

Модальная логика топологических пространств

Кудинов А.В. (МФТИ, ВШЭ)

25 июня 2025 г.

План

- 1 Топологическое пространство как булева алгебра с оператором.
- 2 Аксиоматика топологического пространства через оператор внутренности.
- 3 Модальные формулы и модальные логики.
- 4 Выразимые топологические свойства.
- 5 Расширение языка и новые результаты

Булева алгебра

Булевой алгеброй (БА) называется алгебраическая система $\mathbb{B} = (B, \wedge, \vee, \neg, 0, 1, =)$, в которой верны следующие аксиомы:

$$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$$

$$a \vee b = b \vee a$$

$$a \vee (a \wedge b) = a$$

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

$$a \vee \neg a = 1$$

$$a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$$

$$a \wedge b = b \wedge a$$

$$a \wedge (a \vee b) = a$$

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

$$a \wedge \neg a = 0$$

Булева алгебра

Булевой алгеброй (БА) называется алгебраическая система $\mathbb{B} = (B, \wedge, \vee, \neg, 0, 1, =)$, в которой верны следующие аксиомы:

$$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$$

$$a \vee b = b \vee a$$

$$a \vee (a \wedge b) = a$$

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

$$a \vee \neg a = 1$$

$$a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$$

$$a \wedge b = b \wedge a$$

$$a \wedge (a \vee b) = a$$

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

$$a \wedge \neg a = 0$$

Примеры:

- $(\mathcal{P}(W), \cap, \cup, -, \emptyset, W)$;
- алгебра Линденбаума — фактор множества булевых формул по отношению эквивалентности формул с логическими операциями и константами $\perp$ (ложь) и $\top$ (истинна).

Булева алгебра

Булевой алгеброй (БА) называется алгебраическая система $\mathbb{B} = (B, \wedge, \vee, \neg, 0, 1, =)$, в которой верны следующие аксиомы:

$$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$$

$$a \vee b = b \vee a$$

$$a \vee (a \wedge b) = a$$

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

$$a \vee \neg a = 1$$

$$a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$$

$$a \wedge b = b \wedge a$$

$$a \wedge (a \vee b) = a$$

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

$$a \wedge \neg a = 0$$

Примеры:

- $(\mathcal{P}(W), \cap, \cup, -, \emptyset, W)$;
- алгебра Линденбаума — фактор множества булевых формул по отношению эквивалентности формул с логическими операциями и константами $\perp$ (ложь) и $\top$ (истинна).

Булева алгебра с оператором — пара $(\mathbb{B}, I)$, где $\mathbb{B}$ — БА и $I : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$ — оператор.

Топологией на непустом множестве W будем называть $T \subseteq \mathcal{P}(W)$, т.ч.:

- ❶ $\emptyset, W \in T$;
- ❷ $U_1, U_2 \in T \Rightarrow U_1 \cap U_2 \in T$;
- ❸ $S \subseteq T \Rightarrow \bigcup S \in T$.

Элементы T называются **открытыми**.

Топологическим пространством называют пару (W, T) .

Оператором **взятия внутренней** будем называть $I_T : \mathcal{P}(W) \rightarrow \mathcal{P}(W)$, определенный следующим образом:

$$I_T(U) = \{x \mid \exists U' \in T (x \in U' \subseteq U)\}.$$

Тогда $(\mathcal{P}(W), I_T)$ — БА с оператором.

Аксиомы Куратовского

Можно определить топологическое пространство, как БА подмножеств с оператором на множестве W .

Аксиомы Куратовского

Можно определить топологическое пространство, как БА подмножеств с оператором на множестве W . Каких свойств достаточно потребовать, чтобы можно было восстановить топологию?

Теорема

Пусть $W \neq \emptyset$ и $I : \mathcal{P}(W) \rightarrow \mathcal{P}(W)$. На W существует топология T , т.ч. $I = I_T$ тогда и только тогда, когда

- ① $I(U_1 \cap U_2) = I(U_1) \cap I(U_2)$;
- ② $I(U) \subseteq U$;
- ③ $I(W) = W$;
- ④ $I(U) = I(I(U))$.

Модальные пропозициональные формулы — булевы формулы с унарным оператором $\Box$:

$$p \mid \perp \mid (A \rightarrow B) \mid (A \wedge B) \mid (A \vee B) \mid \neg A \mid \Box A.$$

Оценка — функция $\theta : PROP \rightarrow \mathcal{P}(W)$. Однозначно продолжается на все модальные формулы:

$$\theta(A \wedge B) = \theta(A) \cap \theta(B)$$

$$\theta(A \vee B) = \theta(A) \cup \theta(B)$$

$$\theta(\neg A) = W - \theta(A)$$

$$\theta(\Box A) = I(\theta(A))$$

Пара $(\mathfrak{X}, \theta)$, где $\mathfrak{X}$ — топологическое пространство, а θ — оценка, называется **(топологической) моделью**. Формула A называется **истинной в модели**, если $\theta(A) = W$.

Формула называется **общезанимой** в пространстве $\mathfrak{X}$, если она истинна в любой модели на $\mathfrak{X}$.

Формула называется **общезначимой**, если она общезначима в любом пространстве.

В модальной логике используют двойственную модальность $\Diamond$ как сокращение $\neg\Box\neg$. Для него будет верно

$$\theta(\Diamond A) = \theta(\neg\Box\neg A) = W - I(W - \theta(A)) = C(\theta(A)),$$

где C — оператор замыкания.

Если мы хотим описать множество общезначимых формул, то можно построить исчисление.

Теорема

1. Следующие формулы общезначимы для произвольных формул A и B :

- $\Box(A \wedge B) \leftrightarrow \Box A \wedge \Box B$;
- $\Box A \rightarrow A$;
- $\Box \top$;
- $\Box A \rightarrow \Box \Box A$.

2. Если $A \leftrightarrow B$ — общезначима, то $\Box A \leftrightarrow \Box B$ — общезначима.

3. Если $A \rightarrow B$ и A — общезначимы, то B — общезначимы.

Вспомним аксиомы Куратовского:

- ① $I(U_1 \cap U_2) = I(U_1) \cap I(U_2)$;
- ② $I(U) \subseteq U$;
- ③ $I(W) = W$;
- ④ $I(U) = I(I(U))$.

Логика S4

Минимальное множество формул, содержащее все тавтологии, формулы

- $\Box(A \wedge B) \leftrightarrow \Box A \wedge \Box B$;
- $\Box A \rightarrow A$;
- $\Box \top$;
- $\Box A \rightarrow \Box \Box A$.

и замкнутое относительно правил $\frac{A \leftrightarrow B}{\Box A \leftrightarrow \Box B}$ (E) и $\frac{A \rightarrow B, A}{B}$ (Modus Ponens) называется S4.

Логика S4

Минимальное множество формул, содержащее все тавтологии, формулы

- $\Box(A \wedge B) \leftrightarrow \Box A \wedge \Box B$;
- $\Box A \rightarrow A$;
- $\Box \top$;
- $\Box A \rightarrow \Box \Box A$.

и замкнутое относительно правил $\frac{A \leftrightarrow B}{\Box A \leftrightarrow \Box B}$ (E) и $\frac{A \rightarrow B, A}{B}$ (Modus Ponens) называется S4.

Теорема (Маккинси и Тарский'1944)

Множество всех общезначимых формул совпадает с S4.

Логика S4

Минимальное множество формул, содержащее все тавтологии, формулы

- $\Box(A \wedge B) \leftrightarrow \Box A \wedge \Box B$;
- $\Box A \rightarrow A$;
- $\Box \top$;
- $\Box A \rightarrow \Box \Box A$.

и замкнутое относительно правил $\frac{A \leftrightarrow B}{\Box A \leftrightarrow \Box B}$ (E) и $\frac{A \rightarrow B, A}{B}$ (Modus Ponens) называется S4.

Теорема (Маккинси и Тарский'1944)

Множество всех общезначимых формул совпадает с S4.

Теорема (Маккинси и Тарский'1944)

Пусть $\mathfrak{X}$ — метризуемое плотное в себе [сепарабельное] топологическое пространство, тогда множество общезначимых формул в пространстве $\mathfrak{X}$ (логика пространств $\mathfrak{X}$) тоже равно S4.

Александровские пространства

Пусть $(W, \leq)$ — квази частичный порядок. Определим топологию $T_{\leq}$:

$$U \in T_{\leq} \iff \forall x \forall y (x \in U \wedge x \leq y \Rightarrow y \in U).$$

Такую топологию называют **александровской**, а пространство $(W, T_{\leq})$ александровским.

Теорема

Логика всех александровских пространств совпадает с **S4**.

Предложение

Любое конечное топологическое пространство является александровским.

Невыразимые свойства

Получается, что язык с одной модальностью очень слабо выразительный. Любое свойство, которое отличает александровские пространства от множества действительных чисел нельзя выразить в этом языке. Примеры невыразимых свойств:

- СВЯЗНОСТЬ
- ПЛОТНОСТЬ В СЕБЕ
- T_0, T_1, T_2 и т.д.
- александровость
- КОМПАКТНОСТЬ
- И Т.Д.

Выразимые свойства

- ❶ $\Diamond \Box A \rightarrow \Box \Diamond A$ соответствует экстремально разрывные пространства (замыкание любого открытого множества открыто);
- ❷ $\Box \Diamond A \rightarrow \Diamond \Box A$ соответствует слабо разреженным (weakly scattered) пространствам (множество изолированных точек всюду плотно);
- ❸ $\Box(\Box(A \rightarrow \Box A) \rightarrow A) \rightarrow A$ соответствует разреженным (scattered) пространствам (любое подмножество содержит изолированную точку).
- ❹ $\Box \Diamond \Box A \rightarrow (A \rightarrow \Box A)$ соответствует тому что нигде не плотные подмножества замкнуты (nodense spaces)
- ❺ $A \rightarrow \Box(\Diamond A \rightarrow A)$ соответствует тому, что любое плотное подмножество открыто (submaximal space).

Сложность проблемы выводимости

Теорема

Логика **S4** является разрешимой и принадлежит классу PSPACE.

Отношение истинности

Удобно ввести отношение истинности. Для пространства $\mathfrak{X}$, оценки θ , точки $x \in \mathfrak{X}$ и формулы A определим

$$\mathfrak{X}, \theta, x \models A \iff x \in \theta(A).$$

Лемма

- ① $\mathfrak{X}, \theta, x \models p \iff x \in \theta(p);$
- ② $\mathfrak{X}, \theta, x \models A \wedge B \iff \mathfrak{X}, \theta, x \models A \text{ и } \mathfrak{X}, \theta, x \models B;$
- ③ $\mathfrak{X}, \theta, x \models A \vee B \iff \mathfrak{X}, \theta, x \models A \text{ или } \mathfrak{X}, \theta, x \models B;$
- ④ $\mathfrak{X}, \theta, x \models \neg A \iff \mathfrak{X}, \theta, x \not\models A;$
- ⑤ $\mathfrak{X}, \theta, x \models \Box A \iff \exists U \in T(\forall y \in U(\mathfrak{X}, \theta, y \models A)).$

Дополнительные модальности

Рассмотрим язык с двумя дополнительными модальностями $[\forall]$ и $[\neq]$ Их истинность будет определяться так:

$$\begin{aligned}\mathfrak{X}, \theta, x \models [\forall]A &\iff \forall y \in \mathfrak{X}(\mathfrak{X}, \theta, y \models A) \\ \mathfrak{X}, \theta, x \models [\neq]A &\iff \forall y \in \mathfrak{X}(x \neq y \Rightarrow \mathfrak{X}, \theta, y \models A)\end{aligned}$$

Можно будет выразить новые свойства:

- $[\forall](\Box A \vee \Box \neg A) \rightarrow [\forall]A \vee [\forall]\neg A$ — связность;
- $[\neq]A \rightarrow \Diamond A$ — плотность в себе (нет изолированных точек);
- $[\neq]A \rightarrow [\neq]\Box A$ — T_1 пространство
- $(A \wedge [\neq]\neg A \wedge \langle \neq \rangle(B \wedge [\neq]\neg B)) \rightarrow (\Box \neg B \vee \langle \neq \rangle(B \wedge \Box \neg A))$ — T_0 пространство.

Сравнительно новый результат

Топологическое пространство называется **дверным**, если любое подмножество либо открыто, либо замкнуто.

Теорема (Козичев (магистрская работа)'2024)

Формула $(A \wedge B \wedge \Diamond(\neg A \wedge C)) \rightarrow \neg\langle\exists\rangle(D \wedge \neg B \wedge \Diamond(\neg D \wedge \neg C))$ соответствует дверным пространствам.