

# Открытая весенняя студенческая олимпиада по математике OSSM Comp'25

Факультета компьютерных наук ВШЭ

9 марта 2025, 11:00 – 14:00

1. Найдите все такие непрерывные функции  $f : [1, 8] \rightarrow \mathbb{R}$ , что

$$\int_1^2 f(t^3)^2 dt + 2 \int_1^2 \sin t \cdot f(t^3) dt = \frac{2}{3} \int_1^8 f(t) dt - \int_1^2 (t^2 - \sin t)^2 dt.$$

2. Многочлен будем называть *сильным*, если его можно представить в виде произведения двух непостоянных многочленов с неотрицательными вещественными коэффициентами. Пусть  $f(x)$  – многочлен степени больше 1, такой что  $f(x^n)$  является сильным для некоторого натурального числа  $n$ . Докажите, что  $f(x)$  также является сильным многочленом.
3. Рассмотрим последовательность Фибоначчи ( $F_1 = F_2 = 1$ ,  $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$  для всякого натурального  $n$ ). Найдите все такие натуральные индексы  $n$ , что для всякого целого  $i$  от 0 до  $F_n$  включительно выполнено

$$C_{F_n}^k \equiv (-1)^k \pmod{F_n + 1}.$$

4. Пусть  $G$  – конечное множество вещественных матриц  $\{M_i\}$  размера  $n \times n$ ,  $1 \leq i \leq r$ , которые образуют группу относительно матричного умножения. Пусть выполняется равенство  $\sum_{i=1}^r \operatorname{tr}(M_i) = 0$ , где  $\operatorname{tr}(A)$  обозначает след матрицы  $A$ . Докажите, что  $\sum_{i=1}^r M_i$  является нулевой матрицей размера  $n \times n$ .
5. Пусть  $E$  – бесконечное множество трансляционных копий (то есть при помощи параллельного переноса) некоторого эллипса  $e$  на плоскости, а  $r$  – фиксированная прямая. Известно, что каждая прямая, параллельная  $r$ , пересекает хотя бы один эллипс из  $E$ . Докажите, что существует бесконечно много таких троек эллипсов из  $E$ , что существует прямая, пересекающая все три эллипса из этой тройки.