Факультет компьютерных наук

15 мая 2025 г.

q-деформации вещественных чисел

Выполнил: Гундарин Роман Александрович, БПМИ227
Руководитель: Устинов Алексей Владимирович, д.ф.-м.н., профессор

q-деформации рациональных чисел
S. Morier-Genoud & V. Ovsienko, 2018

$$[n]_q := 1 + q + \ldots + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

q-деформации рациональных чисел

S. Morier-Genoud & V. Ovsienko, 2018

$$[n]_q := 1 + q + \ldots + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$\frac{s}{r} = [a_0; a_1, \ldots, a_{2n-1}] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots}}$$

q-деформации рациональных чисел

S. Morier-Genoud & V. Ovsienko, 2018

$$[n]_q := 1 + q + \ldots + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$\frac{s}{r} = [a_0; a_1, \ldots, a_{2n-1}] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots}}$$

$$\left[\frac{s}{r}\right]_q := [a_0]_q + \cfrac{q^{a_0}}{[a_1]_{q^{-1}} + \cfrac{q^{-a_1}}{[a_2]_q + \cfrac{q^{a_2}}{\ddots}}}$$

q-деформации рациональных чисел
Примеры

$$\left[\frac{5}{2}\right]_q = [2;2]_q = 1 + q + \frac{q^2}{1+q^{-1}} = \frac{q^3+q^2+2q+1}{q+1}$$

q-деформации рациональных чисел
Примеры

$$\left[\frac{5}{2}\right]_q = [2;2]_q = 1 + q + \frac{q^2}{1+q^{-1}} = \frac{q^3+q^2+2q+1}{q+1}$$

$$\left[\frac{5}{3}\right]_q = [1;1,1,1]_q = 1 + \cfrac{q}{1+\cfrac{q^{-1}}{1+\cfrac{q}{1}}} = \frac{q^3+2q^2+q+1}{q^2+q+1}$$

q-деформации рациональных чисел

Примеры

$$\left[\frac{5}{2}\right]_q = [2;2]_q = 1 + q + \frac{q^2}{1+q^{-1}} = \frac{q^3+q^2+2q+1}{q+1}$$

$$\left[\frac{5}{3}\right]_q = [1;1,1,1]_q = 1 + \cfrac{q}{1+\cfrac{q^{-1}}{1+\cfrac{q}{1}}} = \frac{q^3+2q^2+q+1}{q^2+q+1}$$

$$\text{NB:}\quad \left[\frac{s}{r}\right]_q \neq \frac{[s]_q}{[r]_q}, \frac{q^{\frac{s}{r}}-1}{q-1}$$

q-деформированные вещественные числа

S. Morier-Genoud & V. Ovsienko, 2019

$$\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in \mathbb{Q}, \quad x_k \to x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

$$[x_k]_q = \frac{\mathcal{S}(q)}{\mathcal{R}(q)} = \sum_{n=0}^{\infty} \kappa_{k,n} q^n$$

q-деформированные вещественные числа
S. Morier-Genoud & V. Ovsienko, 2019

$$\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in \mathbb{Q}, \quad x_k \to x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

$$[x_k]_q = \frac{\mathcal{S}(q)}{\mathcal{R}(q)} = \sum_{n=0}^{\infty} \kappa_{k,n} q^n$$

«Stabilization phenomenon»:

$$[x]_q := \sum_{n=0}^{\infty} q^n \cdot \lim_{k\to\infty} \kappa_{k,n}$$

q-деформированные вещественные числа
Пример

«Золотое сечение»:

$$[\varphi]_q = \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]_q = [1;1,\ldots]_q = 1 + \cfrac{q}{1 + \cfrac{q^{-1}}{1 + \cfrac{q}{\ddots}}}$$

$$= 1 + q^2 - q^3 + 2q^4 - 4q^5 + 8q^6 - 17q^7 + O(q^8) =$$

$$= \frac{q^2 + 1 - 1 + \sqrt{q^4 + 2q^3 - q^2 + 2q + 1}}{2q}$$

Определители Ганкеля

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n x^n$$

$$\Delta_n^{(l)}(f) := \begin{vmatrix} f_l & f_{l+1} & \cdots & f_{l+n-1} \\ f_{l+1} & f_2 & \cdots & f_{l+n} \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots \\ f_{l+n-1} & f_{l+n} & \cdots & f_{l+2n-2} \end{vmatrix}$$

Теорема (Ovsienko & Pedon, 2023; Han & Penon, 2025)
Для $f(q) = [k; k, ...]_q$ при $0 \leq l \leq k+1$ выполнено:

Металлические сечения

Периодичность определителей Ганкеля

Теорема (Ovsienko & Pedon, 2023; Han & Penon, 2025)
Для $f(q) = [k; k, ...]_q$ при $0 \leq l \leq k+1$ выполнено:

- $\Delta_n^{(l)} \in \{-1, 0, 1\}$

Металлические сечения
Периодичность определителей Ганкеля

Теорема (Ovsienko & Pedon, 2023; Han & Penon, 2025)
Для $f(q) = [k; k, \ldots]_q$ при $0 \le l \le k+1$ выполнено:

- $\Delta_n^{(l)} \in \{-1, 0, 1\}$
- (Анти-)периодичность: $\Delta_{n+2k(k+1)}^{(l)} = (-1)^k \Delta_n^{(l)}$

Металлические сечения

Периодичность определителей Ганкеля

Теорема (Ovsienko & Pedon, 2023; Han & Penon, 2025)
Для $f(q) = [k; k, ...]_q$ при $0 \le l \le k+1$ выполнено:

- $\Delta_n^{(l)} \in \{-1, 0, 1\}$
- (Анти-)периодичность: $\Delta_{n+2k(k+1)}^{(l)} = (-1)^k \Delta_n^{(l)}$
- $\Delta_n^{(l)} = (-1)^{n+\frac{k(k+2l+1)}{2}} \Delta_n^{(l)}$

Металлические сечения
Периодичность определителей Ганкеля

Теорема (Ovsienko & Pedon, 2023; Han & Penon, 2025)
Для $f(q) = [k; k, \ldots]_q$ при $0 \leq l \leq k+1$ выполнено:

- $\Delta_n^{(l)} \in \{-1, 0, 1\}$
- (Анти-)периодичность: $\Delta_{n+2k(k+1)}^{(l)} = (-1)^k \Delta_n^{(l)}$
- $\Delta_n^{(l)} = (-1)^{n+\frac{k(k+2l+1)}{2}} \Delta_n^{(l)}$
- Соотношение Гейла-Робинсона:

$$\Delta_{n+2k+2}^{(l)} \Delta_n^{(l)} = \Delta_{n+2k+1}^{(l)} \Delta_{n+1}^{(l)} - \left(\Delta_{n+k+1}^{(l)}\right)^2$$

Постановка задачи

Последовательности $\Delta_n^{(l)}$ — это диагонали C-таблицы.

Задача: исследовать C-таблицы q-деформаций металлических сечений в целом и $\Delta_n^{(l)}$ в частности.

Гипотеза (нули в C-таблице $[k; k, ...]_q$):

- Блоки нулей встречаются в периодом $2k(k+1)$ вдоль диагонали
- В периоде $2k$ блоков $k \times k$ и два блока $(k+1) \times (k+1)$
- Блоки $k \times k$ окружены ± 1

Постановка задачи
C-таблица

$$C[L/M] := \begin{vmatrix} f_{L-M+1} & f_{L-M+2} & \cdots & f_L \\ f_{L-M+2} & f_{L-M+3} & \cdots & f_{L+1} \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots \\ f_L & f_{L+1} & \cdots & f_{M+L-1} \end{vmatrix} = \Delta_M^{(L-M+1)}$$

Постановка задачи

C-таблица

$$C[L/M] := \begin{vmatrix} f_{L-M+1} & f_{L-M+2} & \cdots & f_L \\ f_{L-M+2} & f_{L-M+3} & \cdots & f_{L+1} \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots \\ f_L & f_{L+1} & \cdots & f_{M+L-1} \end{vmatrix} = \Delta_M^{(L-M+1)}$$

«Блочная теорема» (Padé, 1892): нули в C-таблице встречаются квадратными блоками, окруженными ненулевыми элементами.

Постановка задачи

C-таблица

$$C[L/M] := \begin{vmatrix} f_{L-M+1} & f_{L-M+2} & \cdots & f_L \\ f_{L-M+2} & f_{L-M+3} & \cdots & f_{L+1} \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots \\ f_L & f_{L+1} & \cdots & f_{M+L-1} \end{vmatrix} = \Delta_M^{(L-M+1)}$$

«Блочная теорема» (Padé, 1892): нули в C-таблице встречаются квадратными блоками, окруженными ненулевыми элементами.

«Звездное соотношение» (Frobenius, 1881):

$$C[L/M]^2 = C[L-1/M]C[L+1/M] - C[L/M-1]C[L/M+1].$$

Постановка задачи

Пример: C-таблица $[\varphi]_q$

$M \backslash L$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1	1	1	1							
1	1	$\boxed{0}$	1	-1	2						
2	-1	1	-1	1	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$					
3	-1	1	$\boxed{0}$	1	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$	-2				
4	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	3			
5		-2	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$	-1	$\boxed{0}$	-1	1	-4		
6			$\boxed{0}$	$\boxed{0}$	1	-1	1	-1	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$	
7				2	1	-1	$\boxed{0}$	-1	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$	4
8					-3	1	1	1	1	1	1
9						4	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$	1	$\boxed{0}$	1
10							$\boxed{0}$	$\boxed{0}$	-1	1	-1

Полученные результаты

- Гипотеза подтверждена для $k = 1, 2$
- Получена новая интерпретация имеющихся результатов

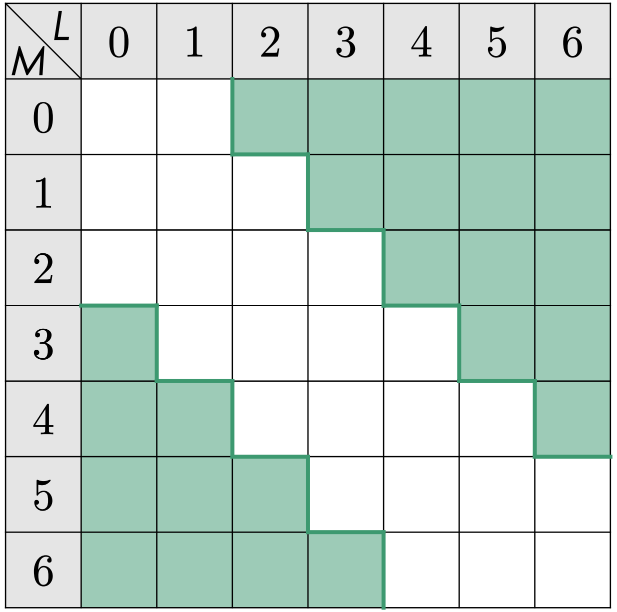
Идея доказательства: понять, как меняется C-таблица при дробно-линейном действии порождающих матриц $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})_q$:

- $R = \begin{pmatrix} q & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ сдвигает налево область над главной диагональю
- $L = \begin{pmatrix} q & 0 \\ q & 1 \end{pmatrix}$ действует аналогично, но под главной диагональю

Кроме того, C-таблица $[k; k, ...]_q$ почти симметрична.

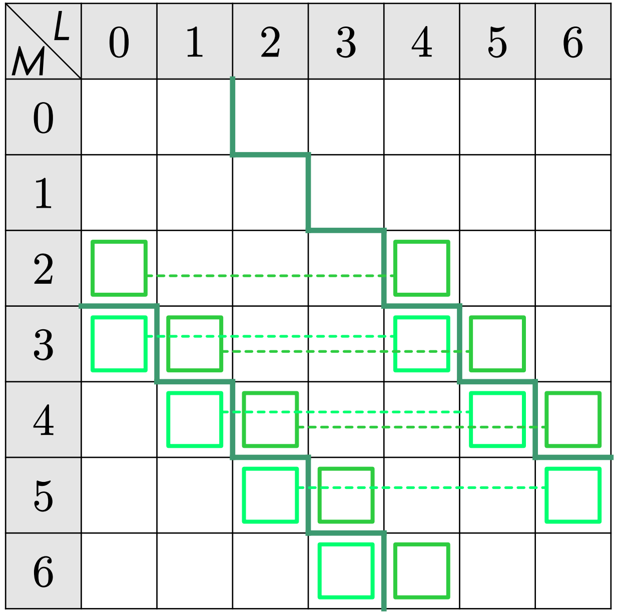
Полученные результаты

Идея доказательства



Симметрия: при $L \geq M + k$

$$C[L/M] = \pm C[M+1/L]$$



Сдвиг: при $l = k, k+1$

$$C[L-l/M] = C[L-l+2k/M]$$

Дальнейшее развитие

- Доказать гипотезу для всех металлических сечений
- Произвольные квадратичные иррациональности: когда есть периодичность?
- Исследовать появление нулей в C-таблицах q-деформаций произвольных чисел