19} < \frac{7}{22} < \frac{8}{25} < \frac{9}{28} < \frac{10}{31} < \frac{1}{3}.$$

Пусть $\nu(Q;r)$ - доля таких пар, между которыми имеется ровно r дробей, в общем числе дробей из $\Phi(Q;\mathcal{A})$.

Теорема. *Пусть* $Q \to +\infty$ *и* $1 \leqslant r \ll (Q/\ln Q)^{1/3}$. *Тогда*

$$\nu(Q;r) = \nu(r) + O\left(\frac{\ln Q}{Q}\right), \quad \text{где}$$

$$\nu(1) = 6 - 2\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} + \ln 3\right), \quad \nu(2) = 4\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} - \ln 3\right) - \frac{87}{35}$$

$$\nu(3) = 12\ln 3 - \frac{53\,132}{4095}, \quad \nu(4) = \frac{528\,904}{45\,045} - 4\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} + \ln 3\right),$$

$$\nu(5) = 2\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} - \ln 3\right) - \frac{4\,164\,383}{3\,063\,060}, \quad \nu(6) = \frac{3\,089}{85\,085},$$

$$\nu(7) = \frac{54\,097}{3\,879\,876}.$$

Теорема (продолжение). Если

$$r \geqslant 8, \quad r = 5m + i, \quad \text{где} \quad 0 \leqslant i \leqslant 4,$$

то $\nu(r)$ представляется в виде суммы двух или трёх рациональных дробей, зависящих от m. Например, при $i = 1$ соответствующее выражение имеет вид:

$$\nu(5m+1) = \frac{6(8m-1)}{(3m-1)(6m-1)(12m-1)(12m+1)} + \frac{2}{(6m-1)(6m+1)(12m-1)}.$$

Аналогичные результаты получены и в случаях, когда условие $\mathcal{A}$ имеет вид

$$q \equiv 1 \pmod 3 \quad \text{и} \quad q \equiv 2 \pmod 3,$$

а также в случае

$$q \equiv 1 \pmod 2$$

впервые рассмотреном C. Cobeli, M. Vâjâitu, A. Zaharescu (2012; $r \leqslant 3$).

Пусть условие $\mathcal{A}$ имеет вид: $q \not\equiv 0 \pmod{3}$, и пусть $\nu(k) = \nu(k;\mathcal{A})$ - предельная доля соседних дробей γ', γ ряда $\Phi(Q;\mathcal{A})$ таких, что $\Delta(\gamma',\gamma) = k$.

A. Haynes (2004) показал, что

$$\nu(k) = \begin{cases} \dfrac{7}{9}, & \textit{если} \quad k = 1, \\ \dfrac{8}{3k(k+1)(k+2)}, & \textit{если} \quad k \geqslant 2. \end{cases}$$

Были получены аналоги этого результата:

Теорема. Пусть условие $\mathcal{A}$ имеет вид: $q \equiv 0 \pmod 3$, и пусть $\nu(3k) = \nu(3k; \mathcal{A})$ - предельная доля соседних дробей γ', γ ряда $\Phi(Q; \mathcal{A})$ таких, что $\Delta(\gamma', \gamma) = 3k$. Тогда справедливы равенства:

$$\nu(3k) = \begin{cases} \dfrac{7}{9}, & \textit{если} \quad k = 1, \\ \dfrac{8}{3k(k+1)(k+2)}, & \textit{если} \quad k \geqslant 2. \end{cases}$$

Теорема Пусть условие $\mathcal{A}$ имеет вид: $q \equiv 1 \pmod 3$. Тогда справедливы равенства:

$$\nu(1) = \frac{1}{2}, \qquad \nu(3) = \frac{11}{65}$$
$$\nu(4) = \frac{1}{15}, \qquad \nu(5) = \frac{94}{1\,365},$$
$$\nu(7) = \frac{916}{15\,015}, \qquad \nu(8) = \frac{3}{182},$$
$$\nu(9) = \frac{566}{15\,015}, \qquad \nu(10) = \frac{3}{260},$$
$$\nu(11) = \frac{8}{715}, \qquad \nu(13) = \frac{18\,199}{881\,790}.$$

Последовательность долей немонотонна:

$$\nu(5) > \nu(4), \quad \nu(9) > \nu(8), \quad \nu(13) > \nu(11)$$

Теорема (продолжение). Для оставшихся k справедливы равенства:

$$\nu(k) = \begin{cases} 0, \quad k \equiv 0, 2 \pmod 6, \quad k \neq 8, \\ \dfrac{24}{k(k+3)(k+6)} + \dfrac{24}{k(k+2)(k+4)}, \quad \textit{если} \quad k \equiv 1 \pmod 6, \\ \dfrac{24}{k(k+2)(k+4)}, \quad \textit{если} \quad k \equiv 3, 5 \pmod 6, \\ \dfrac{24}{k(k+3)(k+6)}, \quad \textit{если} \quad k \equiv 4 \pmod 6. \end{cases}$$

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!