

О задачах, связанных с распределением значений логарифма дзета-функции в окрестности критической прямой

Ирина Резвякова

МИАН, Москва

Современные проблемы теории чисел

4 апреля 2025

ВШЭ

Определение

Дзета-функция Римана

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}, \quad \operatorname{Re} s > 1.$$

При $\operatorname{Re} s > 1$

$$\zeta^{-1}(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}, \quad \mu(n) = \begin{cases} 1, & n = 1, \\ 0, & p^2 | n, \\ (-1)^t, & n = p_1 \cdot \dots \cdot p_t. \end{cases}$$

Дзета-функция Римана

Отсюда найдем при $\operatorname{Re} s = \sigma > 1$

$$|\zeta^{-1}(s)| < \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\sigma} < 1 + \int_1^{+\infty} \frac{du}{u^\sigma} = \frac{\sigma}{\sigma - 1},$$

$$|\zeta(s)| > \frac{\sigma - 1}{\sigma} \neq 0 \text{ при } \sigma > 1.$$

Дзета-функция Римана

Дзета-функция Римана мероморфно продолжается на всю комплексную плоскость и удовлетворяет следующему *функциональному уравнению*:

$$\begin{aligned}\xi(s) &:= s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) \\ &= 1 + s(s-1) \int_1^{+\infty} \left(x^{\frac{s}{2}-1} + x^{-\frac{s+1}{2}} \right) \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\pi x n^2} dx = \xi(1-s).\end{aligned}$$

Дзета-функция Римана имеет полюс первого порядка в $s = 1$.

У $\zeta(s)$ есть *тривиальные нули* в $s = -2, -4, \dots$

Нетривиальные нули дзета-функции Римана — это нули функции $\xi(s)$.

Нули дзета-функция Римана

Нетривиальные нули лежат в *критической полосе* $0 \leq \operatorname{Re} s \leq 1$ и симметричны относительно вещественной оси и прямой $\operatorname{Re} s = 1/2$.

Все вычисленные нетривиальные нули дзета-функции Римана лежат на критической прямой. Занумеруем эти нули в полуплоскости $\operatorname{Im} s \geq 0$ в порядке неубывания их мнимых частей (нули с одинаковыми мнимыми частями расположим в порядке неубывания их вещественных частей).
Найденные нули

$$\rho_n = 1/2 + i\gamma_n, \quad \gamma_1 = 14,134..., \gamma_2 = 21,022..., \gamma_3 = 25,0108....$$

Более 10^9 первых нулей кси-функции Римана лежат на критической прямой $\operatorname{Re} s = 1/2$.

Также более 10^4 нулей, начиная с номера 10^{22} тоже лежат на критической прямой.

Гипотеза Римана

Гипотеза Римана утверждает, что все нетривиальные нули $\zeta(s)$ лежат на *критической прямой* $\operatorname{Re} s = 1/2$.

(1896, C.J. Valle-Poissin) Дзета-функция Римана $\zeta(\sigma + it)$ не имеет нулей в области

$$\sigma \geq 1 - O((\ln(|t| + 2))^{-1}).$$

Аналоги и следствия гипотезы Римана

Если $\sum_{n \leq x} \mu(n) = O(x^\alpha)$, то $\zeta(\sigma + it)$ не имеет нулей в области $\sigma > \alpha$.

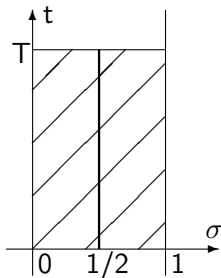
Если

$$\pi(x) := \sum_{p \leq x} 1 = \int_2^x \frac{dt}{\ln t} + R(x),$$

то гипотеза Римана эквивалентна утверждению, что $R(x) = O(x^{1/2+\varepsilon})$.

Пусть дана n -ая последовательность дробей Фарея $F_n = \{F_n(j)\}$ из $m = m(n)$ чисел. Тогда RH эквивалентна

$$\sum_{j=1}^m |F_n(j) - j/m| = O(n^{1/2+\varepsilon}).$$

Нули $\zeta(s)$ на критической прямой

$$N(T) = \sum_{\substack{\rho=\sigma+it, \zeta(\rho)=0 \\ 0 < t \leq T}} 1 \sim \frac{T}{2\pi} \ln T.$$

$$N_0(T) = \sum_{\substack{\rho=\frac{1}{2}+it, \zeta(\rho)=0 \\ 0 < t \leq T}} 1,$$

G. Hardy, J. Littlewood (1921):

$$N_0(T) \gg T.$$

A. Selberg (1942):

положительная доля нетривиальных нулей $\zeta(s)$ лежит на критической прямой $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$.

Нули $\zeta(s)$ на критической прямой

N. Levinson (1974):

Более 34.74% нетривиальных нулей $\zeta(s)$ лежат на критической прямой.

J.B. Conrey (1989):

Более 40.77% нетривиальных нулей $\zeta(s)$ лежат на критической прямой.

H.Bui, J.B.Conrey and M.Young (2010):

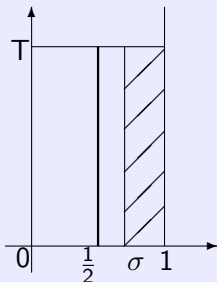
Более 41.05% нетривиальных нулей $\zeta(s)$ лежат на критической прямой.

K. Pratt, N. Robles, A. Zaharescu, D. Zeindler (2018):

Более 41.72% нетривиальных нулей $\zeta(s)$ лежат на критической прямой.

Плотностная теорема Сельберга

А. Selberg (1946):



Пусть $N(\sigma, T)$ — количество нулей $\zeta(s)$ в области $\operatorname{Re} s \geq \sigma$, где $1/2 \leq \sigma \leq 1$. Тогда найдется число $a > 0$ такое, что справедлива оценка:

$$N(\sigma, T) \ll T^{1-a(\sigma-\frac{1}{2})} \ln T.$$

Следствие:

почти все нетривиальные нули $\zeta(\sigma + it)$ лежат в области

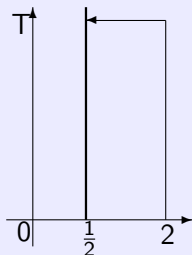
$$|\sigma - 1/2| \leq \frac{\Phi(t)}{\ln(|t|+2)}, \text{ где } \Phi(t) \rightarrow +\infty \text{ при } |t| \rightarrow +\infty$$

Использование “успокаивающего множителя”.

Доказательства теоремы о положительной доли и плотностной теоремы сводится к вычислению интеграла

$$\int_T^{2T} \left| \zeta \left(\frac{1}{2} + it \right) \eta \left(\frac{1}{2} + it \right) \right|^2 dt,$$

и $\eta(\cdot)$ называется “успокаивающим множителем”. В качестве $\eta(s)$ берем неотрицательный полином Дирихле, приближающий $\zeta^{-1}(s)$.

Определение $\log \zeta(1/2 + iT)$ 

При $s > 1$ считаем значение $\log \zeta(s)$ вещественным. Если при $\text{Im } s = T$ нет нулей $\zeta(s)$, то $\log \zeta(1/2 + iT)$ определим непрерывно продолжая значение $\log \zeta(2)$ вдоль сторон прямоугольника, с вершинами $2, 2 + iT, 1/2 + iT$. Иначе определим

$$\log \zeta(1/2 + iT) = \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\log \zeta(1/2 + i(T + \varepsilon)) + \log \zeta(1/2 + i(T - \varepsilon))).$$

Распределение значений $\log \zeta(1/2 + it)$

Пусть $\chi_{a,b}$ — характеристическая функция интервала (a, b) . Тогда

$$\int_T^{2T} \chi_{a,b} \left(\frac{\ln |\zeta(1/2 + it)|}{\sqrt{\pi \ln \ln T}} \right) dt = T \int_a^b e^{-\pi u^2} du + o(T).$$

A. Ghosh (1983):

остаток можно оценить как $O(T(\ln \ln \ln T)^{-1/2})$.

K.-M. Tsang (1984):

остаток можно оценить как $O\left(T \frac{(\ln \ln \ln T)^2}{\sqrt{\ln \ln T}}\right)$.

Идея доказательства

А. Сельберг смог показать, точно ли приближение

$$\ln \zeta(1/2 + it) = \sum_{p \leq y} \frac{1}{p^{1/2+it}} + r_y(t)?$$

Оказалось, что

$$\int_T^{2T} |r_y(t)|^{2k} dt \ll_k T(Ak)^k, \quad \int_T^{2T} \left| \operatorname{Re} \sum_{p \leq y} \frac{1}{p^{1/2+it}} \right|^{2k} dt \asymp_k T(\ln \ln y)^k$$

при $\log y \asymp \frac{1}{k} \log T$. Именно здесь используется плотностная теорема Сельберга.

Распределение значений L-функции на критической прямой

Для доказательства результата о распределении значений L-функции на критической прямой можно воспользоваться методом характеристических функций и неравенством Эссеена:

$$\sup_x |G_1(x) - G_2(x)| \ll \int_T^{2T} \left| \frac{g_1(t) - g_2(t)}{t} \right| dt + \sup_x |G_2'|,$$

а для характеристической функции

$$g(t) = \frac{1}{T} \int_T^{2T} e^{it\omega_T(x)} dx, \text{ где } \omega_T(x) = \frac{\ln \zeta(1/2 + it)}{\sqrt{\ln \ln T}},$$

разложением

$$e^{ix} = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{(ix)^j}{j!} + O\left(\frac{|x|^N}{N!}\right).$$

Распределение значений $\log \zeta(\sigma + it)$

Пусть $\chi_{a,b}$ — характеристическая функция интервала (a, b) . Тогда при $1/2 \leq \sigma \leq 1$

$$\int_T^{2T} \chi_{a,b} \left(\frac{\ln |\zeta(\sigma + it)|}{\sqrt{\pi \sum_{p \leq T} p^{-2\sigma}}} \right) dt = T \int_a^b e^{-\pi u^2} du + O \left(T \frac{(\log \sum_{p \leq T} p^{-2\sigma})^2}{\sqrt{\sum_{p \leq T} p^{-2\sigma}}} \right).$$

Линейные комбинации L-функций

Существуют L-функции, похожие на $\zeta(s)$, для которых аналог гипотезы Римана не верен.

Примеры

❶ (Функция Давенпорта-Хейльбронна)

$g(s) = \chi_1 L(s, \chi_1) + \overline{\chi_1} L(s, \overline{\chi_1})$, где $\chi_1 \in \mathbb{C}$, χ_1 — характер Дирихле по mod 5, $\chi_1(2) = i$.

❷ (Дзета-функция Эпштейна) $\zeta(s, Q)$, соответствующая бинарной положительно определенной форме $Q(m, n) = am^2 + bmn + cn^2$ с целыми коэффициентами, фундаментальным дискриминантом $-D$ и числом классов $h = h(-D) > 1$.

Нули этих функций также симметричны относительно прямой $\operatorname{Re} s = 1/2$. Но....

Линейные комбинации L-функций

Н. Davenport, Н. Heilbronn (1936) и С.М. Воронин (1976)

При $1/2 < \sigma \leq 1$ пусть $N(\sigma, T)$ — число нулей $\zeta(s, Q)$ в области $\operatorname{Re} s > \sigma$, $0 < \operatorname{Im} s \leq T$. Тогда

$$N(\sigma, T) \asymp T.$$

При этом если $N(T)$ — число нулей $\zeta(s, Q)$ в области $0 < \operatorname{Im} s \leq T$, то аналогично

$$N(T) \asymp T \log T.$$

Линейные комбинации L-функций

Существует

Гипотеза

Почти все нетривиальные нули $\zeta(s, Q)$ лежат на критической прямой.

Е. Bombieri, D. Hejhal (1987):

Показали выполнение гипотезы при справедливости GRH и еще одной гипотезы о распределении ординат нулей L-функций.

Линейные комбинации L-функций

Пусть $N_0(T, L)$ — количество нулей L-функции на интервале $\{\frac{1}{2} + it, T < t \leq 2T\}$ критической прямой.

Для функции Давенпорта-Хейльбронна

С.М. Воронин, 1980: $N_0(T, g) \gg T \exp\left(\frac{1}{20} \sqrt{\log \log \log \log T}\right)$.

А.А. Карацуба, 1989: $N_0(T, g) \gg T (\log T)^{\frac{1}{2}} \exp(-c \sqrt{\log \log T})$, где $c > 0$.

А. Selberg, 1998-99: $N_0(T, g) \gg T \log T$.

И. Р.:

Положительная доля нетривиальных нулей $\zeta(s, Q)$ лежит на критической прямой.

Линейные комбинации L-функций

Если $L_{f_j}(s)$ — независимы, то опять же с помощью плотностных теорем можно доказать результат о распределении значений $\ln |L_{f_1}(1/2 + it)| - \ln |L_{f_2}(1/2 + it)|$

$$\int_T^{2T} \chi_{a,b} \left(\frac{\ln |L_{f_1}(1/2 + it)| - \ln |L_{f_2}(1/2 + it)|}{\sqrt{(n_{f_1} + n_{f_2})\pi \ln \ln T}} \right) dt$$

$$= T \int_a^b e^{-\pi u^2} du + o(T).$$

Модификация метода Сельберга и использование на подинтервалах (определенных благодаря верхнему равенству) отрезка $(T, 2T)$ разных успокаивающих множителей даст теорему о положительной доле для линейных комбинаций.

Линейные комбинации L-функций

Существует

Гипотеза

У $\zeta(s, Q)$ вне критической прямой лежит порядка $\frac{T \log T}{\sqrt{\log \log T}}$ нулей с условием $0 \leq \operatorname{Im} s \leq T$.

Y.Lee, 2021

Пусть $\sigma = 1/2 + (\log T)^{-\theta}$, $0 < \theta < 1/2$. Тогда

$$\int_T^{2T} \chi_{a,b} \left(\frac{\ln |\zeta(\sigma + it)|}{\sqrt{\pi \sum_{p \leq T} p^{-2\sigma}}} \right) dt = T \int_a^b e^{-\pi u^2} du + O \left(T (\log \log T)^{-3/2} \right).$$

Линейные комбинации L-функций

Y.Lamzouri, Y.Lee, 2020-2023

При $\sigma > 1/2 + (\log T)^{-\theta}$ и $0 < t \leq T$ функция $\zeta(s, Q)$ имеет асимптотически

$$CT \frac{(\log T)^\theta}{\sqrt{\log \log T}}$$

нулей, где $\theta \asymp (h(-D))^{-1}$.