



Алгоритмическая выразительность динамических логик

Дарья Серова

Тверской государственный университет

Однодневный семинар по математической логике

25 июня 2025 года

Цель доклада:

- Рассказать о синтаксисе и семантике PRSPDL.
- Показать выразительность языка PRSPDL.
- Рассказать о сложности задач для PRSPDL.

- Формулы: $A := \perp \mid p_i \mid (A \wedge A) \mid (A \vee A) \mid (A \rightarrow A) \mid [\alpha]A$
- Программы: $\alpha := \pi_i \mid (\alpha; \alpha) \mid (\alpha \cup \alpha) \mid \alpha^* \mid A?$

Шкала Крипке: $F = \langle W, (R_{\pi_i})_{i \in Index} \rangle$, где W — непустое множество миров (точек, состояний), R_{π_i} — бинарные отношения на W .

Модель Крипке: $M = \langle F, v \rangle = \langle W, (R_{\pi_i})_{i \in Index}, v \rangle$, где F — шкала, v — оценка.

Истинность:

$$\begin{aligned}
 M, x &\not\models \perp; \\
 M, x &\models p_i &\iff x \in v(p_i); \\
 M, x &\models A \wedge B &\iff M, x \models A \text{ и } M, x \models B; \\
 M, x &\models A \vee B &\iff M, x \models A \text{ или } M, x \models B; \\
 M, x &\models A \rightarrow B &\iff M, x \models A \text{ влечёт, что } M, x \models B; \\
 M, x &\models [\alpha]A &\iff \forall y \in W (xR_\alpha y \rightarrow M, y \models A).
 \end{aligned}$$

- Формулы: $A := \perp \mid p_i \mid (A \wedge A) \mid (A \vee A) \mid (A \rightarrow A) \mid [\alpha]A$
- Программы: $\alpha := \pi_i \mid (\alpha; \alpha) \mid (\alpha \cup \alpha) \mid \alpha^* \mid A?$

Шкала Крипке: $F = \langle W, (R_{\pi_i})_{i \in Index} \rangle$, где W — непустое множество миров (точек, состояний), R_{π_i} — бинарные отношения на W .

Модель Крипке: $M = \langle F, v \rangle = \langle W, (R_{\pi_i})_{i \in Index}, v \rangle$, где F — шкала, v — оценка.

Истинность:

$$M, x \models [\alpha]A \iff \forall y \in W (xR_{\alpha}y \rightarrow M, y \models A)$$

Отношения достижимости:

$$\begin{aligned} R_{\alpha; \beta} &:= R_{\alpha} \circ R_{\beta} \\ R_{\alpha \cup \beta} &:= R_{\alpha} \cup R_{\beta} \\ R_{\alpha^*} &:= R_{\alpha}^* \\ R_{A?} &:= \{(x, x) : M, x \models A\} \end{aligned}$$

Замечание.

- Логика **PDL** разрешима (EXPTIME-полна).
- Логика **QCI** неразрешима (Σ_1^0 -полна).
- Операции $\circ$ и $\cup$ элементарно выразимы:

$$\begin{aligned} x(R_1 \circ R_2)y &= \exists z (xR_1z \wedge zR_2y); \\ x(R_1 \cup R_2)y &= xR_1y \vee xR_2y. \end{aligned}$$

- Операция $(\cdot)^*$ не является элементарно выразимой.
- Логика **QCI** с операцией $(\cdot)^*$ сильно неразрешима (Π_1^1 -трудна).

Есть два языка, которые описывают одни и те же модели, но один разрешим, а другой сильно неразрешим.

- **Формулы:** $A := \perp \mid p_i \mid (A \wedge A) \mid (A \vee A) \mid (A \rightarrow A) \mid [\alpha]A$
- **Программы:** $\alpha := \pi_i \mid (\alpha; \alpha) \mid (\alpha \cup \alpha) \mid \alpha^* \mid A?$

Шкала Крипке: $F = \langle W, (R_{\pi_i})_{i \in Index} \rangle$, где W — непустое множество миров (точек, состояний), R_{π_i} — **функциональные** бинарные отношения на W .

Модель Крипке: $M = \langle F, v \rangle = \langle W, (R_{\pi_i})_{i \in Index}, v \rangle$, где F — шкала, v — оценка.

Истинность:

$$M, x \models [\alpha]A \iff \forall y \in W (xR_{\alpha}y \rightarrow M, y \models A)$$

Отношения достижимости:

$$\begin{aligned} R_{\alpha;\beta} &:= R_{\alpha} \circ R_{\beta} \\ R_{\alpha \cup \beta} &:= R_{\alpha} \cup R_{\beta} \\ R_{\alpha^*} &:= R_{\alpha}^* \\ R_{A?} &:= \{(x, x) : M, x \models A\} \end{aligned}$$

- Формулы: $A := \perp \mid p_i \mid (A \wedge A) \mid (A \vee A) \mid (A \rightarrow A) \mid [\alpha]A$
- Программы: $\alpha := \pi_i \mid (\alpha; \alpha) \mid (\alpha \cup \alpha) \mid \alpha^* \mid A? \mid (\alpha \cap \alpha)$

Шкала Крипке: $F = \langle W, (R_{\pi_i})_{i \in Index} \rangle$, где W — непустое множество миров (точек, состояний), R_{π_i} — бинарные отношения на W .

Модель Крипке: $M = \langle F, v \rangle = \langle W, (R_{\pi_i})_{i \in Index}, v \rangle$, где F — шкала, v — оценка.

Истинность:

$$M, x \models [\alpha]A \iff \forall y \in W (xR_{\alpha}y \rightarrow M, y \models A)$$

Отношения достижимости:

$$\begin{aligned} R_{\alpha; \beta} &:= R_{\alpha} \circ R_{\beta} \\ R_{\alpha \cup \beta} &:= R_{\alpha} \cup R_{\beta} \\ R_{\alpha^*} &:= R_{\alpha}^* \\ R_{A?} &:= \{(x, x) : M, x \models A\} \\ R_{\alpha \cap \beta} &:= R_{\alpha} \cap R_{\beta} \end{aligned}$$

- Формулы: $A := \perp \mid p_i \mid (A \wedge A) \mid (A \vee A) \mid (A \rightarrow A) \mid [\alpha]A$
- Программы: $\alpha := \pi_i \mid (\alpha; \alpha) \mid \alpha^* \mid A? \mid (\alpha \parallel \alpha) \mid s_1 \mid s_2 \mid r_1 \mid r_2$

Шкала Крипке с операцией $$* : $F = \langle W, (R_{\pi_i})_{i \in Index}, * \rangle$, где

- $* \subseteq W \times W \rightarrow \mathcal{P}(W)$ — операция соединения состояний.

Модель Крипке: $M = \langle F, v \rangle = \langle W, (R_{\pi_i})_{i \in Index}, v \rangle$.

Истинность:

$$M, x \models [\alpha]A \iff \forall y \in W (x R_{\alpha} y \rightarrow M, y \models A);$$

Отношения достижимости:

$$R_{\alpha; \beta} := R_{\alpha} \circ R_{\beta}$$

$$R_{\alpha^*} := R_{\alpha}^*$$

$$R_{A?} := \{(x, x) : M, x \models A\}$$

$$R_{\alpha \parallel \beta} := \{(x, y) : \exists z, t, u, v \in W \ x \in z * t, \ y \in u * v, \ z R_{\alpha} u, \ t R_{\beta} v\};$$

$$R_{s_1} := \{(x, y) : \exists z \in W \ y \in x * z\};$$

$$R_{s_2} := \{(x, y) : \exists z \in W \ y \in z * x\};$$

$$R_{r_1} := \{(x, y) : \exists z \in W \ x \in y * z\};$$

$$R_{r_2} := \{(x, y) : \exists z \in W \ x \in z * y\};$$

Рассматриваются структуры вида $F = (W, R, *)$, где:

- W — множество миров (состояний),
- R — система переходов для атомарных программ,
- $*$ — бинарная операция соединения состояний.

Классификация шкал:

- $*$ -дистрибутивные: $(x * y) \cap (z * t) = (x * t) \cap (z * y)$
- $*$ -разделённые: если $(x * y) \cap (z * t) \neq \emptyset$, то $x = z$ и $y = t$
- $*$ -детерминированные:
если $x \in z * t$ и $x \in z' * t'$, то $z = z'$ и $t = t'$
- $*$ -серийные: $x * y \neq \emptyset$

Замечание. Каждая $*$ -разделённая шкала также является $*$ -дистрибутивной.

Языки (фрагменты логики PRSPDL):

- $\mathcal{L}_{PDL}^{s_1, s_2}$ — формулы, содержащие только программы сохранения s_1 и s_2 .
- $\mathcal{L}_{; }^{s_1, s_2}$ — формулы, содержащие только программы сохранения s_1, s_2 и последовательную композицию $;$.
- $\mathcal{L}_{PDL}^{\parallel, r_1, r_2}$ — формулы с параллельной композицией $\parallel$ и программами восстановления r_1, r_2 .

Классы шкал $\mathcal{C}$:

- $\mathcal{C}_{*sep}$ — *-разделённые шкалы:
если $(x * y) \cap (z * t) \neq \emptyset$, то $x = z$ и $y = t$
- $\mathcal{C}_{*sep}^{*det}$ — *-разделённые и *-детерминированные шкалы:
если $x \in z * t$ и $x \in z' * t'$ то $z = z', t = t'$
- $\mathcal{C}_{*sep}^{*ser}$ — *-разделённые и серийные шкалы:
 $\forall x, y \in W \ x * y \neq \emptyset$
- $\mathcal{C}_{fun, *sep}$ — *-разделённые шкалы с функциональными отношениями переходов R_α

Пусть $VAL(\mathcal{L}, \mathcal{C})$ — задача общезначимости формул языка $\mathcal{L}$ в классе шкал $\mathcal{C}$.

Выразимость $\parallel$ при наличии $\cap$:

$$(\alpha \parallel \beta) \equiv (r_1; \alpha; s_1) \cap (r_2; \beta; s_2)$$

Интерпретация:

- $(r_1; \alpha; s_1)$: восстановить левую часть состояния (r_1) , выполнить α , сохранить (s_1)
- $(r_2; \beta; s_2)$: восстановить правую часть (r_2) , выполнить β , сохранить (s_2)
- пересечение означает: оба потока «согласованы» и из состояния x приводят к одному состоянию y

Некоторые операции в PRSPDL нельзя выразить через другие.

- Нельзя выразить пересечение $(\alpha \cap \beta)$ в языке PRSPDL.
- Нельзя выразить $\alpha \parallel \beta$ через s_1, s_2, r_1, r_2 .
- Нельзя выразить s_1 без r_1 .
- Нельзя выразить r_1 без s_1 .

Утверждение 1

- Проблема $VAL(\mathcal{L}_{PDL}^{s_1, s_2}, C_{*sep})$ является EXPTIME-полной.
- Проблема $VAL(\mathcal{L}_{PDL}^{s_1, s_2}, C_{*sep}^{det})$ является EXPTIME-полной.

Утверждение 2

Пусть $\varphi \in \mathcal{L}_{PDL}^{s_1, s_2}$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- φ , где s_1, s_2 трактуются как обычные программы, выполняется в PDL-шкале.
- φ (с тем же смыслом) выполняется в древовидной PDL-шкале.
- φ , где s_1, s_2 — операции хранения, выполняется в *-разделимой *-детерминированной PRSPDL-шкале.
- φ , где s_1 и s_2 рассматриваются как программы сохранения, истинна во всех *-разделимых PRSPDL-шкалах.

- Несмотря на разрешимость PDL с пересечением (Daneščí, 1985), логика **PRSPDL** неразрешима.
- Проблема общезначимости $VAL(L_{PDL}^{\parallel, r_1, r_2}, \mathcal{C})$ является Π_1^1 -трудной, где $\mathcal{C}$ — один из следующих классов: $C_{\text{fun}, * \text{sep}}^{* \text{det}, * \text{ser}}$, $C_{\text{fun}, * \text{sep}}^{* \text{det}}$, $C_{\text{fun}, * \text{sep}}^{* \text{ser}}$, $C_{* \text{sep}}^{* \text{det}, * \text{ser}}$, $C_{\text{fun}, * \text{sep}}$, $C_{* \text{sep}}^{* \text{det}}$, $C_{* \text{sep}}^{* \text{ser}}$, $C_{* \text{sep}}$.

Таблица 1: модели с $\parallel$, r_1 , r_2 (неразрешимость)

	$C_{\text{fun},*\text{sep}}^{\text{*det},*\text{ser}}$	$C_{\text{fun},*\text{sep}}^{\text{*det}}$	$C_{\text{fun},*\text{sep}}^{\text{*ser}}$	$C_{*\text{sep}}^{\text{*det},*\text{ser}}$
$\mathcal{L}_{PDL}^{s_1,s_2}$				
$\mathcal{L}_i^{s_1,s_2}$				
$\mathcal{L}_{PDL}^{\parallel,r_1,r_2}$	$\Pi_1^1\text{-c}$	$\Pi_1^1\text{-c}$	$\Pi_1^1\text{-c}$	$\Pi_1^1\text{-c}$

Таблица 2: модели с ограничениями на $*$ и без $\parallel$

	$C_{\text{fun},*\text{sep}}$	$C_{*\text{sep}}^{\text{*det}}$	$C_{*\text{sep}}^{\text{*ser}}$	$C_{*\text{sep}}$
$\mathcal{L}_{PDL}^{s_1,s_2}$		EXPTIME-c		EXPTIME-c
$\mathcal{L}_i^{s_1,s_2}$		PSPACE-c		PSPACE-c
$\mathcal{L}_{PDL}^{\parallel,r_1,r_2}$	$\Pi_1^1\text{-c}$	$\Pi_1^1\text{-c}$	$\Pi_1^1\text{-c}$	$\Pi_1^1\text{-c}$

- Даже в сильно ограниченных шкалах добавление операторов $\parallel$, r_1 , r_2 делает задачу общезначимости Π_1^1 -полной.
- Результаты сохраняются для константных фрагментов (т.е. без пропозициональных переменных).

Спасибо за внимание!