

Лаборатория алгебраических групп преобразований ФКН НИУ ВШЭ

Презентация проектов на летнюю практику

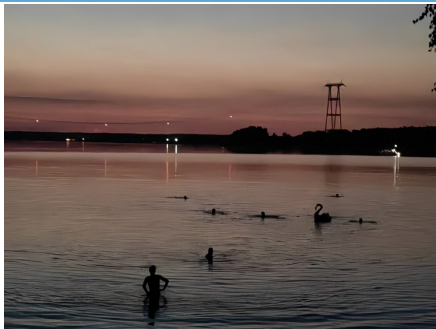
11.04.2025

О лаборатории

Научно-учебная лаборатория алгебраических групп преобразований (cs.hse.ru/latg)

Мы:

- ▶ изучаем симметрии алгебраических многообразий как множеств нулей наборов многочленов;
- ▶ 11 научных сотрудников и 12 стажеров-исследователей (есть вакансии для стажеров);
- ▶ публикуем статьи в ведущих журналах;
- ▶ регулярно проводим школы и конференции в Москве, Подмосковье, в институте Эйлера в Петербурге, в Самаре и др.



Гипотеза Оды

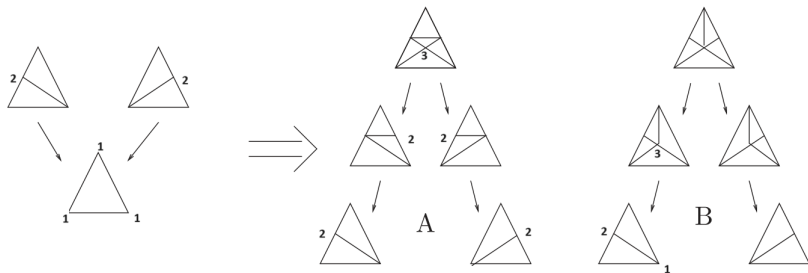
Руководитель: Перепечко Александр Юрьевич
(ст. науч. сотр. лаборатории АГП)

Студенты: ПИ 1-2 курсы, ПМИ 2 курс

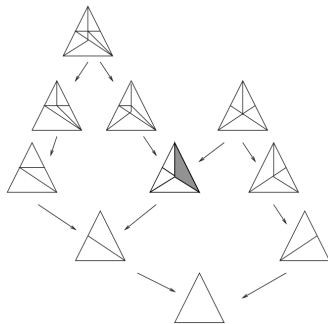
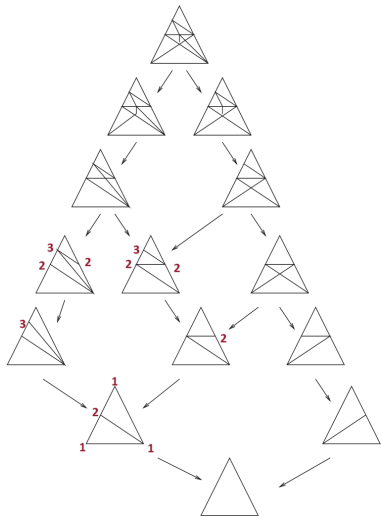
Цель: Доработать логическую игру на базе гипотезы Оды,
познакомиться с комбинаторикой полиэдральных конусов

Гипотеза Оды

Гипотеза Оды о сильной факторизации торических отображений в размерности 3 сводится к существованию общего подразбиения для двух подразбиений треугольника.

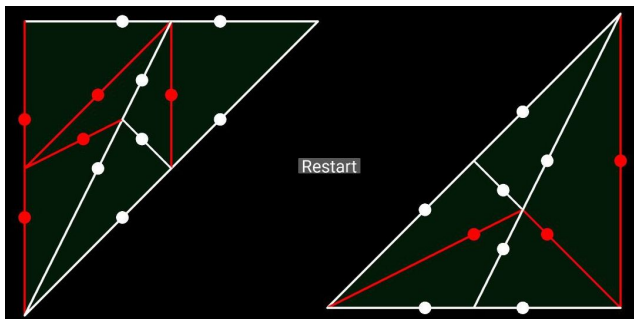


Гипотеза Оды



Гипотеза Оды

Текущий интерфейс игры (красным отмечены различия в подразбиении относительно центральной симметрии)



Реализовал Владислав Пичугин.

Орбиты унитарных групп

Руководитель: Игнатьев Михаил Викторович
(ст. науч. сотр. лаборатории АГП)

Студенты: ПМИ 1–2 курс

Цель: познакомиться с гипотезой Айзекса для числа орбит унитарных групп над конечным полем и доказать её в некоторых специальных случаях.

- ▶ Унитарная группа над конечным полем $\mathbb{F}_q$ и её подгруппы
- ▶ Коприсоединённое действие и его свойства
- ▶ Число орбит как многочлен от q

Орбиты унипотентных групп

$$\text{Группа } U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$\text{Пространство } \mathfrak{n}^* = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ x_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

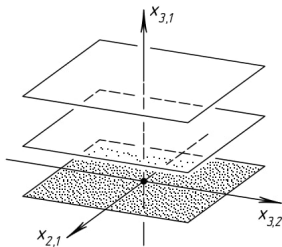
Действие: $g \in U$, $x \in \mathfrak{n}^*$ переходят в $g.x = (gxg^{-1})_{\text{low}}$.

Орбиты унипотентных групп

Орбита матрицы x : $\{g \cdot x, g \in U\}$. Всё пространство $\mathfrak{n}^*$ распадается в объединение непересекающихся орбит.

Гипотеза (I.M. Isaacs, 2007). Количество орбит является многочленом от $q - 1$ с целыми неотрицательными коэффициентами.

Пример: при $n = 4$ число орбит равно $(q - 1) + q^2$.



Базисы Грёбнера и алгебраическая геометрия

Руководитель: Шафаревич Антон Андреевич
(науч. сотр. лаборатории АГП)

Студенты: ПМИ 1 курс, КНАД 1 курс, ПАД 2 курс

Цель: Познакомить студента с алгоритмами, полезными при работе с алгебраическими многообразиями.

Базисы Грёбнера и алгебраическая геометрия

Подмножество $X \subseteq \mathbb{C}^n$ называется **аффинным алгебраическим многообразием**, если существует такой набор многочленов $f_1, \dots, f_m \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, что

$$p \in X \iff f_i(p) = 0, \forall i = 1, \dots, m.$$

Базисы Грёбнера и алгебраическая геометрия

Подмножество $X \subseteq \mathbb{C}^n$ называется **аффинным алгебраическим многообразием**, если существует такой набор многочленов $f_1, \dots, f_m \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, что

$$p \in X \iff f_i(p) = 0, \forall i = 1, \dots, m.$$

Примеры:

[1] Парабола: $\{x = y^2\} \subseteq \mathbb{C}^2$.

Базисы Грёбнера и алгебраическая геометрия

Подмножество $X \subseteq \mathbb{C}^n$ называется **аффинным алгебраическим многообразием**, если существует такой набор многочленов $f_1, \dots, f_m \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, что

$$p \in X \iff f_i(p) = 0, \forall i = 1, \dots, m.$$

Примеры:

[1] Парабола: $\{x = y^2\} \subseteq \mathbb{C}^2$.

[2] Квадрики: $\{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 0\} \subseteq \mathbb{C}^n$;

Базисы Грёбнера и алгебраическая геометрия

Подмножество $X \subseteq \mathbb{C}^n$ называется **аффинным алгебраическим многообразием**, если существует такой набор многочленов $f_1, \dots, f_m \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, что

$$p \in X \iff f_i(p) = 0, \forall i = 1, \dots, m.$$

Примеры:

- [1] Парабола: $\{x = y^2\} \subseteq \mathbb{C}^2$.
- [2] Квадрики: $\{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 0\} \subseteq \mathbb{C}^n$;
- [3] Любая точка $p = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ является множеством решений уравнений $f_i = x_i - a_i = 0$.

Базисы Грёбнера и алгебраическая геометрия

Пример вопроса, на который интересно ответить: как по многочленам $f_1, \dots, f_m$ описать все многочлены $g \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, которые равны нулю на всем аффинном многообразии $X = \{p \in \mathbb{C}^n \mid f_i(p) = 0, \forall i = 1, \dots, m\}$?

Базисы Грёбнера и алгебраическая геометрия

Пример вопроса, на который интересно ответить: как по многочленам $f_1, \dots, f_m$ описать все многочлены $g \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, которые равны нулю на всем аффинном многообразии $X = \{p \in \mathbb{C}^n \mid f_i(p) = 0, \forall i = 1, \dots, m\}$?

Легко видеть, что все многочлены вида $h_1 f_1 + \dots + h_m f_m$, где $h_1, \dots, h_m \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, равны нулю на X .

Базисы Грёбнера и алгебраическая геометрия

Пример вопроса, на который интересно ответить: как по многочленам $f_1, \dots, f_m$ описать все многочлены $g \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, которые равны нулю на всем аффинном многообразии $X = \{p \in \mathbb{C}^n \mid f_i(p) = 0, \forall i = 1, \dots, m\}$?

Легко видеть, что все многочлены вида $h_1 f_1 + \dots + h_m f_m$, где $h_1, \dots, h_m \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, равны нулю на X .

Но часто бывает, что такой вид имеют не все многочлены, равные нулю на X . Например, если $X = \{x^2 = 0\} \subseteq \mathbb{C}$, то многочлен $g = x$ равен нулю на X , но не выражается через x^2 , указанным выше способом.

Студентам будет предложено разобраться в алгоритмах, отвечающих на подобные вопросы.

Конечные группы отражений

Руководитель: Зайцева Юлия Ивановна
(мл. науч. сотр. лаборатории АГП)

Студенты: ПМИ 1 курс, КНАД 1 курс, ПАД 2 курс

Цель: прочитать главу из книги J. Humphreys «Reflection Groups and Coxeter Groups» (на англ. яз.), решать задачи.

- ▶ Конечные группы, порождённые отражениями
- ▶ Дискретные группы, порождённые отражениями
- ▶ Полупростые алгебры Ли
- ▶ Правильные многогранники

