Игры на прямоугольных решетках и гипотеза полулинейности

Артём Парфенов [1] Михаил Николаевич Вялый [12]

[1]Международная лаборатория теоретической информатики ФКН НИУ ВШЭ [2]МФТИ

Факультет компьютерных наук

Аннотация

В этой работе вводится понятие игр на прямоугольных решетках, которые обобщают игры вычитания с неотрицательными векторами разностей. Основное внимание уделяется анализу сложности определения победителя в таких играх и проверке гипотезы полулинейности множества P-позиций в играх вычитания в конечной размерности. Доказано, что в двумерном случае гипотеза полулинейности верна. Показано, что отображение со слоя после $2l$ ходов на слой после $2l+2$ ходов ведет себя как двоичный клеточный автомат, что позволяет анализировать функцию оценки позиции с точки зрения теории сложности вычислений. Также по модулю некоторого технического утверждения доказано, что функция оценки позиции в играх на решётке в 3-мерном случае не лежит в классе AC^0, что свидетельствует о трудности вычисления этой функции.

Введение

- **Игра вычитания** — это игра двух игроков с фиксированным набором $\mathcal{D}$ разностей и начальным числом $x \in \mathbb{N}$. Во время своего хода каждый игрок выбирает число из набора разностей и вычитает его из x. Важно отметить, что игроки могут делать это только в том случае, если результат вычитания не является отрицательным. Игрок, который не может вычесть ни одной разности из набора, проигрывает. В случае многомерных игр вычитания множество разностей $\mathcal{D}^d$ и само x — это уже не натуральные числа, а векторы с положительной суммой координат.

$$\sum_{i=1}^{d} v$$

  для любого $v \in \mathcal{D}^d$
  Можно заметить, что в случае, когда $d = 1$, множество проигрышных позиций в такой игре начинает повторяться после некоторого конечного начального периода. Это означает, что существует эффективный алгоритм, решающий эту игру. Несмотря на это, Ларссон доказал в [1], что для некоторой размерности d' задача определения эквивалентности двух игр неразрешима, а значит, не существует алгоритма, решающего эту задачу. То есть, сложность игр с вычитанием сильно варьируется. Исследования в этой области продолжились работой В.А. Гурвича и М.Н.Вялого, которые в статье [2] доказали, что для некоторых конечных игр с вычитанием задача решения является $\mathbf{EXP}$-полной.
  В препринте на ArXiv [3] Ларссон привёл несколько графиков результатов игр вычитания в конечной размерности с фиксированным $\mathcal{D}$, и эти графики не похожи на полулинейные множества, что очень загадочно, хотя и ничего не доказывает. В формулировке нашей основной гипотезы мы используем арифметику Пресбургера, которая является логикой первого порядка. Что касается её сложности, мы знаем, что сложность решения является суперэкспоненциальной [4]. Кроме того, мы знаем, что полулинейное множество можно представить в виде конечного объединения решений систем линейных неравенств и уравнений по модулю некоторого целого числа [5]. Таким образом, наша цель — проверить, является ли формула, решающая игру, полулинейной.
- **Гипотеза полулинейности (М.Н.Вялый, В.А. Гурвич), 2021** Задача вычисления рекурренты в конечном алфавите с произвольными сдвигами EXP–полна.

Игры на решетке

- **Ортант** — это множество $a^+ = \{x : a \leq x\}$ с координатным порядком.
- **Игра на решетке** — Доской игры (набором позиций) называется подмножество $\mathbb{Z}^n$, которое получается путём объединения ортантов, вершины которых попарно несравнимы в покоординатном порядке. Ход игрока заключается в вычитании единичного вектора из текущей позиции. Правило выбора победителя является обычным; тот, кто не может сделать ход, проигрывает.
- **Утверждение** Игры в более высоких размерностях сводятся к играм в более низких для игр на ортантах.
- **Утверждение** Игра на такой доске конечна.

Связь между играми вычитания и играми на решетке

Рассмотрим игру вычитания с набором разностей $\mathcal{D} = \{a_i : a_i \in \mathbb{Z}^n, a_i \geq 0, i \in \mathbb{N}, i \in [1, d]\}$ и некоторой позицией $y \geq 0$. Мы связываем их с игрой на d-мерной решетке, поле которой $\mathcal{B}_y$ задаётся следующим образом:

$$x \in \mathcal{B}_y \subset \mathbb{Z}^d \text{ тогда и только тогда, когда } y + \sum x_i a_i \geq 0.$$

Позиция x является терминалом на доске $\mathcal{B}_y$ тогда и только тогда, когда она удовлетворяет системе неравенств (поскольку для любого хода существует координата, в которой нарушается условие):

$$\begin{cases} y + \sum x_i a_i \geq 0 \\ \forall j\ \exists k : ((y + \sum x_i a_i) - a_j)_k < 0 \end{cases}$$

Заметим, что в игре на решетке чётность суммы координат меняется после каждого хода. Следовательно, количество ходов в игре, начинающейся в точке x и заканчивающейся в точке t, равно $S(x - t) = \sum_i (x - t)_i$. Игрок P побеждает, сделав чётное количество ходов, а игрок N — нечётное.
Расширенной арифметикой Пресбургера назовём арифметику Пресбургера, обогащённую предикатом терминальной позиции.
Полулинейная игра на решетке определяется как семейство игр одной размерности, в которых P-позиции выразимы полулинейной формулой в арифметике Пресбургера, обогащённой предикатом терминала. Важно, чтобы формула была одинаковой для всего измерения.
Гипотеза Для любой игры на любой доске в фиксированной размерности существует одна фиксированная полулинейная формула $\Phi(T, \dots)$. Если верна гипотеза, то для любой игры вычитания множество её P-позиций будет полулинейным.
Если существует фиксированная полулинейная формула $\Phi(T, \dots)$ для всей размерности, то вычисление оценки позиции в игре вычитания будет идти следующим образом: у нас есть игра на множестве $y + \sum x_i a_i \cap \mathbb{Z}^n$, но $y \geq 0$ — это позиция. Тогда $x_i = 0$ обязательно должно принадлежать доске. Запишем формулу $\Phi(T(x_1, \dots x_d), \dots)$ на систему совокупностей, которую мы описали выше, и это даст нам полулинейную формулу оценки позиции.

Утверждение (М.Н Вялый) По полулинейной формуле в расширенной арифметике Пресбургера игры можно построить схему полиномиального размера конечной глубины.

Двумерный случай

Рассмотрим случай игр на двумерных досках.
Утверждение Оценка позиций x и $x + (t, t)$, $t \geq 0$ одинаковая.
Теорема (М.Н.Вялый, А. Парфенов), 2025 Усиленная гипотеза полулинейности верна в двумерном случае.

Идея Доказательства.

В данном случае достаточно описать выигрышную стратегию и показать, что она выразима полулинейными условиями. В объснении выигрышности стратегии существенно утверждение 1, который является нашим обобщением P-to-P принципа Ларсона [3]. Также используется один из известных фактов из логики: полулинейность замкнута относительно конечного объединения таковых условий. [5] □

Отображение со слоя игры на слой в старших размерностях

Оказывается, что отображение со слоя после $2l$ ходов на слой после $2l+2$ ходов ведет себя как клеточный автомат. В нашем случае алфавит будет бинарным ($\{0, 1\}$) отвечающим тому, P это позиция или N. Двоичные клеточные автоматы не впервые появляются в анализе комбинаторных игр. В статье [1] авторы определяют так называемые «модулярные игры» и показывают их связь с двоичными клеточными автоматами. Посмотрим на функцию оценки позиции в 3-мерном случае. Пусть на текущий момент времени (ход игры) у нас посчитано $2l$ уровней — то есть в игре прошло $2l$ ходов —, и мы уже знаем оценки на этих уровнях. Попробуем оценить $2l+2$. Так мы получаем в нашей игре тетраэдр, в котором мы знаем оценки во всех вершинах в основании (в точках $x + y + z = 2l$) и хотим узнать оценку в вершинах $x + y + z = 2l + 2$.

Вершина тетраэдра соответствует ситуации в игре, где было совершено два подряд хода в одном направлении, иначе мы попадаем в точку, которая является серединой одной из сторон. Оценки в наших играх выражаются через функцию $NAND$. Действительно, либо все потенциальные ходы ведут в выигрышные позиции – тогда мы ходим в любую из них, и наш соперник выиграет, либо существует хотя бы один ход в проигрышную позицию – и мы ходим туда, а значит, наш соперник проиграет. Таким образом, чтобы в искомой вершине была единица, нужно иметь хотя бы для одного операнда 0, а значит, в соответствующем ему треугольнике должны быть всюду единицы. Для более высоких размерностей построение симплекса происходит так: всюду ставим единицы на гранях с размерностью не равной 2. Двумерную грань заполняем аналогично описанному здесь случаю. Единицы отвечают N позициям, ясно, что добавление N позиций не меняет оценку.

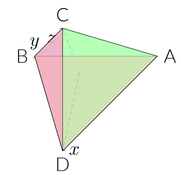

Рис. 1. Наш тетраэдер, где в основании (красным) оценки уже известны и мы хотим оценить значение в точках через два хода.

Давайте посмотрим на проекцию на плоскость (x, y). Нас интересует то, в какие точки дает вклад треугольник за переход от $2l$ к $2l+2$. Мы показали, что каждая точка из рассмотренного треугольника зависит от трех точек на предыдущем четном уровне, таким образом, получаем, что наш клеточный автомат ведет себя следующим образом:

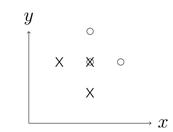

Рис. 2. Эволюция автомата. Мы рисуем крестиком точку в будущем (относительно времени в клеточном автомате), а кружочками в настоящем.

Лемма о судьбе конфигураций клеточного автомата

Любая ограниченная конфигурация клеточного автомата K вымирает за конечное количество шагов работы. В игре с конечным количеством терминалов за конечное число шагов оценки вырождаются в чередование P и N. То есть последовательность оценок является финально периодической, как и в играх вычитания.

Теорема (М.Н. Вялый, А. Парфенов), 2025

Функция оценки позиции не лежит в AC^0. Из чего следует, что гипотеза полулинейности в сильном смысле опровергнута.

Литература

[1] Urban Larsson and Johan Wästlund.
From heaps of matches to the limits of computability, 2012.

[2] Vladimir Gurvich and Mikhail Vyalyi.
On computational hardness of multidimensional subtraction games.
Algorithms, 14(3), 2021.

[3] Urban Larsson, Indrajit Saha, and Makoto Yokoo.
Subtraction games in more than one dimension, 2024.

[4] Michael J Fischer and Michael O Rabin.
Super-exponential complexity of presburger arithmetic.
In *Quantifier Elimination and Cylindrical Algebraic Decomposition*. 1998.

[5] Christoph Haase.
A survival guide to presburger arithmetic.
ACM SIGLOG News, 5(3):67–82, July 2018.

dunno_o@icloud.com