

Диофантова проблема делителей

О.Г. Балканова¹ W. Duke² Д.А. Фроленков¹

¹Математический институт имени В. А. Стеклова РАН

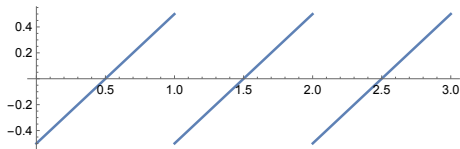
²University of California, Los Angeles

Апрель 2025

Проблема делителей Дирихле

$$\Delta(x) = \sum_{n \leq x} d(n) - x \log x - (2\gamma - 1)x = -2 \sum_{1 \leq d \leq x^{\frac{1}{2}}} \rho\left(\frac{x}{d}\right) + O(1),$$

где γ – постоянная Эйлера и $\rho(x) = \{x\} - \frac{1}{2} = x - \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2}$



Целые точки в областях

- ▶ **Дирихле**: целые точки под гиперболой;
- ▶ **Харди-Литтлвуд**: целые точки в треугольнике, образованном осями координат и линией $\omega x + \omega' y = \eta > 0$, где ω, ω' – положительные числа, для которых $\alpha = \omega/\omega'$ иррационально.

Задача Дирихле сводится к изучению суммы $\sum_{1 \leq d \leq x^{\frac{1}{2}}} \rho(x/d)$, а для решения задачи Харди и Литтлвуда необходимо исследовать

$$S(x, \alpha) = \sum_{n \leq x} \rho(n\alpha).$$

Функция делителей с ограничениями

Для фиксированного $\alpha \geq 1$ определим функцию

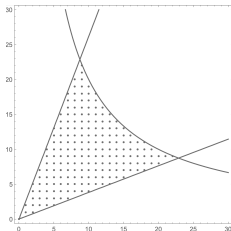
$$\begin{aligned}d(n, \alpha) &= \#\{d \mid n; \alpha^{-1}n \leq d^2 \leq \alpha n\} \\ &= \#\{n = d_1 d_2; \alpha^{-1}d_1 \leq d_2 \leq \alpha d_1\}.\end{aligned}$$

Аналогично классическому случаю нас интересует асимптотическое поведение

$$\Delta(x, \alpha) = \sum_{n \leq x} d(n, \alpha) - x \log \alpha.$$

Тривиальная оценка: $\Delta(x, \alpha) = O_\alpha(x^{\frac{1}{2}})$.

Целые точки в гиперболическом секторе



Для $x, \alpha \geq 1$ выполнено равенство

$$\Delta(x, \alpha) = -2S\left((x/\alpha)^{\frac{1}{2}}, \alpha\right) - 2 \sum_{(\frac{x}{\alpha})^{\frac{1}{2}} < d \leq x^{\frac{1}{2}}} \rho\left(\frac{x}{d}\right) + O(\alpha).$$

Диофантова проблема делителей

Для любого $\epsilon > 0$ выполнено:

$$\Delta(x, \alpha) = -2S\left((x/\alpha)^{\frac{1}{2}}, \alpha\right) + O_{\alpha, \epsilon}(x^{\theta + \epsilon}),$$

- ▶ метод Виноградова: $\theta = 1/3$;
- ▶ метод Хаксли: $\theta = 131/416 \approx 0.3149$;
- ▶ метод Ли-Янг: $\theta = 0.3144$.

Размер суммы $S(x, \alpha)$ зависит от арифметических свойств α .
Существует иррациональное α , для которого **не верно**:

$$S(x, \alpha) = O(x^{1-\epsilon}), \quad \Delta(x, \alpha) = O(x^{\frac{1}{2}-\epsilon}).$$

Пусть α – квадратичная иррациональность. Тогда выполнены оценки

$$S(x, \alpha) = O(\log x) \quad \text{и} \quad S(x, \alpha) = \Omega_{\pm}(\log x),$$

доказанные Харди-Литтлвудом и Островским.

Гекке изучал α следующего вида

$$\alpha = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}, \quad \text{где } a \in \mathcal{A},$$

$\mathcal{A} = \{a > 3, D = a^2 - 4 \text{ - дискриминант действ. квадр. поля}\}.$

Первые элементы этого множества:

$$\mathcal{A} = \{4, 5, 8, 9, 12, 13, 15, 17, 19, 21, 24, 28, 31, 32, \dots\}.$$

Дзета функции

Изучение $\Delta(x)$ сводится к исследованию

$$\zeta^2(s) + \zeta'(s) - 2\gamma\zeta(s).$$

Аналогично связаны

$$\Delta(x, \alpha) \leftrightarrow \phi(s, \alpha) = \sum_{n \geq 1} (d(n, \alpha) - \log \alpha) n^{-s},$$

а также

$$S(x, \alpha) \leftrightarrow \psi(s, \alpha) = \sum_{n \geq 1} \rho(n\alpha) n^{-s}.$$

В свою очередь ряды $\phi(s, \alpha)$ и $\psi(s, \alpha)$ выражаются через [дзета функции Гекке](#).

Дзета функция Гекке

Пусть $\mathcal{O}$ – кольцо целых для поля $\mathbb{F} = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$. Положим $\kappa = \pi / \log \alpha$. Определим

$$\nu_0(\mu) = 1, \quad \nu_1(\mu) = \operatorname{sgn}(\mu\mu'),$$

где μ' – сопряженный элемент с μ , и пусть $\lambda(\mu) = e^{i\kappa \log |\frac{\mu}{\mu'}|}$.

Для $n \in \mathbb{Z}$ **характер** $\nu_j(\mu)\lambda^n(\mu)$ удовлетворяет $\nu_j(\alpha)\lambda^n(\alpha) = 1$ и однозначно определён на главных идеалах $(\mu) \subset \mathcal{O}$. Для $\Re s > 1$

$$\zeta(s, \nu_j \lambda^n) = \sum_{(\mu)} \frac{\nu_j(\mu)\lambda^n(\mu)}{|N(\mu)|^s},$$

где сумма по всем различным ненулевым главным идеалам.

Функциональное уравнение

Для $n \in \mathbb{Z}$ функция

$$\xi(s, \nu_j \lambda^n) = \left(\frac{\sqrt{D}}{\pi} \right)^s \Gamma \left(\frac{s+j}{2} + \frac{in\kappa}{2} \right) \Gamma \left(\frac{s+j}{2} - \frac{in\kappa}{2} \right) \zeta(s, \nu_j \lambda^n)$$

является целой и удовлетворяет функциональному уравнению

$$\xi(1-s, \nu_j \lambda^n) = \xi(s, \nu_j \lambda^{-n}),$$

кроме случая $n = j = 0$, когда у функции есть простые полюса в $s = 1, 0$ с вычетами

$$\operatorname{Res}_{s=0} \xi(s, \nu_0) = -2 \log \alpha, \quad \operatorname{Res}_{s=1} \xi(s, \nu_0) = 2 \log \alpha.$$

Для $j \in \{0,1\}$ определим

$$\Phi_j(s) = \frac{2^{2s-2} D^{-s/2}}{\pi^{1-s} \log \alpha} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n \frac{\Gamma\left(\frac{s+1-j+in\kappa}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s+1-j-in\kappa}{2}\right)}{\Gamma(2s)} \times \\ \times {}_2F_1\left(s + in\kappa, s - in\kappa; s + \frac{1}{2}; \frac{1}{2} - \frac{a}{4}\right) \xi(s, \nu_j \lambda^n),$$

$$\Psi_j(2s) = \frac{2^{2s-2} D^{-s/2}}{\pi^{1-s} \log \alpha} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\Gamma\left(\frac{s+1-j+in\kappa}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s+1-j-in\kappa}{2}\right)}{\Gamma(2s)} \xi(s, \nu_j \lambda^n).$$

Тогда

$$\phi(s, \alpha) = \sum_{n \geq 1} (d(n, \alpha) - \log \alpha) n^{-s} = \frac{D^s}{4} (\Phi_0(s) - \Phi_1(s)) - \zeta(s) \log \alpha,$$

$$\psi(2s, \alpha) = \sum_{n \geq 1} \rho(n\alpha) n^{-2s} = \frac{D^s}{8} (\Psi_1(2s) - \Psi_0(2s)) + \frac{\sqrt{D}}{2} \zeta(2s - 1).$$

Сглаживание

Мы будем работать со средним (Riesz means):

$$\Delta_r(x, \alpha) := \sum_{n \leq x} (d(n, \alpha) - \log \alpha) \left(1 - \frac{n}{x}\right)^r.$$

Для $r > 1$ выполнена асимптотическая формула:

$$\Delta_r(x, \alpha) = \frac{3-a}{12 \log \alpha} \log x + O(1).$$

Данный результат является следствием формулы Вороного.

Формула Вороного

Для $x \rightarrow +\infty$, $a \in \mathcal{A}$, $r > 1$ и достаточно малого $\epsilon > 0$ выполнено

$$\Delta_r(x, \alpha) = \frac{3-a}{12 \log \alpha} \log x + C_r(a) - \frac{\Gamma(1+r)}{4 \log \alpha} \times \\ \times \sum_{n \neq 0} \frac{(-1)^n \Gamma(in\kappa)}{\Gamma(1+r+in\kappa)} (xD)^{in\kappa} (\zeta(in\kappa, \nu_1 \lambda^n) + \zeta(in\kappa, \nu_1 \lambda^{-n})) + O_a(x^{-\epsilon}),$$

где $\zeta(s, \nu_j \lambda^n)$ - дзета функция Гекке, $\kappa = \pi / \log \alpha$

$$C_r(a) = \frac{3-a}{12 \log \alpha} \left(-\psi(1+r) - \psi(1/2) - \gamma + \log(\pi \sqrt{D}) \right) + \\ + \log \sqrt{\alpha} - \frac{1}{4} - \frac{\zeta'(0, \nu_1)}{2\pi \log \alpha}.$$

Важное свойство

Рассмотрим линейную комбинацию

$$\Delta_r(x, \alpha) = \sum_{n \leq x} (d(n, \alpha) - \log \alpha) \left(1 - \frac{n}{x}\right)^r$$

и

$$S_r(x, \alpha) = \sum_{n \leq x} \rho(n\alpha) \left(1 - \left(\frac{n}{x}\right)^2\right)^r.$$

Заметим, что полюса на мнимой оси у функций $\phi(\mathbf{s}, \alpha)$ и $\psi(\mathbf{2s}, \alpha)$ совпадают, что позволяет подобрать линейную комбинацию функций $\Delta_r(x, \alpha)$ и $S_r(x, \alpha)$ так, чтобы итоговая асимптотическая формула была простой.

Асимптотическая формула

Теорема

Для $x \rightarrow +\infty$, $a \in \mathcal{A}$, $\alpha = (a + \sqrt{a^2 - 4})/2$, $r > 1$ и достаточно малого $\epsilon > 0$ (например, $0 < \epsilon < (r - 1)/100$) выполнена формула:

$$\Delta_r(x, \alpha) + 2S_r(\sqrt{\alpha x}, \alpha) = C(a) + O_a(x^{-\epsilon}),$$

где

$$C(a) = \frac{a-3}{12} + \frac{1}{2} \log \alpha - \frac{\sqrt{D}}{12}.$$

При $r > 3$ формула верна с оценкой остатка $O_a(x^{-1+\epsilon})$.