

Матричные отображения, сохраняющие различные свойства

Гусев Иван

ФКН НИУ ВШЭ

Введение

В работе рассматриваются отображения действующие на квадратных матрицах над полем $M_n(\mathbb{F})$ и их подмножестве группе невырожденных матриц $GL_n(\mathbb{F})$, с дополнительными ограничениями. В некоторых задачах на отображения навешивается свойство линейности, иногда требуется биективность. Нас будет интересовать вопрос описания отображений сохраняющих различные свойства матриц и отношения на них. Например, отображения сохраняющие определитель матриц, их вырожденность или ранг, а также отношение когерентности, вырожденность суммы или разности.

Формальная постановка

Мы будем касаться следующих задач:

Задача А Дана функция $F : M_n(\mathbb{F}) \rightarrow V$, где $V = \mathbb{F}$ или $V = \mathbb{F}^m$. Описать вид (обратимого) (линейного) отображения $\varphi : M_n(\mathbb{F}) \rightarrow M_n(\mathbb{F})$ сохраняющего F , то есть удовлетворяющего условию:

$$F(A) = F(\varphi(A)), \text{ для любого } A \in M_n(\mathbb{F})$$

Задача Б Дано подмножество матриц $S \subset M_n(\mathbb{F})$. Описать вид (обратимого) (линейного) отображения $\varphi : M_n(\mathbb{F}) \rightarrow M_n(\mathbb{F})$ сохраняющего S , то есть удовлетворяющего условию $\varphi(S) \subseteq S$.

Задача В Дано отношение $\sim$ на $M_n(\mathbb{F})$. Описать вид (обратимого) (линейного) отображения $\varphi : M_n(\mathbb{F}) \rightarrow M_n(\mathbb{F})$ сохраняющего $\sim$, то есть удовлетворяющего условию:

$$A \sim B \Leftrightarrow \varphi(A) \sim \varphi(B), \text{ для любых } A, B \in M_n(\mathbb{F})$$

Часто отображения будут иметь стандартный вид 1, 2:

$$A \mapsto MA^T N, \text{ где } M, N \in M_n(\mathbb{F}), \tau \in \text{Aut}(\mathbb{F}) \quad (1)$$

$$A \mapsto M(A^\tau)^T N, \text{ где } M, N \in M_n(\mathbb{F}), \tau \in \text{Aut}(\mathbb{F}) \quad (2)$$

Под A^τ подразумевается применение ко всем элементам матрицы A отображения τ . Данная операция нелинейна, поэтому в случае линейных отображений, $\tau = id$.

Известные результаты

- Результат Фробениуса [3].** Линейные отображения, сохраняющие определитель матриц, имеют вид 1, 2, где $\det(MN) = 1, \tau = id$.
- Результат Дьедонне [2].** Обратимые линейные отображения, сохраняющие невырожденные матрицы, имеют вид 1, 2, где $\det(MN) \neq 0, \tau = id$.
- Результат Маркуса и Пурвеса 1 [7].** Если $\mathbb{F}$ – алгебраически замкнуто, то линейные отображения, сохраняющие невырожденные матрицы, имеют вид 1, 2, где $\det(MN) \neq 0, \tau = id$.
- Результат Маркуса и Пурвеса 2 [7].** Если $\mathbb{F}$ – алгебраически замкнуто, то линейные отображения, сохраняющие множество собственных значений матрицы, имеют вид 1, 2, где $M = N^{-1}, \tau = id$.
- Результат Хияй [4].** Линейные отображения, сохраняющие отношения подобных матриц, имеют вид:

$$A \mapsto aSAS^{-1} + b(\text{tr } A)E, \quad A \mapsto aSA^T S^{-1} + b(\text{tr } A)E \quad \text{или} \quad A \mapsto (\text{tr } A)B,$$

где $a, b \in \mathbb{F}, S \in GL_n(\mathbb{F}), B \in M_n(\mathbb{F})$.

Матрицы A, B – подобны, если $\exists P \in GL_n(\mathbb{F}) : B = PAP^{-1}$

Известные результаты

- Результат Хуа [5].** Обратимые отображения, сохраняющие отношение когерентности, имеют вид

$$A \mapsto MA^T N + R, \text{ где } M, N \in M_n(\mathbb{F}), \tau \in \text{Aut}(\mathbb{F}) \quad (3)$$

$$A \mapsto M(A^\tau)^T N + R, \text{ где } M, N \in M_n(\mathbb{F}), \tau \in \text{Aut}(\mathbb{F}) \quad (4)$$

, где $\det(MN) \neq 0$.

Матрицы A, B – когерентны, если $\text{rk}(A - B) = 1$.

- Следствие.** Обратимые отображения, сохраняющие ранг разности пар матриц, то есть являющиеся изометрией с расстоянием $d(A, B) = \text{rk}(A - B)$, имеют вид 3, 4, где $\det(MN) \neq 0$.
- Результат Костара, Гутермана, Максаева и Промыслова [1].** Если $|\mathbb{F}| > 2$, то обратимое отображение φ , сохраняющее для пары матриц A, B вырожденность $A + \lambda B$ для фиксированного λ , то есть $\det(A + \lambda B) = 0 \Leftrightarrow \det(\varphi(A) + \lambda \varphi(B)) = 0$ имеет вид 1 или 2, где $\det(NM) \neq 0$ в случае, если $\lambda \neq -1$, и 3 или 4, если $\lambda = -1$.

Сведение отображений, сохраняющих вырожденность суммы, к отображениям сохраняющим когерентность.

Некоторые локальные свойства отображений следуют из других. Например, свойство изометрии отображения следует из свойства сохранения отношения когерентности, а свойство сохранения когерентности следует из свойства сохранения вырожденности суммы. Рассмотрим набросок доказательства следующей теоремы представленной в статье [1].

Формулировка теоремы

Если $|\mathbb{F}| > 2$ и обратимое отображение $\varphi : M_n(\mathbb{F}) \rightarrow M_n(\mathbb{F})$ сохраняет вырожденность суммы, то есть удовлетворяет свойству $\det(A + B) = 0 \Leftrightarrow \det(\varphi(A) + \varphi(B)) = 0$, то данное отображение сохраняет и когерентность, то есть $\text{rk}(A - B) = 1 \Leftrightarrow \text{rk}(\varphi(A) - \varphi(B)) = 1$.

Краткий план доказательства

Введем обозначения: $\mathcal{N}(S) = \{A \mid \forall B \in S, \det(A + B) = 0\}$, $\ell(A, B) = \{A + \lambda(B - A) \mid \lambda \in \mathbb{F}\}$. $\mathcal{N}(S)$ будем называть соседями S , а $\ell(A, B)$ – прямой, проходящей через A, B .

Тогда оказывается, что $\mathcal{N}(\mathcal{N}(\{A, B\})) = \begin{cases} \{A, B\}, & \text{если } \text{rk}(A - B) > 1 \\ \ell(A, B), & \text{если } \text{rk}(A - B) = 1 \end{cases}$.

Непосредственно из этого факта будет следовать то что нам нужно, ибо $\varphi(\mathcal{N}(S)) = \mathcal{N}(\varphi(S))$, а в силу $|\mathbb{F}| > 2$, $\ell(A, B) \neq \{A, B\}$, то есть множество соседей соседей для пара когерентных матриц под действием отображения останется прямой, значит эти матрицы должны перейти в когерентные и наоборот.

Для доказательства этого факта необходимо несколько вспомогательных утверждений:

- Пусть A, B – два оператора действующих на $\mathbf{V}$, если из линейной независимости $x, y \in \mathbf{V}$ следует линейная зависимость Ax, By , то $A = 0$ или $B = 0$ или $\text{Im } A = \text{Im } B$ и имеет размерность 1.
- Если A, B – две матрицы из $M_n(\mathbb{F})$ ранга 1 и $\text{Im } A = \text{Im } B$, $\text{Im } A^T = \text{Im } B^T$, то $A = \mu B$, для $\mu \in \mathbb{F}$.
- Если A, B – две различные матрицы $M_n(\mathbb{F})$, и $X \in \mathcal{N}(\mathcal{N}(\{A, B\}))$, то из линейной независимости $x, y \in \mathbb{F}^n$ следует линейная зависимость $(A - X)x, (B - X)y$.

Случай невырожденных матриц

Отображения действующие на невырожденных матрицах исследованы мало. Такие отображения теряют некоторые свойства, например, для них неверна линейность, однако их изучение представляет интерес.

Рассмотрим сохранение отображением на невырожденных матрицах свойства вырожденности суммы. Помимо применения автоморфизмов, транспонирования и домножения слева/справа на невырожденные матрицы, которые сохраняют данное свойство, можно применять обращения матриц. Таким образом вид отображений 1, 2 расширяется следующими видами:

$$A \mapsto M(A^\tau)^{-1} N, \text{ где } M, N \in M_n(\mathbb{F}), \tau \in \text{Aut}(\mathbb{F}) \quad (5)$$

$$A \mapsto M(A^\tau)^{-T} N, \text{ где } M, N \in M_n(\mathbb{F}), \tau \in \text{Aut}(\mathbb{F}) \quad (6)$$

На примерах малых полей было проверено, что любое обратимое отображение невырожденных матриц, сохраняющее вырожденность суммы имеет один из видов 1, 2, 5 или 6.

Также получено, что в случае матриц 2×2 из свойства сохранения вырожденности суммы следует свойство сохранение когерентности. Для этого метод, предложенный для отображений на $M_n(\mathbb{F})$ был модифицирован под невырожденные матрицы.

Помимо этого, верно, что из сохранения когерентности следует свойство изометрии, как это было выполнено в случае всех матриц $M_n(\mathbb{F})$.

Список статей

- C. Costara, A.E. Guterma, A.M. Maksaev, and V.V. Promyslov. Automorphisms of the total digraph for the ring of square matrices over a field. *Linear Algebra and its Applications*, 2023.
- J. Dieudonne. Sur une ge'ne'ralisation du groupe orthogonal 'a quatre variables. *Arch. Math.*, 1949.
- G. Frobenius. Uber die darstellung der endlichen gruppen durch linear substitutionen. *Sitzungsber Deutsch. Akad. Wiss.*, 1897.
- F. Hiai. Similarity preserving maps on matrices. *Linear Algebra Appl.*, 1987.
- L.K. Hua. A theorem on matrices over a sfield and its applications. *Acta Math*, 1951.
- Chi-Kwong Li and Stephen Pierce. Linear preserver problems. *THE MATHEMATICAL ASSOCIATION OF AMERICA*, 2001.
- M. Marcus and R. Purves. Linear transformations on algebras of matrices ii: The invariance of the elementary symmetric functions. *Canad. J. Math*, 1959.