# О сложности теории слабых вероятностных пространств

Станислав Сперанский

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

(МЦМУ МИАН)

ФКН НИУ ВШЭ

# Элементарные языки

Здесь «элементарный» — синоним «первопорядкового». Например, эл. язык абелевых групп содержит символы $+$, $-$, $0$ и $=$.

В эл. языках кванторы $\forall$ и $\exists$ бегают только по элементам базового множества (либо множеств). Так, в эл. языке групп $\forall$ и $\exists$ бегают по элементам данной группы, но не по её подгруппам или же каким-н. другим объектам более высоких порядков.

Элементарная теория данного класса структур — это совокупность свойств, выразимых в соответствующем эл. языке и присущих всем структурам рассматриваемого класса. Изначально она не призвана моделировать рассуждения об этих структурах.

Изучение элементарных теорий разнообразных классов структур — классическая тема в основаниях математики. См., например,

Ю. Л. Ершов, И. А. Лавров, А. Д. Тайманов, М. А. Тайцлин. Элементарные теории. *УМН* 20, 37–108, 1965.

Грубо говоря, нас интересует сложность проверки «элементарных» свойств для тех или иных классов структур.

Термин «теория» в целом перегружен. Эл. теории не стоит путать с теориями как дедуктивными системами, вроде PA или ZFC.

**Пример**

Эквациональная теория группы $\mathfrak{G}$ — особый фрагмент эл. теории $\mathfrak{G}$, который можно отождествить с проблемой тождества для $\mathfrak{G}$.

Если эл. теория класса структур алгоритмически неразрешима, то её сложность измеряется с помощью сводимости посредством вычислимых функций, в терминах степеней неразрешимости.

| | |
|---|---|
| $\Pi^0_1$ | эл. теория конечных групп,<br>не-остановка для машин Тьюринга |
| $\Pi^0_\infty$ | истинность в арифметике $1^{\text{ого}}$ порядка |
| $\Pi^1_1$ | эл. теория конечно порождённых групп,<br>«нётеровость» для вычислимых деревьев |
| $\Pi^1_\infty$ | истинность в арифметике $2^{\text{ого}}$ порядка,<br>элементарный анализ |

Под слабым вероятностным пространством мы будем понимать пару $\langle \mathscr{A}, \mathsf{P} \rangle$, где:

- $\mathscr{A}$ — нетривиальная булева алгебра;
- $\mathsf{P}$ — слабая вер. мера на $\mathscr{A}$, т.е. функция из $\mathscr{A}$ в $[0,1]$ т.,ч. для любого кон. множества $S$ попарно дизъюнктных элементов $\mathscr{A}$,

$$\mathsf{P}\left(\bigvee S\right) = \sum_{E \in S} \mathsf{P}(E),$$

и $\mathsf{P}(\top) = 1$, где $\top$ обозначает наибольший элемент $\mathscr{A}$.

Под вероятностными логиками понимают формальные языки, в чьей семантике используются такого рода пространства.

# QPL$^{e}$: Элементарный язык вер. пространств

QPL$^{e}$ содержит:

- булевы переменные $X$, $Y$, $Z$, …, бегающие по событиям;
- символы $\bot$, $\top$, $\wedge$, $\vee$ и $\neg$ из языка булевых алгебр; %они будут также обозначать логические связки
- специальный символ $\mu$ для обозначения вероятностной меры;
- символы $0$, $1$, $+$, $-$, $\cdot$ и $\leqslant$ из языка упорядоченных полей;
- символы кванторов $\forall$ и $\exists$.

Булевы термы строятся из $\bot$, $\top$ и булевых переменных, используя $\wedge$, $\vee$ и $\neg$. Они представляют собой булевы комбинации событий.

Под базовой $\mathsf{QPL}^{\mathsf{e}}$-формулой понимается выражение вида

$$f\,(\mu\,(\phi_1), \ldots, \mu\,(\phi_m)) \ \leqslant \ g\,(\mu\,(\phi_{m+1}), \ldots, \mu\,(\phi_{m+n})),$$

где $f$ и $g$ суть полиномы с коэффициентами из $\mathbb{Z}$, а $\phi_1$, ..., $\phi_{m+n}$ — булевы термы; далее $\mathsf{QPL}^{\mathsf{e}}$-формулы строятся из базовых $\mathsf{QPL}^{\mathsf{e}}$-формул обычным образом.

Отношение истинности $\Vdash$ для $\mathsf{QPL}^{\mathsf{e}}$ можно определить стандартным образом. Например, $\mathsf{QPL}^{\mathsf{e}}$-предложение

$$\Theta \ := \ \exists X\,(\mu\,(X) \neq 0 \wedge \forall Y\,(\mu\,(Y) \neq 0 \to \mu\,(X) \leqslant \mu\,(Y))).$$

истинно в пространстве $\mathscr{P} = \langle \mathscr{A}, \mathrm{P} \rangle$ тогда и только тогда, когда для некоторого $A \in \mathscr{A}$ мы имеем [ ... ]

Пусть QPL получается из $\mathsf{QPL}^{\mathsf{e}}$ посредством добавления числовых переменных и, следовательно, кванторов по вещ. числам.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Пусть $\mathcal{K}$ — класс пространств. Под $\mathsf{QPL}^{\mathsf{e}}$-теорией $\mathcal{K}$, обозначаемой через $\mathsf{Th}^{\mathsf{e}}(\mathcal{K})$, мы понимаем совокупность всех $\mathsf{QPL}^{\mathsf{e}}$-предложений, истинных во всех пространствах из $\mathcal{K}$; аналогично для QPL.

В доказательствах многих сложностных результатов о кванторных вер. логических системах, принципиальным образом используется операция умножения вероятностей. В качестве типичного примера возьмём следующий результат:

**Теорема (2013)**

Обозначим за $\mathcal{K}_{\mathtt{w}}$ класс всех пространств. Тогда $\mathrm{Th}^{\mathrm{e}}(\mathcal{K}_{\mathtt{w}})$ является $\Pi^1_1$-полной, а $\mathrm{Th}(\mathcal{K}_{\mathtt{w}})$ — $\Pi^1_\infty$-полной.

*Одна из фундаментальных задач — анализ сложности подсистем, в которых отсутствует операция умножения.*

**Пример**

Эл. теория $\langle \mathbb{N}; +, \cdot, = \rangle$ явл. $\Pi^0_\infty$-полной, а $\langle \mathbb{N}; +, = \rangle$ — разрешимой.

Мы будем называть $\mathsf{QPL}^{\mathsf{e}}$-формулу плоской, если каждая её базовая подформула имеет вид

$$\mu(\phi) = \mu(\psi).$$

В случае QPL мы дополнительно разрешаем базовые формулы вида

$$\mu(\phi) \leqslant x,$$

где $x$ — числовая переменная, бегающая по вещ. числам.

**Теорема**

Плоский фрагмент $\mathsf{Th}^{\mathsf{e}}(\mathcal{K}_{\mathtt{w}})$ является $\Pi^1_1$-полным, тогда как плоский фрагмент $\mathsf{Th}(\mathcal{K}_{\mathtt{w}})$ — $\Pi^1_\infty$-полным.

# По поводу исчислений

Будем называть (инфинитарное) исчисление D в языке $\mathsf{QPL}^{\mathsf{e}}$ приемлемым, если для любого плоского $\mathsf{QPL}^{\mathsf{e}}$-предложения $\Phi$,

$$\Phi \text{ выводимо в D} \quad \Longleftrightarrow \quad \Phi \in \mathsf{Th}^{\mathsf{e}}(\mathcal{K}_{\mathtt{w}}).$$

Можно показать, что такие исчисления существуют [ . . . ]

**Следствие**

Пусть D — приемлемое исчисление в языке $\mathsf{QPL}^{\mathsf{e}}$. Тогда замыкающий ординал для D (или точнее, для соответствующего оператора непосредственной выводимости) равен $\omega_1^{\mathsf{CK}}$.

# Некоторые ссылки


- ——— Sharpening complexity results in quantified probability logic. *Logic J. of the IGPL* 33, jzae114, 2025.
- ———, A. Grefenshtein. On the complexity of f.-o. logics of probability. *Izvestiya: Mathematics*. To appear.
- A. Grefenshtein. Infinitary calculus for f.-o. logic of probability with distribution on the domain. *J. Logic and Computation*. To appear.
- ——— Complexity for probability logic with quantifiers over propositions. *J. Logic and Computation* 23, 1035–1055, 2013.
- ——— An ‘elementary’ perspective on reasoning about probability spaces. *Logic J. of the IGPL* 33, jzae042, 2025.