Специальные функции в аналитической теории чисел

Д.А. Фроленков

Математический институт имени В.А.Стеклова РАН

4 апреля 2025 г.

Какие спец.функции встречаются в ТЧ

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-x}x^{z-1}dx, \quad J_\nu(z) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n (z/2)^{\nu+2n}}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+1+\nu)},$$

$$I_\nu(z) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(z/2)^{\nu+2n}}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+1+\nu)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2n}, \quad K_\nu(z) = \frac{\pi}{\nu}\frac{I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)}{\sin \pi\nu}.$$

$$_2F_1\left(a, b, c; z\right) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{j=0}^\infty \frac{\Gamma(a+j)\Gamma(b+j)}{\Gamma(c+j)j!} z^j.$$

$$_pF_q\left(\begin{matrix} a_1, a_2, \cdots, a_p \\ b_1, b_2, \cdots, b_q \end{matrix}; z\right) = \frac{\Gamma(b_1)\cdots\Gamma(b_q)}{\Gamma(a_1)\cdots\Gamma(a_p)} \sum_{j=0}^\infty \frac{\Gamma(a_1+j)\cdots\Gamma(a_p+j)}{\Gamma(b_1+j)\cdots\Gamma(b_q+j)j!} z^j,$$

функции Эйри, Уиттакера, различные ортогональные многочлены и их обобщения (функции Лежандра и т.п.) и т.д.

Где и как они возникают? Формула Пуассона

Определим преобразования Фурье и Меллина следующим образом

$$\tilde{f}(y) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e(-xy)dx, \quad \hat{f}(s) := \int_{0}^{\infty} f(x)x^{s-1}dx.$$

Классический вариант формулы Пуассона

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{f}(m)$$

можно обобщить следующим образом. Пусть $a : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ функция с периодом q, т.е. $\forall n, q, m$ выполнено $a(n+qm) = a(n)$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a(n)F\left(\frac{n}{N}\right) = \frac{N}{q} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{F}\left(\frac{mN}{q}\right) \sum_{\beta (mod\ q)} a(\beta)e\left(\frac{m\beta}{q}\right).$$

Определим дзета-функции Лерха

$$\zeta(\alpha, \beta, s) = \sum_{n+\alpha>0} \frac{e(n\beta)}{(n+\alpha)^s}$$

Где и как они возникают? Формула Пуассона

$$\zeta(\alpha, 0, s) = \frac{\Gamma(1-s)}{(2\pi)^{1-s}} \left(-ie\left(\frac{s}{4}\right) \zeta(0, \alpha, 1-s) + ie\left(-\frac{s}{4}\right) \zeta(0, -\alpha, 1-s) \right).$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a(n) F\left(\frac{n}{N}\right) = \frac{N}{q} F(1) \sum_{\beta (mod\, q)} a(\beta) + \sum_{\pm} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mp i}{m} \left(\sum_{\beta (mod\, q)} a(\beta) e\left(\frac{\pm m\beta}{q}\right)\right)$$
$$\times \frac{1}{2\pi i} \int_{(c)} \hat{F}(s) \Gamma(1-s) \left(\frac{2\pi mN}{q}\right)^{s} e(\pm s/4) ds.$$

Можно показать, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e\left(-\frac{mN}{q} x\right) dx = \frac{1}{2\pi i} \int_{(c)} \hat{F}(s) \Gamma(1-s) \left(\frac{2\pi i mN}{q}\right)^{s-1} ds.$$

Для $v \in \mathbb{C}$ определим

$$\tau_v(n) = \sum_{n_1 n_2 = n} \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^v = n^{-v}\sigma_{2v}(n), \tag{1}$$

$$k_0(x, v) = \frac{J_{-2v}(x) - J_{2v}(x)}{2\sin(\pi v)}, \quad k_1(x, v) = \frac{2}{\pi}\cos(\pi v) K_{2v}(x).$$

Тогда для взаимно простых c и d выполнено

$$\frac{4\pi}{c}\sum_{n=1}^{\infty} \tau_v(n) e\left(\frac{nd}{c}\right) \phi\left(\frac{4\pi\sqrt{n}}{c}\right) =$$

$$= 2\frac{\zeta(1+2v)}{(4\pi)^{1+2v}}\hat{\phi}(2+2v) + 2\frac{\zeta(1-2v)}{(4\pi)^{1-2v}}\hat{\phi}(2-2v)$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \tau_v(n) \int_0^{\infty} \left(e\left(-\frac{nd^*}{c}\right) k_0(x\sqrt{n}, v) + e\left(\frac{nd^*}{c}\right) k_1(x\sqrt{n}, v)\right) \phi(x) x dx.$$

Интегрирование по частям с помощью ДУ

Из свойств функций Бесселя следует, что

$$(k_0(\sqrt{x}, v)\sqrt{x})'' = \frac{\nu^2 - 1 - x}{4x^2} k_0(\sqrt{x}, v)\sqrt{x},$$

$$(k_1(\sqrt{x}, v)\sqrt{x})'' = \frac{\nu^2 - 1 + x}{4x^2} k_1(\sqrt{x}, v)\sqrt{x},$$

$$(x^\nu J_\nu(x))' = x^\nu J_{\nu-1}(x), \quad (x^\nu K_\nu(x))' = -x^\nu K_{\nu-1}(x)$$

Обозначая через B_ν либо $J_\nu(x)$, либо $K_\nu(x)$, получаем

$$(\alpha\sqrt{x})^\nu B_\nu(\alpha\sqrt{x}) = \pm \frac{2}{\alpha^2} \frac{d}{dx} \left((\alpha\sqrt{x})^{\nu+1} B_{\nu+1}(\alpha\sqrt{x})\right)$$

Следовательно,

$$\int_0^\infty F(x) B_\nu(\alpha\sqrt{x}) = \pm \left(\frac{2}{\alpha}\right)^j \int_0^\infty \frac{d^j}{dx^j} \left(F(x) x^{-\nu/2}\right) x^{(\nu+j)/2} B_{\nu+j}(\alpha\sqrt{x}) dx.$$

Как оценивать осциллирующие интегралы

Если $g(x)/f'(x)$-монотонна и $|f'(x)/g(x)| \geqslant m$,

$$\int_a^b g(x)e^{if(x)}dx \ll m^{-1}.$$

Если $g(x)/f'(x)$-монотонна и $|f''(x)| \geqslant r$, $|g(x)| \leqslant M$,

$$\int_a^b g(x)e^{if(x)}dx \ll \frac{M}{\sqrt{r}}.$$

Лемма (Blomer-Khan-Young)

Пусть $w(x), f(x)$–гладкие функции с носителем $[a,b]$ и пусть при $i \geqslant 2, j \geqslant 0$

$$|f'(x)| \gg R, \quad f^{(i)}(x) \ll \frac{Y}{Q^i}, \quad w^{(j)}(x) \ll \frac{Z}{U^j},$$

тогда для любого $A > 0$ выполнено

$$\int_a^b w(x)e^{if(x)}dx \ll (b-a)Z\left(\frac{Y}{R^2Q^2} + \frac{1}{RQ} + \frac{1}{RU}\right)^A.$$

Метод перевала.Blomer-Khan-Young

Пусть $0 < \delta < 1/10$, $X, Y, V, V_1, Q > 0$, $Z := Q + X + Y + V_1 + 1$. Пусть $w(x), f(x)$–гладкие функции на интервале J длины V_1. Пусть существует единственная точка $t_0 \in J$ $f'(t_0) = 0$ и пусть $i \geqslant 2, j \geqslant 0$

$$|f''(x)| \gg \frac{Y}{Q^2}, \quad f^{(i)}(x) \ll \frac{Y}{Q^i}, \quad w^{(j)}(x) \ll \frac{X}{V^j}, \quad Y \geqslant Z^{3\delta}, \quad V_1 \geqslant \frac{QZ^{\delta/2}}{\sqrt{Y}}.$$

тогда для любого $A > 0$ выполнено

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(x)e^{if(x)}dx = \frac{e^{if(t_0)}}{\sqrt{|f''(t_0)|}} \sum_{n \leqslant 3A/\delta} p_n(t_0) + O_{A,\delta}(Z^{-A})$$

$$p_n(t_0) = \frac{\sqrt{2\pi}e^{\pi i/4}}{n!} \left(\frac{i}{2f''(t_0)}\right)^n G^{(2n)}(t_0)$$

$$G(t) = w(t)e^{iH(t)}, \quad H(t) = f(t) - f(t_0) - \frac{1}{2}f''(t_0)(t - t_0)^2,$$

$$\frac{d^j}{dt_0^j} p_n(t_0) \ll X\left(V^{-j} + Q^{-j}\right)\left((V^2Y/Q^2)^{-n} + Y^{-n/3}\right)$$

Метод перевала Mckee-Sun-Ye

Пусть $g(x), f(x)$–гладкие функции на интервале $[\alpha, \beta]$, пусть существует единственная точка $\gamma \in [\alpha, \beta]$ $f'(\gamma) = 0, f''(\gamma) > 0$. Пусть $H_1(x) = \frac{g(x)}{2\pi i f'(x)}$ и для $2 \leqslant i \leqslant 2n+3, 0 \leqslant j \leqslant 2n+1$

$$|f''(x)| \gg \frac{T}{M^2}, \quad f^{(i)}(x) \ll \frac{T}{M^i}, \quad g^{(j)}(x) \ll \frac{U}{N^j}, \quad H_k(x) = -\frac{H'_{k-1}(x)}{2\pi i f'(x)},$$

тогда выполнено

$$\int_\alpha^\beta g(x)e(f(x))dx = \frac{e(f(\gamma)}{\sqrt{f''(\gamma)}}\left(g(\gamma) + \sum_{j=1}^n \omega_j \frac{(-1)^j(2j-1)!!}{(4\pi i f''(\gamma))^j}\right) +$$

$$+O\left(\frac{UM^{2n+5}}{NT^{n+2}} \sum_{i\leqslant j\leqslant (n+1)/2} \left(\frac{1}{(\gamma-\alpha)^{n+2+j}} + \frac{1}{(\beta-\gamma)^{n+2+j}}\right) \sum_{k=j}^{n+1-j} \frac{1}{N^{n+1-j-k}M^k}\right) +$$

$$+ \left(e(f(x)) \sum_{j=1}^n H_j(x)\right)\Bigg|_\alpha^\beta + O\left(\frac{UM^{2n+2}}{T^{n+1}N^{2n+1}} + \frac{UM}{T^{n+1}}\right) + \ldots$$

Инертные функции Kiral-Petrow-Young

Определение

Семейство гладких функций $\{\omega_T\}_{T\in F}$ с носителями на произведении диадических интервалов в $\mathbb{R}^d$ называется X–инертным, если для любого $j=(j_1,\ldots,j_d)\in\mathbb{Z}^d_{\geqslant}0$ выполнено

$$\sup_T \sup_{(x_1,\ldots,x_d)\in\mathbb{R}^d_{>}0} X_T^{-j_1-\ldots-j_d}\left|x_1^{j_1}\cdot\ldots\cdot x_d^{j_d}\omega_T^{(j_1,\ldots,j_d)}(x_1,\ldots,x_d)\right|<\infty,$$

с $X=X_T:F\to\mathbb{R}_{>1}$

- $\left\{\omega\left(\frac{x_1}{X_1},\ldots,\frac{x_d}{X_d}\right)\right\}$ является 1-инертным;
- $\left\{e^{i\lambda_1x_1+\ldots+i\lambda_dx_d}\omega\left(\frac{x_1}{X_1},\ldots,\frac{x_d}{X_d}\right)\right\}$ $1+\max(|\lambda_1|X_1,\ldots,|\lambda_d|X_d)$-инертно;
- $\{w_T\}_{T\in F}$ X-инертно, $\{v_{T'}\}_{T'\in F'}$ Y-инертно, тогда $\{w_Tv_{T'}\}_{(T,T')\in F\times F'}$ $\max(X_T,Y_{T'})$-инертно

Инертные функции и метод перевала

Пусть $\{w_T\}_{T\in F}$ X-инертно, $x_i \asymp X_i$, $x_1 = X_1 f\left(\frac{x_2}{X_2}, \dots, \frac{x_d}{X_d}\right)$

$$W_T = w_T\left(X_1 f\left(\frac{x_2}{X_2}, \dots, \frac{x_d}{X_d}\right), x_2, \dots, x_d\right)$$

тогда $\{W_T\}_{T\in F}$ X-инертно.

Теорема

Пусть $\{w_T\}_{T\in F}$ X-инертно, $t_1 \asymp Z$, $t_i \asymp X_i$ при $i = 2, .., d$. Пусть

$$\frac{\partial^{a_1+\ldots+a_d}}{\partial t_1^{a_1}\ldots\partial t_d^{a_d}}\phi(t_1,\dots,t_d) \ll \frac{Y}{Z^{a_1}}\frac{1}{X_2^{a_2}\ldots X_d^{a_d}}, \quad \frac{\partial^2}{\partial t_1^2}\phi(t_1,\dots,t_d) \gg \frac{Y}{Z^2},$$

и существует единственная t_0–точка перевала $\frac{\partial}{\partial t_1}\phi(t_1,\dots,t_d)|_{t_0} = 0$. Если $Y/X^2 \geqslant R \geqslant 1$, то существует X-инертное семейство $\{W_T\}$ такое, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} w_T(t_1,\dots,t_d)e^{i\phi(t_1,\dots,t_d)}dt_1 = \frac{Z}{\sqrt{Y}}e^{i\phi(t_0,t_2\dots,t_d)}W_T(t_2,\dots,t_d) + O\left(\frac{Z}{R^A}\right)$$

Инертные функции и метод перевала

Следствие

Пусть $\{w_T(t)\}_{T\in F}$ X*-инертно,* $t \asymp Z$, $w^{(j)}(t) \ll (X/Z)^j$, $\phi^{(j)}(t) \ll Y/Z^j$ *и* $Y/X^2 > R > 1$.

1. *если* $\phi''(t) \gg Y/Z^2$ *и* $\phi'(t_0) = 0$, *то*

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} w_T(t) e^{i\phi(t)} dt = \frac{e^{i\phi(t_0)}}{\sqrt{\phi''(t_0)}} F_T(t_0) + O(Z/R^A)$$

   $\{F_T\}$*-* X *инертно.*

2. *если* $|\phi'(t)| \gg Y/Z$, *то* $I \ll Z/R^A$.

Пусть $\{w_T\}$ X-инертно, $X \ll q^{\epsilon}$ и $tX_1X_2X_3 \gg q^{\delta}$

$$\int_{R^3} w_T(x_1, x_2, x_3) e(-tx_1x_2x_3 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3) dx_1 dx_2 dx_3 =$$

$$= \frac{X_1X_2X_3}{(tX_1X_2X_3)^{3/2}} e\left(2\sqrt{\frac{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{t}}\right) W_T(\cdot) + O(q^{-A})$$

Метод перевала: слияние особенностей.

$$
{}_2F_1\left(1/4 + ir(1-\alpha), 3/4 + ir(1-\alpha), 1 + 2ir; z\right) =
$$

$$
= \frac{\Gamma(1+2ir)}{\Gamma\left(3/4 + ir(1-\alpha)\right)\Gamma\left(1/4 + ir(1+\alpha)\right)} \int_0^1 \frac{y^{-1/4}\exp(irf(\alpha, y))}{(1-y)^{3/4}(1-zy)^{1/4}}dy,
$$

$$
f(\alpha, y) = (1-\alpha)\log y + (1+\alpha)\log(1-y) - (1-\alpha)\log(1-zy).
$$

точки перевала (решения $\frac{\partial}{\partial y} f(\alpha, y) = 0$) $y_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{1-(1-\alpha^2)z}}{(1+\alpha)z}$. При $z \to 1$ и $\alpha \to 0$ обе точки y_+ и y_- стремятся к граничной точке и склеиваются при $z = 1, \alpha = 0$.

$$
{}_2F_1\left(1/4 + ir(1-\alpha), 3/4 + ir(1-\alpha), 1 + 2ir; z\right) =
$$

$$
= \frac{(1-z)^{-1/4 - ir(1-\alpha)}(1+Y)^{-2ir}\Gamma(1+2ir)}{\Gamma\left(1/2 + 2ir\alpha\right)\Gamma\left(1/2 + 2ir(1-\alpha)\right)} \int_0^{\infty} e^{2ir(-x+\alpha\log q(x))} \frac{dx}{\sqrt{q(x)}},
$$

$$
q(x) = \left(1 - e^{-x}\right)\left((Y+1)e^x - Y\right), \quad Y = \frac{1-\sqrt{1-z}}{2\sqrt{1-z}}.
$$

Метод перевала Temme.

Определим $w := 2ir, \lambda := \alpha w = 2it$, тогда

$$\int_0^\infty e^{-w(x-\alpha\log q(x))}\frac{dx}{\sqrt{q(x)}} = \int_0^\infty q(x)^{\lambda-1}e^{-wx}\sqrt{q(x)}dx.$$

Совершим замена переменных $x - \alpha\log q(x) = t - \alpha\log t + A(\alpha)$, переводящую $x = 0$ в $t = 0$, $x = x_0$ в $t = \alpha$ и $x = +\infty$ в $t = +\infty$.

$$\int_0^\infty e^{-w(x-\alpha\log q(x))}\frac{dx}{\sqrt{q(x)}} = e^{-wA(\alpha)}\int_0^\infty e^{-w(t-\alpha\log t)}f(t)\frac{dt}{t},\ f(t) = \frac{t}{\sqrt{q(x)}}\frac{dx}{dt}$$

$$A(\alpha) = x_0 - \alpha\log q(x_0) - \alpha + \alpha\log\alpha.$$

$$f(t) = f(\alpha) + (f(t) - f(\alpha)),\quad \widetilde{f}_1(t) = t\left(\frac{f(t)-f(\alpha)}{t-\alpha}\right)'.$$

$$\int_0^\infty e^{-w(t-\alpha\log t)}f(t)\frac{dt}{t} = f(\alpha)\frac{\Gamma(\lambda)}{w^\lambda} + \frac{1}{z}\int_0^\infty e^{-w(t-\alpha\log t)}\widetilde{f}_1(t)\frac{dt}{t}.$$

Метод перевала: слияние особенностей.

$$F_2(r,\alpha,y) := \frac{\Gamma(1/4+ir(1-\alpha))\Gamma(1/4-ir(1+\alpha))}{\Gamma(1/2)}\times$$
$$\times\, {}_2F_1\left(1/4+ir(1-\alpha), 1/4-ir(1+\alpha), 1/2; x\right).$$

При $\alpha=0$ асимптотика для данной функции на основе K-функции Бесселя была получена Khwaja-Daalhuis с помощью модификации метода перевала. Их метод при $\alpha\neq 0$ приводит к интегралу со следующей функцией в экспоненте

$$f(t) = \log\left(1+\frac{1-x}{t}\right) - (1+\alpha)\log(1+t) + \alpha\log\left(t(t+1-x)\right).$$

Точки перевала

$$t_\pm = \frac{x-(1-\alpha)\pm\sqrt{x(x-1+\alpha^2)}}{1-\alpha}.$$

При $x>1-\alpha^2$ эти точки действительны, при $0<x<1-\alpha^2$ нет. Следовательно, функция $F_2(r,\alpha,x)$ имеет разное поведение при $x<1-\alpha^2$ и при $x>1-\alpha^2$. Вообще вид $f(t)$ сильно отличается для $x\lessgtr 1-\alpha^2$.

Метод Лиувилля-Грина

При $x > 1 - \alpha^2$ график $f(t)$ похож на график кубического многочлена и значит для изучения $F_2(r, \alpha, x)$ надо использовать функции Эйри. При $x < 1 - \alpha^2$ график функции $f(t)$ подсказывает, что надо использовать функции Бесселя.

$$Y_r(x) = x^{1/4}(1-x)^{1/2-ir\alpha}{}_2F_1\left(1/4 + ir(1-\alpha), 1/4 - ir(1+\alpha), 1/2; x\right)$$

$$Y_r''(x) = \left((2r)^2 f(\alpha, x) + g(\alpha, x)\right) Y_r(x),$$

$$f(\alpha, x) = \frac{1-\alpha^2-x}{4x(1-x)^2}, \quad g(\alpha, x) = -\frac{1}{4(1-x)^2} - \frac{3}{16x^2(1-x)}.$$

Д.У. характеризуется наличием полюса второго порядка $x = 1$ и точки поворота $x = 1 - \alpha^2$, которые сливаются при $\alpha \to 0$. Асимптотические свойства решений таких ДУ были исследованы в работах Boyd-Dunster (1986) и Dunster (1990),(2013). Оказывается, что асимптотические разложения выписываются с помощью функций Бесселя $K_{2ir\alpha}(\cdot)$ и $\tilde{I}_{2ir\alpha}(\cdot)$, которые в свою очередь аппроксимируются функциями Эйри.

Спасибо за внимание!