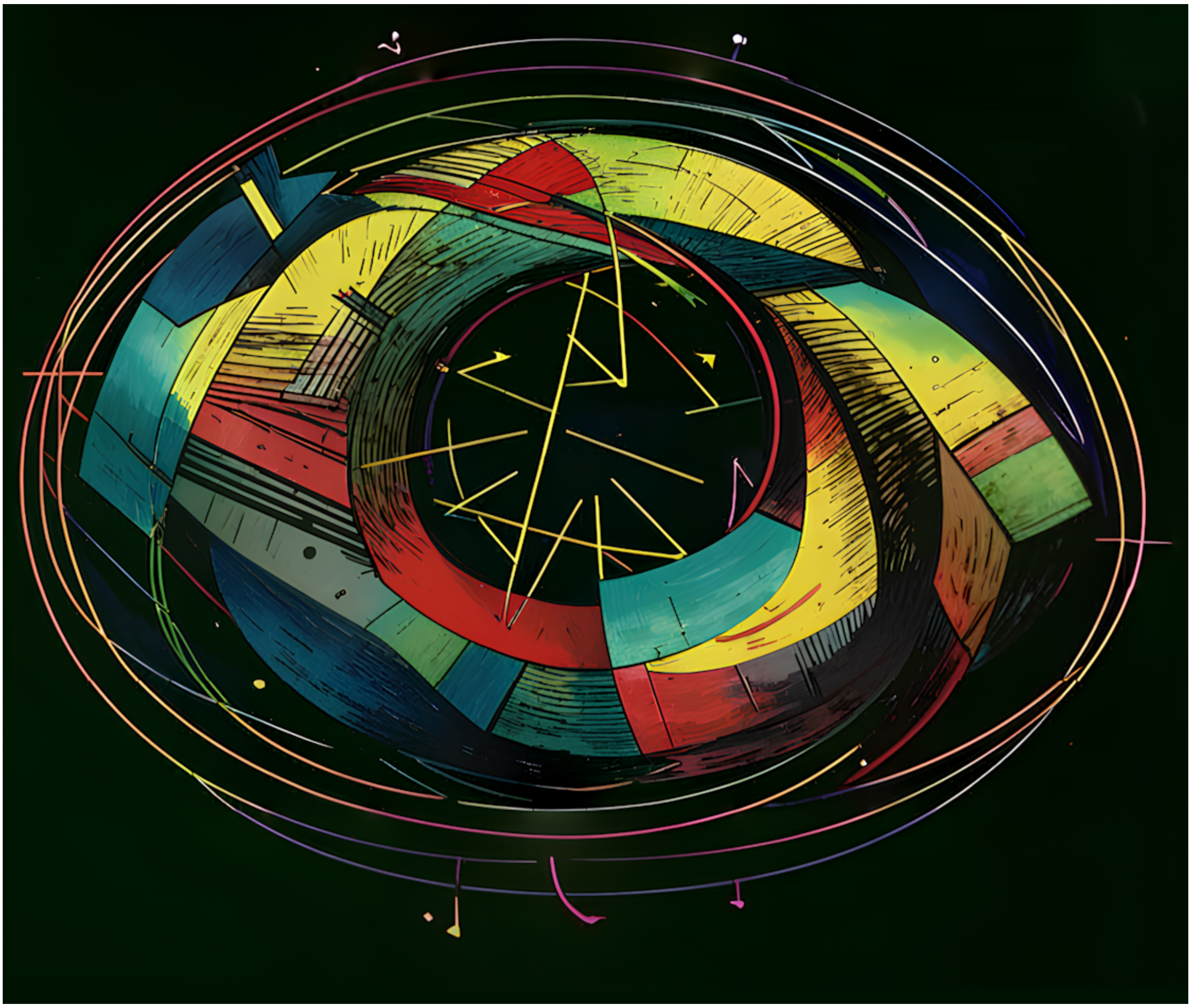
НИУ ВШЭ, ФКН
Международная лаборатория
алгебраической топологии и её приложений

International conference and school "Algebraic topology, geometry, combinatorics and data analysis"



August 11-15, 2025, Pushkin, Saint Petersburg

Международная конференция (11-13 августа) и школа (14-15 августа) “Алгебраическая топология, геометрия, комбинаторика и анализ данных” Международной лаборатории алгебраической топологии и её приложений пройдут в Кочубей-центре НИУ ВШЭ (г. Пушкин, Санкт-Петербург).

Тематика конференции и школы традиционно затрагивает взаимодействие алгебраической топологии и комбинаторики, а также их связи с актуальными вопросами гиперболической геометрии, комбинаторной алгебры, топологического анализа данных.

Сайт:

.

https://cs.hse.ru/ata-lab/atgcda25/

Содержание

1. Plenary talks (August 11-13) 3
Mikiya Masuda. Symmetric matrices defined by plane vector sequences 3
А. А. Айзенберг. Неравенства типа Морса для сложности вычисления когомологий пучков 3
В. М. Бухштабер. Toric topology of the complex Grassmann manifolds $G_{n,2}$ 4
А. Ю. Веснин. The Vol-Det Conjecture for highly twisted links 5
Н. Ю. Ероховец. Геометрические гиперэллиптические многообразия и гамильтоновы подкомплексы в прямоугольных многогранниках. 6
Г. Ю. Панина. Новое доказательство теоремы Милнора-Вуда 6
Ф. В. Петров. TBA 6
Svjetlana Terzić. Smooth manifolds in $G_{n,2}$ defined by symplectic reduction of T^n-action 7
Г. С. Черных. Жёсткость родов Хирцебруха 7

2. Lectures (August 14-15) 8
Mikiya Masuda. Modular law for Hessenberg functions 8
В. М. Бухштабер. Матричная алгебра в теории и приложениях n-значных групп . 8
А. Ю. Веснин. Порядки на группах трехмерных многообразий 9
Т. Е. Панов. Экспоненциальные действия и комплексные структуры на момент–угол-многообразиях 9

3. Short messages (August 11-15) 10
Р. К. Алиев. 3-алгебры, инварианты многообразий, и уравнение пятиугольника . 10
Е. С. Безродная. TBA 10
Я. А. Верёвкин. Коммутант присоединённой алгебры Ли прямоугольной группы Кокстера 10
Ф. Е. Вылегжанин. Гипотеза Аника для момент–угол-комплексов 10
В. А. Ковыршина. Момент–угол-многообразия, гомотопически эквивалентные связным суммам произведений сфер 11
А. Д. Малько. Simplification of finite spaces equipped with sheaves 11
М. Р. Ретинский. RTD и т.д. 11
А. А. Семидетнов. Плюс-конструкция и симплициальные методы 12
М. А. Сергеев. Теория Морса многообразий, определяемых стандартным действием торов T^n на комплексных многообразиях Грассмана $G_{n,2}$ 12
В. А. Триль. Комплекс пермутоэдра и дополнения конфигураций диагональных подпространств 13
А. А. Фокин. Hyperbolic geometry-based modifications in GPT 13

1. Plenary talks (August 11-13)

Symmetric matrices defined by plane vector sequences

Mikiya Masuda (Osaka University)

Motivated by the work of Fu–So–Song [1], we associate a symmetric matrix A to a plane vector sequence v and give a formula to find the signature of A in terms of the sequence v. When A is nonsingular, A^{-1} is a tridiagonal matrix and one can interpret the relation between A and A^{-1} from a topological viewpoint. Indeed, an omnioriented quasitoric orbifold X of real dimension four is associated to the sequence v and A^{-1} is the intersection matrix of the characteristic suborbifolds of X.

References

[1] X. Fu, T. So, and J. Song, *Cohomology bases of toric surfaces*, Topology and its Applications, 369 (2025), 109392. arxiv:2412.15868

[2] G. Lusztig and J. Tits, *The inverse of a Cartan matrix*, An. Univ. Timişoara Ser. Ştiinţ. Mat. 30 (1992), no. 1, 17–23.

[3] M. Masuda, *Symmetric matrices defined by plane vector sequences*, arXiv:2503.06836.

Неравенства типа Морса для сложности вычисления когомологий пучков

А. А. Айзенберг (Noeon Research)

Пучок векторных пространств на конечном топологическом пространстве — это (почти) то же самое, что диаграмма векторных пространств на конечном частично упорядоченном множестве. Глобальные сечения пучка — это обратный категорный предел диаграммы. Когомологии — это производные функторы функтора глобальных сечений. Можно ли когомологии конечного пучка, т.е. диаграммы конечномерных пространств на конечном чуме, вычислить алгоритмически?

Ответ: да, с помощью симплициальной резольвенты (она же стандартная резольвента, она же комплекс Руса, она же бар-конструкция). Задача сводится к симплициальным комплексам, по сути к порядковому комплексу чума. Но это большой симплициальный комплекс, у него большая матрица дифференциала, компьютеру от этого больно. Известно, что в некоторых случаях вычисления когомологий сильно упрощаются. Если чум — это чум клеток регулярного клеточного комплекса, то рецепт вычисления когомологий описан в любой книге про алгебраической топологии, в разделе про когомологии с коэффициентами в локальной системе. Эффективность топологического анализа данных во многом основана на существовании быстрого алгоритма вычисления когомологий пучков на клеточных структурах.

Мы даем оценку сложности вычисления когомологий пучков на любом конечном чуме, и предлагаем алгоритм минимальной сложности. В общем случае он быстрее, чем симплициальная резольвента, а на классе клеточных комплексов превращается в классический топологический алгоритм. Если позволит время, обсудим, зачем это может быть нужно, например, в торической топологии.

Доклад основан на совместной работе с Гебхартом, Магаем и Соломадиным (arXiv:2502.15476).

Toric topology of the complex Grassmann manifolds $G_{n,2}$

В. М. Бухштабер (МГУ, МИАН)

(Based on joint works with Svjetlana Terzić.)

The talk is devoted to toric topology of positive complexity in the framework of our theory of (2n,k)-manifolds.

The main goal is to show the methods of toric topology, algebraic geometry and singularity theory that were developed in the study of the effective T^k-actions on the smooth compact manifolds M^{2n}. The complexity of such actions is $d = n - k > 0$.

The key examples are $G_{n,2}$, $n \geqslant 4$, complex algebaric manifolds of complex dimension $2(n-2)$ with canonical T^n-action. This action induces effective T^{n-1}-action on $G_{n,2}$ of complexity $d = 2(n-2) - (n-1) = n-3$.

We relate the theory of moduli spaces $\overline{\mathcal{M}}_{0,\mathcal{A}}$ of stable weighted curves of genus 0 to the equivariant topology of complex Grassmann manifolds $G_{n,2}$, with the canonical action of the compact torus T^n. We prove that all spaces $\overline{\mathcal{M}}_{0,\mathcal{A}}$ can be isomorphically or up to birational morphisms embedded in $G_{n,2}/T^n$. The crucial role for proving this result play the chamber decomposition of the hypersimplex $\Delta_{n,2}$ which corresponds to $(\mathbb{C}^*)^n$-stratification of $G_{n,2}$ and the spaces of parameters over the chambers, which are subspaces in $G_{n,2}/T^n$. We show that the points of these moduli spaces $\overline{\mathcal{M}}_{0,\mathcal{A}}$ have the geometric realization as the points of the spaces of parameters over the chambers. The images of the moduli spaces are the spaces of parameters of the chambers. We single out the characteristic categories among such moduli spaces. The morphisms in these categories correspond to the natural projections between the universal space of parameters and the spaces of parameters over the chambers. As a corollary, we obtain the realization of the orbit space $G_{n,2}/T^n$ as an universal object for the introduced categories. As one of our main results we describe the structure of the canonical projection from the Deligne–Mumford compactification to the Losev–Manin compactification of $\mathcal{M}_{0,n}$, using the embedding of $\mathcal{M}_{0,n} \subset \bar{L}_{0,n,2}$ in $(\mathbb{C}P^1)^N$, $N = \binom{n-2}{2}$, the action of the algebraic torus $(\mathbb{C}^*)^{n-3}$ on $(\mathbb{C}P^1)^N$ for which $\bar{L}_{0,n,2}$ is invariant, and the realization of the Losev–Manin compactification as the corresponding permutohedral toric variety.

References

[1] Victor M. Buchstaber, Svjetlana Terzić, "Moduli spaces of weighted pointed stable curves and toric topology of Grassmann manifolds", J. Geom. Phys., 215 (2025), 105533 , 26 pp.

[2] Victor M. Buchstaber, Svjetlana Terzić, "Compact torus action on the complex Grassmann manifolds", Toric Topology and Polyhedral Products, Fields Inst. Commun., 89, Springer, Cham, 2024, 81–105.

The Vol-Det Conjecture for highly twisted links

А. Ю. Веснин (ИМ СО РАН)

For a hyperbolic link $K \subset S^3$ we denote the volume of the 3-manifold $S^3 \setminus K$ by $\mathrm{vol}(K)$ and the determinant of K by $\det(K)$. Champanerkar, Kofman and Purcell formulated the following Vol-Det Conjecture in 2016.

Conjecture [1] Let K be an alternating hyperbolic link. Then

$$\mathrm{vol}(K) < 2\pi \cdot \log \det(K).$$

It is known that the constant 2π in the conjecture is accurate. The conjecture holds for all knots with at most 16 crossings, 2-bridge links and closures of 3-strand braids, see [1,2].

Let us denote $v_{\mathrm{tet}} = 3\Lambda(\pi/3)$, where

$$\Lambda(\theta) = -\int_0^\theta \ln|2\sin(t)|dt$$

is the Lobachevsky function, and $\xi = \exp\left(\frac{5v_{\mathrm{tet}}}{\pi}\right)$. Let γ be a number such that $1/\gamma$ is the positive real root of the equation $x^3(x+1)^2 = 1$.

Theorem 1 [3] Let K be an alternating hyperbolic link having a reduced alternating diagram D with $t(D) > 8$ twists and $c(D)$ crossings. If

$$c(D) \geq t(D) + \xi^{t(D)-1.4} - 2\gamma^{t(D)-1}$$

then the Vol-Det Conjecture holds for K.

Theorem 2 [3] Let K be a nontrivial nonsplit alternating link having a reduced alternating diagram D with $t(D) > 8$ twists. Then the following inequality holds

$$\mathrm{vol}(K) \leq \frac{10\, v_{\mathrm{tet}}}{\log \gamma} \cdot \log \det(K) - \left(\frac{10\, v_{\mathrm{tet}} \log 2}{\log \gamma} + 4v_{\mathrm{tet}}\right).$$

Theorem 1 improves Burton's result from [2] and Theorem 2 improves Stoimenov's result from [4] in the case of highly twisted links.

References

[1] A. Champanerkar, I. Kofman, J. S. Purcell, *Geometrically and diagrammatically maximal knots.* Journal of the London Mathematical Society **94:3** (2016), 883-908.

[2] S. D. Burton, *The determinant and volume of 2-bridge links and alternating 3-braids.* New York Journal of Mathematics **24** (2018), 293-316.

[3] A. Egorov, A. Vesnin, *The Vol-Det Conjecture for highly twisted alternating links.* Preprint arXiv:2411.11711v2 (2024),10 p.

[4] A. Stoimenow, *Graphs, determinants of knots and hyperbolic volume.* Pacific Journal of Mathematics **232:2** (2007), 423-451.

Геометрические гиперэллиптические многообразия и гамильтоновы подкомплексы в прямоугольных многогранниках.

Н. Ю. Ероховец (ВШЭ, МГУ)

Многообразие M^n называется *гиперэллиптическим*, если на нём существует гиперэллиптическая инволюция, то есть инволюция с пространством орбит $\mathbb{S}^n$. Пользуясь понятиями гамильтоновых цикла, тэта-подграфа и K_4-подграфа в трёхмерном прямоугольном многограннике, А. Д. Медных и А. Ю. Веснин построили примеры трёхмерных гиперэллиптических многообразий в геометриях $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{S}^3$, $\mathbb{L}^3$, $\mathbb{L}^2 \times \mathbb{R}$ и $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$.

Мы обобщаем эту конструкция на n-мерный случай: вводим понятие гамильтонова $C(n,k)$-подкомплекса в границе простого n-мерного многогранника с m гипергранями и показываем, что каждый такой подкомплекс Γ отвечает некоторой подгруппе ранга $m-k-1$ в $\mathbb{Z}_2^m$, свободно действующей на вещественном момент–угол многобразии $\mathbb{R}\mathcal{Z}_P$, пространство орбит $N(P,\Gamma)$ которой является многообразием, склеенным из 2^{k+1} копий многогранника. На $N(P,\Gamma)$ действует группа $\mathbb{Z}_2^{k+1}$, и в ней есть гиперэллиптическая инволюция. Мы исследуем, для каких n-мерных геометрий, являющихся произведениями Евклидовых пространств $\mathbb{R}^k$, сфер $\mathbb{S}^\ell$ и пространств Лобачевского $\mathbb{L}^r$, существует прямоугольный многогранник с гамильтоновым $C(n,k)$-подкомплексом, а в случай размерности $n=4$ даём полный ответ на этот вопрос.

Новое доказательство теоремы Милнора-Вуда

Г. Ю. Панина (ПОМИ)

TBA

TBA

Ф. В. Петров (ПОМИ)

TBA

Smooth manifolds in $G_{n,2}$ defined by symplectic reduction of T^n-action

Svjetlana Terzić (Montenegro University)

The complex Grassmann manifolds $G_{n,2}$ are of specific mathematical interest as the canonical actions of an algebraic torus $(\mathbb{C}^*)^n$ as well as the compact torus T^n on these manifolds are closely related to many important problems. Many structures on $G_{n,2}$ can be assigned to these torus actions. There is the standard moment map $\mu : G_{n,2} \to \Delta_{n,2}$ for the hypersimplex $\Delta_{n,2} \subset \mathbb{R}^n$. A regular value, in the classical sense, of the map μ is known [1] to be a point $x \in \Delta_{n,2}$ such that the stabilizer of any $y \in \mu^{-1}(x)$, for the T^n-action on $G_{n,2}$, is the diagonal circle S^1. The preimage $\mu^{-1}(x) \subset G_{n,2}$ is a smooth submanifold and the orbit space $\mu^{-1}(x)/T^n$ is a symplectic manifold, known as a symplectic reduction for the given T^n-action.

The polytopes assigned to the strata on $G_{n,2}$ defined by the $(\mathbb{C}^*)^n$-action, give the chamber decomposition of $\Delta_{n,2}$. It is proved that for any chamber C_ω of maximal dimension $(n-1)$ all preimages $\mu^{-1}(x)$, $x \in C_\omega$ are diffeomorphic leading to the smooth manifold $F_\omega \subset G_{n,2}/T^n$, [5], [1].

In this talk we discuss our recent results [3] related to the problem of description of smooth manifolds $\mu^{-1}(x)$ for the Grassmannians $G_{n,2}$. We study in detail the Grassmann manifold $G_{4,2}$ and prove that $\mu^{-1}(x) \cong S^3 \times T^2$ for any regular value $x \in \Delta_{4,2}$.

In addition, any of these smooth manifolds F_ω is a moduli space of weighted pointed stable genus zero curves, [2], [4]. In this context, we prove that the Deligne-Mumford spaces $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$ and Losev-Manin spaces $\bar{L}_{0,n}$ are discussed symplectic reductions only for $n = 4, 5$.

The talk is based on the joint work with Victor M. Buchstaber.

References

[1] Victor M. Buchtaber, Svjetlana Terzić, *Resolution of Singularities of the Orbit Spaces $G_{n,2}/T^n$*, Trudy Mat. Inst. Steklova, **3**17 (2022), 27–63.

[2] Victor M. Buchtaber, Svjetlana Terzić, *Moduli spaces of weighted pointed stable curves and toric topology of Grassmann manifolds*, Journal of Geometry and Physics, Volume 215, September 2025, 105533.

[3] Victor M. Buchstaber, Svjetlana Terzić, *Smooth manifolds in $G_{n,2}$ and $\mathbb{C}P^N$ defined by symplectic reductions of T^n-action*, preprint, 2025.

[4] Brendan Hassett, *Moduli spaces of weighted pointed stable curves*, Advan. in Math. **1**73, Iss. 2, (2003), 316-352.

[5] Marc Goresky, Robert MacPherson, *On the topology of algebraic torus actions*, Algebraic Groups, Proc. Symp., Utrecht/Neth., 1986, Lecture Notes in Math. 1271, 73–90 (1987).

Жёсткость родов Хирцебруха

Г. С. Черных (ВШЭ, МИАН)

Род Хирцебруха — это просто кольцевой гомоморфизм из кольца кобордизмов, то есть, сопоставление некоторого значения каждому замкнутому многообразию так, чтобы дизъюнктному объединению соответствовала сумма, декартову произведению — произведение, а границе многообразия с краем — ноль. Любой такой род можно естественным образом расширить на многообразия с действием какой-нибудь группы Ли G. При этом важным свойством такого расширения является его жёсткость на некотором конкретном G-многообразии M. Например, это свойство связано с тем, что род принимает значение-произведение не только на декартовых произведениях многообразий, но и на “расслоенных произведениях” со слоем M. Я расскажу про жёсткость родов на разных многообразиях и о том, какие выводы можно сделать из этих их свойств (например, иногда жёсткость на некоторых многообразиях сильно ограничивает вид рода и влечёт жёсткость на гораздо большем классе многообразий).

2. Lectures (August 14-15)

Modular law for Hessenberg functions

Mikiya Masuda (Osaka University)

A Hessenberg function h is a function from $[n]$ (the set of integers from 1 through n) to itself satisfying two conditions:

$$h(j) \geq j \quad (\forall j \in [n]), \qquad h(1) \leq h(2) \leq \cdots \leq h(n).$$

One can associate a graph G_h to a Hessenberg function h, so (graded) chromatic symmetric functions $\mathrm{csf}_q(G_h)$ are defined for them. They satisfy what is called the *modular law*. We can think of the modular law as an analog of the deletion-contraction property of the chromatic polynomials. One the other hand, regular semisimple Hessenberg functions are associated to Hessenberg functions. Their cohomology rings become modules over the symmetric group $\mathfrak{S}_n$ and they also satisfy the modular law ([6], [5]). This together with Abreu–Nigro [1] implies Brosnan–Chow (and Guay-Paquet) Theorem ([3], [4]) that these two objects are equivalent. I will talk about this story. I will also explain that there is a similar story between unicellular LLT polynomials and the twin of regular semisimple Hessenberg varieties introduced by Ayzenberg–Buchstaber [2].

References

[1] A. Abreu and A. Nigro, *Chromatic symmetric functions from the modular law*, J. Combin. Theory Ser. A 180 (2021), Paper No. 105407, 30.

[2] A. Ayzenberg and V. Buchstaber, *Manifolds of isospectral matrices and Hessenberg varieties*, Int. Math. Res. Not. IMRN (2021), no. 21, 16671–16692.

[3] P. Brosnan and T. Y. Chow, *Unit interval orders and the dot action on the cohomology of regular semisimple Hessenberg varieties*, Adv. Math. 329 (2018), 955—1001, https://doi.org/10.1016/j.aim.2018.02.020.

[4] M. Guay-Paquet, *A second proof of the Shareshian-Wachs conjecture, by way of a new Hopf algebra*, 2016, https://arxiv.org/abs/1601.05498.

[5] T. Horiguchi, M. Masuda, and T. Sato, *Modular law through GKM theory*, Vol. 7, issue 5 (2024), 1433–1451. https://doi.org/10.5802/alco.380

[6] Y-H Kim and D. Lee, *Birational geometry of generalized Hessenberg varieties and the generalized Shareshian-Wachs conjecture*, J. Combin. Theory Ser. A 206 (2024), Paper No. 105884, 45.

Матричная алгебра в теории и приложениях n-значных групп

В. М. Бухштабер (МГУ, МИАН)

Лекции посвящены современному состоянию теории n-значных групп, в которых каждой паре точек $(x,y) \in X \times X$ сопоставляется n-мультимножество $x * y \subset X$, т.е. неупорядоченное множество из n точек, возможно с повторениями.

В первой лекции будут представлены определения, конструкции и результаты, которые легли в основу теории n-значных групп. Вторая лекция посвящена результатам матричной алгебры, которые в нашей недавней работе с М. И. Корневым привели к решению задачи о структуре целочисленных полиномов, задающих n-значное сложение в поле комплексных чисел $\mathbb{C}$.

Мы обсудим фундаментальные результаты, которые получили приложения в теории n-значных групп, и покажем, что это привело к новым плодотворным связям разных разделов математики.

Порядки на группах трехмерных многообразий

А. Ю. Веснин (ИМ СО РАН)

Группа называется упорядоченной если на множестве ее элементов можно ввести порядок, согласованный с групповым умножением. Упорядоченность групп трехмерных многообразий тесно связана с их топологическими свойствами. Гипотеза Мотеги и Терагаито состоит в том, что фундаментальная группа трехмерного многообразия би-упорядочена если и только если группа содержит обобщенное кручение. Мы обсудим результаты об упорядоченности групп узлов и групп трехмерных многообразий, которые представимы как циклические накрытия трехмерной сферы с ветвлением вдоль узлов и зацеплений. В частности, будут рассмотрены группы многообразия Викса – Матвеева – Фоменко и многообразий Фибоначчи.

Экспоненциальные действия и комплексные структуры на момент–угол-многообразиях

Т. Е. Панов (ВШЭ, МГУ)

Торическая геометрия и топология предоставляют большое количество примеров многообразий с «нестандартными» комплексными структурами, т.е. не кэлеровыми и даже не мойшезоновыми. Одним из основных классов таких примеров являются момент–угол-многообразия. Комплексная структура на момент–угол-многообразии $\mathcal{Z}$ определяется набором комбинаторных геометрических данных, включающий полный симплициальный (но не обязательно рациональный) веер. Примерами комплексных момент–угол-многообразий являются многообразия Хопфа и Калаби-Экмана, а также их деформации. В случае рациональных вееров многообразие $\mathcal{Z}$ является тотальным пространством голоморфного расслоения над торическим многообразием со слоем - компактным комплексным тором. В этом случае инварианты комплексной структуры на $\mathcal{Z}$, такие как когомологии Дольбо и числа Ходжа, могут быть описаны с помощью спектральной последовательности Бореля голоморфного расслоения. В общем случае слои голоморфного расслоения «размыкаются» и расслоение превращается в каноническое голоморфное слоение на комплексном момент–угол-многообразии $\mathcal{Z}$, эквивариантное относительно действия алгебраического тора. Пара $(\mathcal{Z},\mathcal{F})$ многообразия и голоморфного слоения является моделью для иррациональных торических многообразий. В общем положении комплексное момент–угол-многообразие $\mathcal{Z}$ имеет лишь конечное число комплексных подмногообразий положительной размерности, так что на таком комплексном многообразии не существует непостоянных мероморфных функций, а его алгебраическая размерность равна нулю.

Конструкция и классификация комплексных многообразий с действием тора основана на понятии экспоненциального действия, задаваемого конфигурацией векторов. Экпоненциальные действия объединяют многие конструкции голоморфной динамики, некэлеровой комплексной геометрии, торической геометрии и топологии. К ним относятся пространства листов голоморфных слоений, пересечения вещественных и эрмитовых квадрик, фактор-конструкция торических многообразий, LVM- и LVMB-многообразия, комплексно-аналитические структуры на момент–угол-многообразиях и их частичные факторы. Во всех случаях геометрия и топология соответствующего фактор-объекта могут быть описаны комбинаторными данными, включающих пару двойственных по Гейлу конфигураций векторов.

3. Short messages (August 11-15)

3-алгебры, инварианты многообразий, и уравнение пятиугольника

Р. К. Алиев (МГУ)

В статье Р.Лоуренс “Алгебры и треугольные соотношения” были рассмотрены 3-алгебры, определяющие по триангуляции инвариант ориентированных 3-многообразии с границей. Оказывается, можно ввести аналог согласованности по Фробениусу в 3-алгебре, а с ним и понятие фробениусовой 3-алгебры. Вместе с этим появляется конструктивный способ построения полной 3-алгебры. Также можно из матриц-проекторов и 3-алгебр построить решения уравнения пятиугольника. Кроме того, я покажу нетривиальность инварианта, основанного на 3-алгебрах.

TBA

Е. С. Безродная (ВШЭ)

TBA

Коммутант присоединённой алгебры Ли прямоугольной группы Кокстера

Я. А. Верёвкин (ВШЭ)

TBA

Гипотеза Аника для момент–угол-комплексов

Ф. Е. Вылегжанин (ВШЭ, МИАН)

Пусть $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ — момент–угол-комплекс, соответствующий симплициальному комплексу $\mathcal{K}$. Мы доказываем, что после локализации вне конечного числа простых чисел верно: пространство петель $\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ гомотопически эквивалентно произведению пространств петель на сферах. Это подтверждает *гипотезу Аника* (о p-локальных разложениях пространств петель) в случае момент–угол-комплексов и их частичных факторов. Доказательство основано на p-локальном аналоге теоремы Милнора–Мура (Аник) и результатах о структуре Ext-алгебр для колец Стэнли–Райнснера (Бакелин–Роос, Берглунд).

При $p \gg 0$ мы также выражаем p-примарную компоненту групп $\pi_*(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ в терминах алгоритмически вычислимых *многочленов Бакелина–Берглунда* $b_{\mathcal{K}_J,\mathbb{Q}}(t)$ и гомотопических групп сфер. По совместной работе с Льюисом Стэнтоном (arXiv:2506.15573).

Момент–угол-комплексы, гомотопически эквивалентные связным суммам произведений сфер

В. А. Ковыршина (ВШЭ, МГУ)

В своём докладе я расскажу о классе момент–угол-многообразий, являющихся связными суммами произведений сфер (класс таких пространств обозначим $\mathcal{M}$). Интересна как прямая, так и обратная задачи:

- какие момент–угол-многообразия лежат в $\mathcal{M}$,
- какие связные суммы произведений сфер могут быть момент–угол-многообразиями.

Я освещу эти вопросы и постараюсь рассказать про два следующих аспекта:

1) как можно доказывать принадлежность к $\mathcal{M}$ с точки зрения гомотопической эквивалентности и диффеоморфности;
2) как можно конструировать примеры многогранников $\mathcal{K}$ таких, что $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ принадлежит $\mathcal{M}$ или имеет соответствующее кольцо когомологий.

Simplification of finite spaces equipped with sheaves

А. Д. Малько (ВШЭ)

The classical results of Stong have established a foundational framework for the analysis of finite topological spaces through the identification and elimination of beat points, leading to the concept of a *core*. This talk begins with an overview of these seminal contributions and their implications for the simplification and homotopy classification of finite posets. Following the classical results of Stong, a cohomological analogue of a core for finite sheaved topological spaces is introduced, and an algorithm for simplification in this category is proposed. In particular, the notion of beat vertices is generalized, and it is demonstrated that if a vertex of a sheaved space has a topologically acyclic downset (with trivial coefficients), then its removal preserves the sheaf cohomology.

RTD и т.д.

М. Р. Ретинский (ВШЭ)

Проблема выбора оптимального представления данных (вложения в метрическое пространство) является ключевой в анализе данных, машинном обучении и смежных областях. Традиционные методы сравнения представлений основаны на статистических подходах, которые обладают рядом ограничений, связанных с предположениями о распределении данных и их природе.

В докладе рассматривается топологический подход к оценке качества представлений данных — Representation Topology Divergence, и вариации на тему. Подобные методы позволяют оценивать различия между представлениями, анализируя их топологическую структуру, и не требуют запуска самих алгоритмов анализа данных.

Экспериментальные результаты демонстрируют высокую эффективность: корреляция RTD с итоговым качеством моделей доходит до впечатляющих 98%.

Обсудим теоретические основания предложенных методов, их эффективность, и преимущества по сравнению с вероятностными подходами.

Плюс-конструкция и симплициальные методы

А. А. Семидетнов (СПбГУ)

Рассмотрим дискретную группу G с фиксированной совершенной нормальной подгруппой. Ей можно сопоставить пространство $(BG)^+$, получаемое при помощи плюс-конструкции Квиллена. Согласно теореме Кана–Тёрстона, любой связный гомотопический тип можно реализовать в таком виде. Хотя сама теорема не даёт конкретных приложений, она предлагает полезную точку зрения: исследование гомотопических пространств можно свести к изучению соответствующих дискретных групп.

Эта идея хорошо проявляется в ряде глубоких результатов — таких как Баратта-Придди-Квиллена, Коэна-Сигала, Галатиуса, Мадсена-Вайса, и других — где описаны гомотопические типы пространств $(BG_\infty)^+$ для систем групп $G_n = \Sigma_{n+1}, B_{n+1}, \mathrm{Aut}(F_n), GL_n(K)$ и т.п. Эти результаты можно воспринимать как конкретные реализации «принципа Кан–Тёрстона», хотя доказательства основаны на независимых техниках.

Существующие методы работы с такими объектами не применимы к другим интересным классам групп, например, к семейству гомотопических кос $G_n = hB_{n+1}$, для которых пространство $(BhB_\infty)^+$ не изучено.

В своём докладе я расскажу о том, как техника скрещенных симплициальных групп (см. [1]), разработанная Лодэем и Фидеровичем, может быть применена к исследованию таких пространств, как $(BhB_\infty)^+, (B\Sigma_\infty)^+, (BB_\infty)^+$ и других им подобных.

References

[1] Zbigniew Fiedorowicz and Jean-Louis Loday, Crossed simplicial groups and their associated homology. Translated of the American Mathematical Society, 326(1):57-87, 1991.

Теория Морса многообразий, определяемых стандартным действием торов T^n на комплексных многообразиях Грассмана $G_{n,2}$

М. А. Сергеев (ВШЭ)

Стандартное действие тора T^n на многообразии Грассмана $G_{n,2}$ является гамильтоновым. Используя координаты Плюккера, можно получить T^n-эквивариантное вложение $G_{n,2}$ в $\mathbb{C}P^N$ для $N = \binom{n}{2} - 1$ с гамильтоновым действием заданным через вторую симметрическую степень представления $T^n \to T^N$ со стандартным T^N-действием. Пусть $\mu\colon G_{n,2} \to \Delta_{n,2} \subset \mathbb{R}^n$ и $\widetilde{\mu}\colon \mathbb{C}P^N \to \Delta_{n,2} \subset \mathbb{R}^n$ — соответствующие отображения моментов. Уровни $M_x = \mu^{-1}(x)$ и $\widetilde{M}_y = \widetilde{\mu}^{-1}(y)$ являются гладкими компактными подмногообразиями $G_{n,2}$ и $\mathbb{C}P^N$, если x,y — регулярные значения этих отображений соответственно, а факторы $M_x/T^n, \widetilde{M}_y/T^n$ являются симплектическими многообразиями и известны как симплектическая редукция.

Данное сообщение будет посвящено построению теории Морса на уровнях M_x и $\widetilde{M}_y$, используя описание эквивариантной топологии многообразия Грассмана $G_{n,2}$ относительно стандартного действия T^n данное в недавних работах В.М. Бухштабера и С. Терзич. А именно, в случае $n = 4$ будут явно предъявлены функции Морса на M_x и $\widetilde{M}_y$. Для $n > 4$ будет дан метод построения функций Морса на M_x и $\widetilde{M}_y$, использующий разбиение гиперсимплекса $\Delta_{n,2}$ на камеры. Докладчик надеется, что с помощью этого подхода можно вычислить когомологии уровней для случаев $n = 5{,}6$.

Комплекс пермутоэдра и дополнения конфигураций диагональных подпространств

В. А. Триль (ВШЭ)

(Доклад основан на совместной работе с Т. Е. Пановым.)

Каждому симплициальному комплексу $\mathcal{K}$ на m вершинах можно сопоставить конфигурации подпространств в $\mathbb{R}^m$ двух типов. Первый из них — это конфигурации координатных подпространств. Из работ Бухштабера–Панова известно, что дополнение любой такой конфигурации гомотопически эквивалентно вещественному момент–угол-комплексу, основному объекту изучения торической топологии.

Другой тип конфигураций — это конфигурации диагональных подпространств, которым посвящен настоящий доклад. Будет введен специальный комплекс граней пермутоэдра $\mathrm{Perm}(\mathcal{K})$, гомотопически эквивалентный дополнению диагональной конфигурации, и описаны его когомологии. Умножение в кольце когомологий вычислено с использованием клеточной аппроксимации диагонали в пермутоэдре, построенной Санеблидзе–Умбле. Также будет установлена взаимосвязь координатных и диагональных конфигураций, связывающая диагональ Санеблидзе–Умбле и умножение, введенное Цаем для описания кольца когомологий вещественных момент–угол-комплексов.

Hyperbolic geometry-based modifications in GPT

А. А. Фокин (МФТИ, Сколтех)

TBA