ПРАВИТЕЛЬСТВО РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФГАОУ ВО НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»

Факультет компьютерных наук
Образовательная программа «Прикладная математика и информатика»

Отчет об исследовательском проекте

на тему: q-деформации вещественных чисел

Выполнил:
Студент группы БПМИ 227 Р.А. Гундарин

Подпись И.О. Фамилия

21.08.2025
Дата

Принял:
Руководитель проекта Устинов Алексей Владимирович

Имя, Отчество, Фамилия

профессор, д.ф.-м.н.
Должность, ученое звание

ФКН НИУ ВШЭ
Место работы (Компания или подразделения НИУ ВШЭ)

Дата проверки: 21.08 2025

Оценка по 10-ти бальной шкале Подпись

Москва 2025

Аннотация

q-деформации вещественных чисел — это ряды переменной q с целыми коэффициентами. В недавней работе [1] были получены результаты и выдвинуты гипотезы о структуре последовательностей определителей Ганкеля q-деформаций металлических сечений на основе техники H-дробей [2]. Данный проект посвящен развитию альтернативного взгляда на эту задачу, обобщению полученных в [1] результатов, и, в частности, исследованию блоков нулей в таблицах определителей Ганкеля q-деформаций металлических сечений.

Содержание

1. Введение

Рассмотрим формальный степенной ряд

$$f(q) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n q^n.$$

Положим $f_n := 0$ при $n < 0$. C-таблицей ряда f называется бесконечная вниз и вправо таблица, в которой на пересечении M-й строки и L-го столбца находится определитель Ганкеля коэффициентов ряда:

$$C_f[L/M] := \det \begin{pmatrix} f_{L-M+1} & \cdots & f_{L-1} & f_L \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ f_{L-1} & \cdots & f_{L+M-3} & f_{L+M-2} \\ f_L & \cdots & f_{L+M-2} & f_{L+M-1} \end{pmatrix}, \quad L, M \geq 0. \tag{1}$$

Такие определители возникают при построении приближений Паде рассматриваемого ряда. Известно, что нули в такой таблице всегда встречаются квадратными блоками [3].

q-деформацией числа $x \in \mathbb{R}$ называется степенной ряд $[x]_q \in \mathbb{Z}[[q]][q^{-1}]$. $[x]_q \in \mathbb{Z}[[q]]$ при $x \geq 0$. Определяющий свойством q-деформации является её $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$-инвариантность. Подробно их построение и основные свойства описаны в [4], [5].

Численные эксперименты показывают, что в C-таблицах q-деформаций некоторых квадратичных иррациональностей, в частности «металлических сечений»

$$y_k = \left[\overline{k}\right] = k + \cfrac{1}{k + \frac{1}{\ddots}},$$

блоки нулей устроены периодически. В работе В. Овсиенко и Э. Педона [1] периодичность диагоналей, близких к главной, была доказана при $k = 1, 2$ при помощи «H-дробей» — аналога цепных дробей для рядов, позволяющего вычислять определители Ганкеля, составленные из коэффициентов ряда [2]. Целью данного проекта является развитие иного подхода к этой задаче: вместо исследования отдельных последовательностей определителей рассматривать их как диагонали C-таблицы.

1.1. Основные обозначения

Для $l \in \mathbb{Z}$ введем обозначение $\Delta^{(l)}(f)$ для l-й диагонали C-таблицы ряда f:

$$\Delta_n^{(l)}(f) := C_f[n + l - 1/n] = \det \begin{pmatrix} f_l & \cdots & f_{l+n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{l+n-1} & \cdots & f_{l+2n-2} \end{pmatrix}, \quad n \geq 0.$$

Если из контекста ясно, о каком ряде идет речь, то указание ряда опускается и используется просто $\Delta_n^{(l)}$.

Положением блока нулей в C-таблице, у которого верхний левый нуль находится в $C[L/M]$, будем называть пару «координат» $[L - 1/M - 1]$. Таким образом, положение блока — это положение соответствующей ему аппроксимации Паде.

Далее будет рассматриваться действие матриц 2×2 на числах и рядах дробно-линейными преобразованиями. Соответственно, если $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, а f — число или ряд, то $Mf = \dfrac{af + b}{cf + d}$.

1.2. Постановка задачи

В [1] выдвинута гипотеза, что при всех $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq l \leq k + 1$ последовательности $\Delta^{(l)}\left([y_k]_q\right)$ состоят из ± 1 и 0, периодичны при четном и антипериодичны при нечетном k с периодом $2k(k + 1)$, удовлетворяют соотношению Гэйла — Робинсона:

$$\Delta_{n+2k+2}^{(l)} \Delta_n^{(l)} = \Delta_{n+2k+1}^{(l)} \Delta_{n+1}^{(l)} - \left(\Delta_{n+k+1}^{(l)}\right)^2,$$

а также связаны соотношением

$$\Delta_n^{(l)} = (-1)^{n+\frac{k(k+2l+1)}{2}} \Delta_{n+k+1}^{(l-1)}, \quad 1 \le l \le k+1.$$

Наша гипотеза, основанная на результатах компьютерных вычислений C-таблиц q-деформаций металлический сечений $[y_k]_q$ при $1 \le k \le 6$, следующая.

Гипотеза (*нули в C-таблице q-деформаций металлических сечений*). В C-таблице ряда $[y_k]_q$

- на позициях $[k-1/0], [2k-1/k+1], \dots, [2k^2-1/(2k-1)(k+1)]$ находятся блоки нулей размера k, причем вокруг них находятся числа ± 1;
- на позициях $[2k^2+k-2/2k(k+1)]$ и $[2k^2+2k-2/2k^2+k-1]$ находятся блоки нулей размера $k+1$;
- указанные серии блоков повторяются с периодом $2k(k+1)$ вдоль диагонали, т.е. блок на позиции $[L/M]$ повторяется на позиция $[L+2k(k+1)m/M+2k(k+1)m]$ для всех $m \in \mathbb{N}$.

Таким образом получается, что блоки размера k встречаются «отрезками» по $2k$ блоков, на концах которых находятся блоки размера $k+1$.

1.3. Полученные результаты

В данной работе подтверждается гипотеза для $k = 1, 2$. Таким образом, имеют место следующие теоремы.

Теорема 1 (*блоки нулей в C-таблице q-деформации золотого сечения*). При $k=1$, $y_k = \varphi$ есть золотое сечение. Его q-деформация имеет вид

$$[\varphi]_q = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_k q^k = 1 + q^2 - q^3 + 2q^4 - 4q^5 + 8q^6 + \dots,$$

где $\phi_k = (-1)^k a_{k-1}$ при $k \ge 2$, а a_k — «обобщённые чисел Каталана» (последовательность A004148 в OEIS).

C-таблица ряда $[\varphi]_q$ начинается так:

$M \backslash L$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1	1	1								
1	1	0	1	−1							
2	−1	1	−1	1	0	0					
3	−1	1	0	1	0	0					
4		−1	−1	−1	−1	−1	−1				
5			0	0	−1	0	−1	1			
6			0	0	1	−1	1	−1	0	0	
7					1	−1	0	−1	0	0	
8						1	1	1	1	1	1
9							0	0	1	0	1
10							0	0	−1	1	−1

Утверждается, что выделенный фиолетовым фрагмент таблицы повторяется в периодом 8. В частности, для всех $m \ge 0$ на позициях $[4m/4m]$ и $[4m+1/4m+2]$ находятся блоки нулей размера 1, окруженные ± 1, а на позициях $[4m+3/4m+1]$ и $[4m+1/4m+4]$ блоки нулей размера 2.

Теорема 2 (*блоки нулей в C-таблице q-деформации серебряного сечения*). При $k=2$, $y_k = 1+\sqrt{2}$ есть «серебряное сечение». Начало C-таблицы ряда $[y_2]_q$ показано в таблице 1. Выделенный фрагмент повторяется в таблице в периодом 12 вдоль. В частности, для всех $m \ge 0$ на позициях $[12m+1/12m]$, $[12m+3/12m+3]$, $[12m+5/12m+6]$ и $[12m+7/12m+9]$ находятся блоки нулей размера 2, окруженные ± 1, а на позициях $[12m+8/12m+12]$ и $[12m+11/12m+8]$ — блоки размера 3.

$M \backslash L$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	1	1	1	1	1												
1	1	1	0	0	1												
2	−1	−1	0	0	−1	−2											
3	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1										
4	1	0	1	1	0	0	1	2									
5	1	−1	1	1	0	0	1	1	−1								
6			−2	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−2							
7				1	−1	−1	0	0	−1	−1	1	−1					
8					2	1	0	0	1	1	0	1					
9						1	1	1	1	1	1	1	0	0	0		
10							−2	−1	0	0	−1	−1	0	0	0		
11								−1	0	0	−1	−1	0	0	0		
12								1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
13										0	0	0	1	1	0	0	1
14										0	0	0	−1	−1	0	0	−1
15										0	0	0	−1	−1	−1	−1	−1
16													1	0	1	1	0

Таблица 1. C-таблица q-деформации серебряного сечения

2. Общие свойства C-таблиц

Лемма 3 ($\left(\begin{smallmatrix} & * & \\ * & * & * \\ & * & \end{smallmatrix}\right)$-*звездное тождество,* [3, Следствие из теоремы 1.4.1]). В C-таблице всякого степенного ряда для всех $L, M \geq 0$ имеет место равенство

$$C[L/M]^2 = C[L-1/M] \cdot C[L+1/M] - C[L/M-1] \cdot C[L/M+1]. \tag{2}$$

Следствие 4 (*структура нулей в C-таблице,* [3, Теорема 1.4.2]). Нули в C-таблице образуют квадратные блоки, окруженные ненулевыми элементами.

Следствие 5 (*поведение C-таблицы вокруг блока нулей*). Пусть в C-таблице некоторого ряда имеется следующий фрагмент:

$M \backslash L$	l	$+1$	$\cdots$	$+k$	
m	a	x			
$+1$		0	$\cdots$	0	
$\vdots$		$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	
$+k$		0	$\cdots$	0	y
					b

Тогда если $x, y \neq 0$, то выделенные элементы C-таблицы вычисляются по следующим формулам:

$$C[l+r/m] = x^r a^{-r+1}, \quad C[l+k+1/m+k+1-r] = (-1)^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor} y^r b^{-r+1}, \quad 1 \leq r \leq k+1.$$

В частности,

$$C[l+k+1/m] = x^{k+1} a^k = (-1)^{\frac{k+1}{2}} y^{k+1} b^k. \tag{3}$$

Доказательство. Оба семейства равенств получаются последовательным применением звёздного тождества (2) с центрами в $[l + r/m]$ и $[l + k + 1/m + k + 1 - r]$ для $r = 1, \ldots, k$. ■

Лемма 6 (*Теорема Адамара,* [3, Теорема 1.6.1]). Пусть f — степенной ряд, $f(0) \neq 0$. Тогда

$$C_{1/f}[M/L] = (-1)^{(L+M)(L+M-1)/2} C_f[L/M] \cdot f(0)^{-(L+M)}.$$

Рассмотрим стандартные порождающие матрицы модулярной группы и их q-деформированные версии:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad R_q = \begin{pmatrix} q & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad L_q = \begin{pmatrix} q & 0 \\ q & 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку q-деформации вещественных чисел тесно связаны с дробно-линейными преобразованиями, естественно исследовать изменение C-таблицы ряда при действии на него указанных порождающих матриц q-деформированной модулярной группы.

Предложение 7 (*Сдвиг C-таблицы*). Пусть $f = \sum_{i=0}^{\infty} f_i q^i$. Тогда

1) $C_{R_q f}[L/M] = C_f[L - 1/M]$ при $L \geq M$, $L > 0$;
2) $C_{R_q f}[L/L + 1] = C_f[L - 1/L + 1] + C_f[L/L]$ при $L > 0$;
3) $C_{L_q f}[L/M] = C_f[L - 1/M]$ при $1 + l \leq L \leq M$, где $f_{l+1} = 1$, $q^l \mid f$;
4) $C_{L_q f}[M + 1/M] = C_f[M/M] + C_f[M - 1/M + 1]$ при $l + 1 \leq M$, где l то же, что в 3).

Доказательство.

1) Очевидно из определения C-таблицы (1), поскольку коэффициенты $R_q f = 1 + qf$ начиная с первого — это коэффициенты f.
2) Из полилинейности определителя:

$$C_{R_q f}[L/L+1] = \det \begin{pmatrix} 1 & f_0 & \cdots & f_{L-1} \\ f_0 & f_1 & \cdots & f_L \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{L-1} & f_L & \cdots & f_{2L} \end{pmatrix} =$$

$$= \det \begin{pmatrix} 0 & f_0 & \cdots & f_{L-1} \\ f_0 & f_1 & \cdots & f_L \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{L-1} & f_L & \cdots & f_{2L} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_L \\ f_2 & f_3 & \cdots & f_{L+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_L & f_{L+1} & \cdots & f_{2L} \end{pmatrix} = C_f[L - 1/L + 1] + C_f[L/L].$$

3) Пусть $g = q^{-l} f$. По определению l, $g(0) = 1$. Заметим, что

$$L_q f = \frac{qf}{1 + qf} = \frac{q^{l+1}}{q^{l+1} + \frac{1}{g}}.$$

Используя теорему Адамара, поскольку $g(0) = \big(g + q^{l+1}\big)(0) = g(0)^{-1} = 1$, получим:

$$C_{L_q f}[L/M] \overset{L \geq l+1}{=\!=} C_{(q^{l+1} + g^{-1})^{-1}}[L - (l+1)/M] = C_{q^{l+1} + g^{-1}}[M/L - (l+1)] \cdot (-1)^{\star} \overset{M \geq L}{=\!=}$$
$$= C_{g^{-1}}[M/L - (l+1)] \cdot (-1)^{\star} = C_g[L - (l+1)/M] \cdot (-1)^{2\star} = C_f[L/M],$$

где $\star = (M + L - (l+1))(M + L - (l+1) - 1)/2$.

4) Аналогично предыдущим двум пунктам,

$$C_{L_q f}[M + 1/M] = C_{q^{l+1} + g^{-1}}[M/M + 1 - (l+1)] \cdot (-1)^{\star} =$$
$$= \big(C_{g^{-1}}[M/M - l] + C_{g^{-1}}[M + 1/M - (l+1)]\big) \cdot (-1)^{\star} =$$
$$= C_g[M - l/M] + C_g[M - (l+1)/M + 1] = C_f[M/M] + C_f[M - 1/M + 1]. \quad ■$$

3. Свойства C-таблицы металлических сечений

Лемма 8 (*Симметричность C-таблицы металлических сечений*). Пусть $k \geq 1$, $f = [y_k]_q$ — q-деформация k-ого металлического сечения. Тогда при $L \geq M + k$:

$$C[L/M] = C[M+1/L] \cdot (-1)^{(L+M+1)(L+M)/2}. \tag{4}$$

В таблице 2 выделены области C-таблицы, которые связывает соотношение (4) на примере металлического сечения.

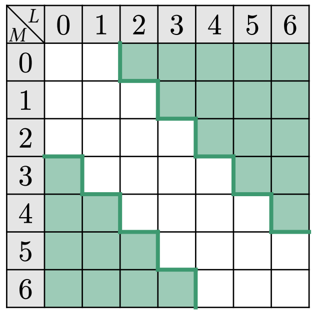


Таблица 2. Связанные симметрией области C-таблицы $[y_2]_q$

Доказательство. Поскольку $y_k = R^k L^k y_k$, то

$$f = R_q^k L_q^k f = \begin{pmatrix} q^k & [k]_q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q^k & 0 \\ q[k]_q & 1 \end{pmatrix} f = \begin{pmatrix} q^{2k} + q[k]_q^2 & [k]_q \\ q[k]_q & 1 \end{pmatrix} f,$$

т.е. f есть решение квадратного уравнения

$$f^2 - \left([k]_q + \frac{(q-1)(q^k+1)}{q} \right) f - \frac{1}{q} = 0.$$

Тогда, по теореме Виета,

$$f = [k]_q + \frac{(q-1)(q^k+1)}{q} + \frac{1}{qf} = \frac{1}{q}\left(\frac{1}{f} - 1\right) + \psi(q),$$

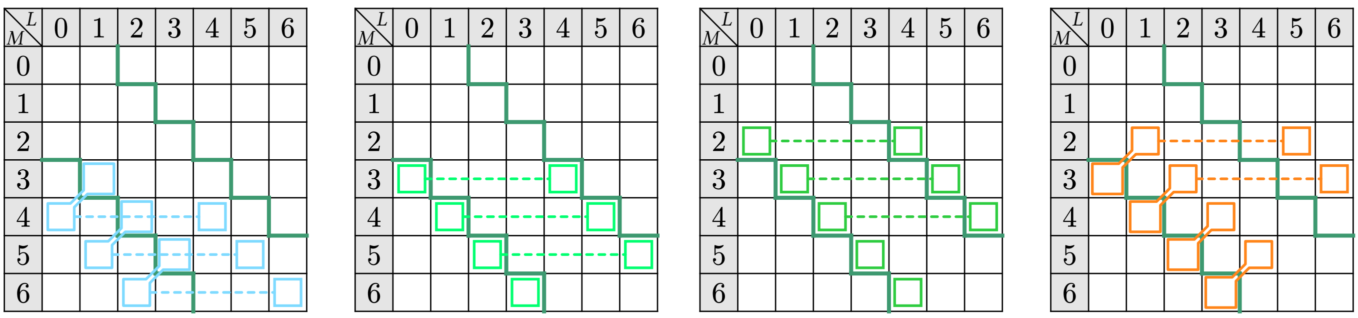
где $\psi \in \mathbb{Z}[q]$, $\deg \psi = k$.

Теперь, по теореме Адамара, при $L \geq M + k$:

$$C_f[L/M] \overset{\substack{L \geq M+k \\ \deg\psi = k}}{=\!=} C_{q^{-1}(f^{-1}-1)}[L/M] = C_{f^{-1}-1}[L+1/M] \overset{L+1>M}{=\!=}$$
$$= C_{1/f}[L+1/M] = (-1)^{(L+M+1)(L+M)/2} \cdot C_f[M/L+1]. \qquad \blacksquare$$

Лемма 9. Для всякого $k \in \mathbb{N}$ в C-таблице ряда $[y_k]_q$ выполнены следующие соотношения:

$$\text{при } n \geq k+2: \quad \Delta_n^{(k-1)} = \Delta_n^{(-k-1)} + \Delta_{n-1}^{(-k+1)} \tag{5}$$
$$\text{при } n \geq k+1: \quad \Delta_n^{(k)} = \Delta_n^{(-k)} \tag{6}$$
$$\text{при } n \geq k: \quad \Delta_n^{(k+1)} = \Delta_n^{(-k+1)} \tag{7}$$
$$\text{при } n \geq k: \quad \Delta_n^{(k+2)} = \Delta_n^{(-k+2)} + \Delta_{n+1}^{(-k)} \tag{8}$$



Сдвиг «с поправкой» (5) Сдвиг (6) Сдвиг (7) Сдвиг «с поправкой» (8)

Таблица 3. Соотношения леммы 9 при $k = 2$

Доказательство. Обозначим $f = [y_k]_q$. По определению k-го металлического сечения, $R^k L^k y_k = y_k$. Поскольку q-деформация коммутирует с действием модулярной группы, то $R_q^k L_q^k f = f$. По предложению 7:

$$\Delta_n^{(k-1)}(f) = C_{R_q^k L_q^k f}[n+k-2/n] = C_{R_q L_q^k f}[n-1/n] =$$
$$= C_{L_q^k f}[n-2/n] + C_{L_q^k f}[n-1/n-1] =$$

$$
\begin{aligned}
&= C_f[n-(k+2)/n] + C_f[n-(k+1)/n-1] = \\
&= \Delta_n^{(-k-1)}(f) + \Delta_{n-1}^{(-k+1)}(f) \\
\Delta_n^{(k)}(f) &= C_{R_q^k L_q^k f}[n+k-1/n] = C_f[n-(k+1)/n] = \Delta_n^{(-k)}(f) \\
\Delta_n^{(k+1)}(f) &= C_{R_q^k L_q^k f}[n+k/n] = C_f[n-k/n] = \Delta_n^{(-k+1)}(f) \\
\Delta_n^{(k+2)}(f) &= C_{R_q^k L_q^k f}[n+k+1/n] = C_{L_q^k f}[n+1/n] = \\
&= C_{L_q^{k-1} f}[n/n] + C_{L_q^{k-1} f}[n-1/n+1] = \\
&= C_f[n-(k-1)/n] + C_f[n-k/n+1] = \\
&= \Delta_n^{(-k+2)}(f) + \Delta_{n+1}^{(-k)}(f).
\end{aligned}
$$
■

Полученные соотношения позволяют легко доказать следующее утверждение.

Следствие 10 ([1, Proposition 4.1]). В C-таблице $[y_k]_q$ выполняется соотношение

$$\Delta_n^{(k)} = (-1)^{n+\frac{(k+1)(k-2)}{2}} \Delta_{n-k-1}^{(k+1)}.$$

Доказательство. Следует из симметричности C-таблицы (4) и (6) :

$$\Delta_n^{(k)} = \Delta_n^{(-k)} = C[n-k-1/n] = (-1)^{\frac{(2n-k-1)(2n-k-2)}{2}} \cdot C[n-1/n-k-1] = (-1)^{n+\frac{(k+1)(k-2)}{2}} \Delta_{n-k-1}^{(k+1)}.$$ ■

4. Вычисление диагоналей C-таблиц металлических сечений

В этой части мы докажем теоремы 1 и 2. Мы явно предъявим зацикливающийся процесс вычисления диагоналей $\Delta_n^{(l)}\left([y_k]_q\right)$ для $k = 1, 2$ и $-k-1 \le l \le k+2$.

4.1. Золотое сечение: $k = 1$

Предложение 11 (*уточнение* [1, Theorem 1.6]). При $-2 \le l \le 3$ последовательности $\Delta_n^{(l)}\left([\varphi]_q\right)$ 4-антипериодические со следующими периодами:

$$
\begin{aligned}
\Delta^{(-2)} &= -1,\ -1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0; \\
\Delta^{(-1)} &= -1,\ 1,\ -1,\ 0,\ 1,\ -1,\ 1,\ 0; \\
\Delta^{(0)} &= 1,\ 1,\ 0,\ -1,\ -1,\ -1,\ 0,\ 1; \\
\Delta^{(1)} &= 1,\ 0,\ -1,\ 1,\ -1,\ 0,\ 1,\ -1; \\
\Delta^{(2)} &= 1,\ 1,\ 1,\ 0,\ -1,\ -1,\ -1,\ 0; \\
\Delta^{(3)} &= 1,\ -1,\ 0,\ 0,\ -1,\ 1,\ 0,\ 0.
\end{aligned}
$$

Доказательство. Воспользуемся индукцией. Пусть на позиции $[4m/4m]$ таблица имеет вид

$M \backslash L$	$4m$	$+1$	$+2$
$4m$	1	1	1
$+1$	1	0	1
$+2$	-1	1	

Покажем, что на позиции $[4m+8/4m+8]$ конфигурация повторится, а значения $\Delta_n^{(l)}$ при $-2 \le l \le 3$ и соответствующих n однозначно восстанавливаются.

Явно вычислим интересующие нас элементы C-таблицы. Кратко вычисление описано в таблице 4. Вычисления производится в порядке, указанном красными римскими цифрами, сначала в участке таблице слева, а затем справа. Вычисления справа в точности повторяют вычисления слева с точностью до знака (это связано с антипериодичностью). Для вычисления очередного элемента таблицы используется тождество, указанное синим. Несложно убедится, что при вычислении очередной клетки с использованием указанного тождества соответствующая ей римская цифра строго больше римских цифр, соответствующих используемым в тождестве значений. Это в точности означает, что процедура вычисления корректна.

$M \backslash L$	$4m$	$+1$	$+2$	$+3$	$+4$	$+5$	$+6$
$4m$	1	1	1				
$+1$	1	0	1	$^{(8)}-1_{\mathrm{I}}$			
$+2$	-1	1	$^{(6)}-1_{\mathrm{I}}$	$^{(7)}1_{\mathrm{I}}$	$^{(8)}0_{\mathrm{II}}$	$^{(2)}0_{\mathrm{IV}}$	
$+3$	$^{(4)}-1_{\mathrm{I}}$	$^{(4)}1_{\mathrm{I}}$	$^{(5)}0_{\mathrm{II}}$	$^{(6)}1_{\mathrm{II}}$	$^{(7)}0_{\mathrm{III}}$	$^{(8)}0_{\mathrm{III}}$	
$+4$		$^{(4)}-1_{\mathrm{II}}$	$^{(4)}-1_{\mathrm{II}}$	$^{(5)}-1_{\mathrm{III}}$	$^{(6)}-1_{\mathrm{III}}$	$^{(7)}-1_{\mathrm{IV}}$	$^{(8)}-1_{\mathrm{V}}$
$+5$			$^{(4)}0_{\mathrm{III}}$	$^{(4)}0_{\mathrm{IV}}$	$^{(5)}-1_{\mathrm{IV}}$	$^{(6)}0_{\mathrm{V}}$	$^{(7)}-1_{\mathrm{V}}$
$+6$			$^{(4)}0_{\mathrm{V}}$	$^{(4)}0_{\mathrm{IV}}$	$^{(4)}1_{\mathrm{V}}$	$^{(5)}-1_{\mathrm{V}}$	

$M \backslash L$	$+4$	$+5$	$+6$	$+7$	$+8$	$+9$	$+10$
$+4$	-1	-1	-1				
$+5$	-1	0	-1	$^{(8)}1_{\mathrm{I}}$			
$+6$	1	-1	$^{(6)}1_{\mathrm{I}}$	$^{(7)}-1_{\mathrm{I}}$	$^{(8)}0_{\mathrm{II}}$	$^{(2)}0_{\mathrm{IV}}$	
$+7$	$^{(4)}1_{\mathrm{I}}$	$^{(4)}-1_{\mathrm{I}}$	$^{(5)}0_{\mathrm{II}}$	$^{(6)}-1_{\mathrm{II}}$	$^{(7)}0_{\mathrm{III}}$	$^{(8)}0_{\mathrm{III}}$	
$+8$		$^{(4)}1_{\mathrm{II}}$	$^{(4)}1_{\mathrm{II}}$	$^{(5)}1_{\mathrm{III}}$	$^{(6)}1_{\mathrm{III}}$	$^{(7)}1_{\mathrm{IV}}$	$^{(8)}1_{\mathrm{V}}$
$+9$			$^{(4)}0_{\mathrm{III}}$	$^{(4)}0_{\mathrm{IV}}$	$^{(5)}1_{\mathrm{IV}}$	$^{(6)}0_{\mathrm{V}}$	$^{(7)}1_{\mathrm{V}}$
$+10$			$^{(4)}0_{\mathrm{V}}$	$^{(4)}0_{\mathrm{IV}}$	$^{(4)}-1_{\mathrm{V}}$	$^{(5)}1_{\mathrm{V}}$	

Таблица 4. Вычисление C-таблицы $[\varphi]_q$

Для наглядности приведем поэтапное вычисление элементов на таблице слева (первого полупериода):

$M \backslash L$	$4m$	$+1$	$+2$	$+3$	$+4$	$+5$	$+6$
$4m$	1	1	1				
$+1$	1	0	1	?			
$+2$	-1	1	?	?			
$+3$	?	?					
$+4$							
$+5$							
$+6$							

$M \backslash L$	$4m$	$+1$	$+2$	$+3$	$+4$	$+5$	$+6$
$4m$	1	1	1				
$+1$	1	0	1	-1			
$+2$	-1	1	-1	1	?		
$+3$	-1	1	?				
$+4$		?	?				
$+5$							
$+6$							

$M \backslash L$	$4m$	$+1$	$+2$	$+3$	$+4$	$+5$	$+6$
$4m$	1	1	1				
$+1$	1	0	1	-1			
$+2$	-1	1	-1	1	0		
$+3$	-1	1	0	?	?		
$+4$		-1	-1	?	?		
$+5$							
$+6$							

$M \backslash L$	$4m$	$+1$	$+2$	$+3$	$+4$	$+5$	$+6$
$4m$	1	1	1				
$+1$	1	0	1	-1			
$+2$	-1	1	-1	1	0		
$+3$	-1	1	0	1	0	?	
$+4$		-1	-1	-1	-1	?	
$+5$			?	?			
$+6$							

$M \backslash L$	$4m$	$+1$	$+2$	$+3$	$+4$	$+5$	$+6$
$4m$	1	1	1				
$+1$	1	0	1	-1			
$+2$	-1	1	-1	1	0	?	
$+3$	-1	1	0	1	0	0	
$+4$		-1	-1	-1	-1	-1	?
$+5$			0	0	?	?	
$+6$				?	?		

$M \backslash L$	$4m$	$+1$	$+2$	$+3$	$+4$	$+5$	$+6$
$4m$	1	1	1				
$+1$	1	0	1	-1			
$+2$	-1	1	-1	1	0	0	
$+3$	-1	1	0	1	0	0	
$+4$		-1	-1	-1	-1	-1	-1
$+5$			0	0	-1	0	?
$+6$			?	0	1	?	

Таблица 5. Пошаговое вычисление C-таблицы $[\varphi]_q$

Наконец, посредством прямых вычислений несложно убедится, что при $k = 0$ указанная часть таблицы действительно имеет такой вид, т.е. верна база индукции. ■

Предложение 12. Пусть $n = 4m + r$, $0 \leq r \leq 3$. Тогда

$$\Delta_n^{(4)} = (-1)^m \cdot \begin{cases} 2m+1, & r = 0 \\ 2m+2, & r = 1 \\ 0, & r = 2 \\ -2m-2, & r = 3 \end{cases}$$

Доказательство. Понятно, что $\Delta_0^{(4)} = 1$. При доказательстве предложения 11 показано, что $\Delta_{4m+2}^{(4)} = 0$.

По звёздному тождеству (2):

$$\left(\Delta_n^{(3)}\right)^2 = \Delta_n^{(4)}\Delta_n^{(2)} - \Delta_{n-1}^{(4)}\Delta_{n+1}^{(2)}.$$

Подставляя результат предложения 11, при $r \neq 3$ получим

$$\Delta_n^{(4)} = \Delta_{n-1}^{(4)} + (-1)^m.$$

Из (3) следует, что $\Delta_{4m+3}^{(4)} = -\Delta_{4m+1}^{(4)}$. Теперь по индукции получаем доказываемую формулу для $\Delta^{(4)}$. ■

Доказанные предложения по сути доказывают теорему 1:

Доказательство (теоремы 1). Из предложения 11 напрямую следует утверждение гипотезы о блоках размера 1: они находятся на позициях $[4m/4m]$ и $[4m+1/4m+2]$ и окружены ± 1. Из предложения 12 следует, что блоки на позициях $[4m+3/4m+1]$ имеют размер ровно 2. Из леммы 8 о симметричности следует, что и блоки на позициях $[4m+1/4m+4]$ имеют размер 2. ■

4.2. Серебряное сечение: $k = 2$

Случай серебряного сечения доказывается аналогично:

Доказательство (теоремы 2). По индукции. Пусть на позиции $[12m/12m]$ таблица имеет вид

$M \backslash L$	$12m$	$+1$	$+2$	$+3$	$+4$
$12m$	1	1	1	1	1
$+1$	1	1	0	0	
$+2$	-1	-1			

Покажем, что тогда на позиции $[12m+12/12m+12]$ фрагмент повторится, а значения $\Delta^{(l)}$ между этими фрагментами однозначно восстанавливаются:

$M \backslash L$	$12m$	$+1$	$+2$	$+3$	$+4$	$+5$	$+6$	$+7$	$+8$	$+9$	$+10$	$+11$	$+12$	$+13$	$+14$	$+15$	$+16$
$12m$	1	1	1	1	1												
$+1$	1	1	0	0	$^{(2)}1_{\mathrm{III}}$												
$+2$	-1	-1	$^{(2)}0_{\mathrm{I}}$	$^{(2)}0_{\mathrm{II}}$	$^{(7)}-1_{\mathrm{I}}$	$^{(8)}-2_{\mathrm{II}}$											
$+3$	$^{(4)}-1_{\mathrm{I}}$	$^{(2)}-1_{\mathrm{II}}$	$^{(2)}-1_{\mathrm{III}}$	$^{(2)}-1_{\mathrm{IV}}$	$^{(6)}-1_{\mathrm{II}}$	$^{(7)}-1_{\mathrm{III}}$	$^{(8)}-1_{\mathrm{IV}}$										
$+4$	$^{(4)}1_{\mathrm{I}}$	$^{(4)}0_{\mathrm{I}}$	$^{(5)}1_{\mathrm{V}}$	$^{(2)}1_{\mathrm{VII}}$	$^{(5)}0_{\mathrm{III}}$	$^{(6)}0_{\mathrm{II}}$	$^{(7)}1_{\mathrm{VI}}$	$^{(8)}2_{\mathrm{VIII}}$									
$+5$	$^{(4)}1_{\mathrm{I}}$	$^{(4)}-1_{\mathrm{IV}}$	$^{(4)}1_{\mathrm{II}}$	$^{(2)}1_{\mathrm{VI}}$	$^{(2)}0_{\mathrm{IV}}$	$^{(2)}0_{\mathrm{IV}}$	$^{(6)}1_{\mathrm{III}}$	$^{(7)}1_{\mathrm{VII}}$	$^{(8)}-1_{\mathrm{V}}$								
$+6$			$^{(4)}-2_{\mathrm{III}}$	$^{(4)}-1_{\mathrm{IV}}$	$^{(2)}-1_{\mathrm{VII}}$	$^{(2)}-1_{\mathrm{VIII}}$	$^{(5)}-1_{\mathrm{VII}}$	$^{(6)}-1_{\mathrm{V}}$	$^{(7)}-1_{\mathrm{VIII}}$	$^{(8)}-2_{\mathrm{IX}}$							
$+7$				$^{(4)}1_{\mathrm{V}}$	$^{(4)}-1_{\mathrm{VII}}$	$^{(2)}-1_{\mathrm{XI}}$	$^{(2)}0_{\mathrm{IX}}$	$^{(2)}0_{\mathrm{IX}}$	$^{(6)}-1_{\mathrm{VIII}}$	$^{(7)}-1_{\mathrm{XII}}$	$^{(8)}1_{\mathrm{X}}$	$^{(2)}-1_{\mathrm{XV}}$					
$+8$					$^{(4)}2_{\mathrm{IX}}$	$^{(4)}1_{\mathrm{VIII}}$	$^{(2)}0_{\mathrm{XII}}$	$^{(2)}0_{\mathrm{XIII}}$	$^{(5)}1_{\mathrm{XII}}$	$^{(6)}1_{\mathrm{IX}}$	$^{(7)}0_{\mathrm{XIII}}$	$^{(8)}1_{\mathrm{XIV}}$					
$+9$						$^{(4)}1_{\mathrm{VI}}$	$^{(4)}1_{\mathrm{IX}}$	$^{(2)}1_{\mathrm{XIII}}$	$^{(2)}1_{\mathrm{XIV}}$	$^{(2)}1_{\mathrm{XIV}}$	$^{(6)}1_{\mathrm{X}}$	$^{(7)}1_{\mathrm{XIV}}$	$^{(8)}0_{\mathrm{XV}}$	$^{(2)}0_{\mathrm{XVII}}$	$^{(2)}0_{\mathrm{XX}}$		
$+10$							$^{(4)}-2_{\mathrm{X}}$	$^{(4)}-1_{\mathrm{XIII}}$	$^{(2)}0_{\mathrm{XV}}$	$^{(2)}0_{\mathrm{XV}}$	$^{(5)}-1_{\mathrm{XIV}}$	$^{(6)}-1_{\mathrm{XIV}}$	$^{(7)}0_{\mathrm{XVI}}$	$^{(8)}0_{\mathrm{XVI}}$	$^{(2)}0_{\mathrm{XIX}}$		
$+11$								$^{(4)}-1_{\mathrm{XI}}$	$^{(4)}0_{\mathrm{XIV}}$	$^{(2)}0_{\mathrm{XVI}}$	$^{(2)}-1_{\mathrm{XVI}}$	$^{(5)}-1_{\mathrm{XVI}}$	$^{(6)}0_{\mathrm{XV}}$	$^{(7)}0_{\mathrm{XVII}}$	$^{(8)}0_{\mathrm{XVII}}$		
$+12$								$^{(2)}1_{\mathrm{XV}}$	$^{(4)}1_{\mathrm{XV}}$	$^{(4)}1_{\mathrm{XV}}$	$^{(2)}1_{\mathrm{XVII}}$	$^{(2)}1_{\mathrm{XVII}}$	$^{(5)}1_{\mathrm{XVII}}$	$^{(6)}1_{\mathrm{XVI}}$	$^{(7)}1_{\mathrm{XVIII}}$	$^{(8)}1_{\mathrm{XVIII}}$	$^{(2)}1_{\mathrm{XXI}}$
$+13$										$^{(4)}0_{\mathrm{XVI}}$	$^{(4)}0_{\mathrm{XVII}}$	$^{(2)}0_{\mathrm{XIX}}$	$^{(2)}1_{\mathrm{XXI}}$	$^{(5)}1_{\mathrm{XVIII}}$	$^{(6)}0_{\mathrm{XVIII}}$	$^{(7)}0_{\mathrm{XX}}$	
$+14$										$^{(4)}0_{\mathrm{XVIII}}$	$^{(4)}0_{\mathrm{XVII}}$	$^{(4)}0_{\mathrm{XVIII}}$	$^{(2)}-1_{\mathrm{XX}}$	$^{(2)}-1_{\mathrm{XIX}}$			
$+15$										$^{(4)}0_{\mathrm{XXI}}$	$^{(4)}0_{\mathrm{XX}}$	$^{(4)}0_{\mathrm{XVIII}}$	$^{(4)}-1_{\mathrm{XIX}}$				
$+16$													$^{(4)}1_{\mathrm{XIX}}$				

Наконец, прямыми вычислениями несложно убедится, что верна база индукции, т.е. при $k = 0$ таблица действительно имеет указанный вид. ■

Библиография

[1] V. Ovsienko и E. Pedon, «Continued fractions for q-deformed real numbers, $\{-1, 0, 1\}$-Hankel determinants, and Somos-Gale-Robinson sequences», *Advances in Applied Mathematics*, т. 162, с. 102788, 2025, doi: https://doi.org/10.1016/j.aam.2024.102788.

[2] G.-N. Han, «Hankel continued fraction and its applications». [Онлайн]. Доступно на: https://arxiv.org/abs/1406.1593

[3] Д. Бейкер мл. и П. Грейвс-Моррис, *Аппроксимации Паде*. Москва: Мир, 1986.

[4] S. Morier-Genoud и V. Ovsienko, «q-deformed rationals and q-continued fractions», *Forum of Mathematics, Sigma*, т. 8, 2020, doi: 10.1017/fms.2020.9.

[5] S. Morier-Genoud и V. Ovsienko, «On q-deformed Real Numbers», *Experimental Mathematics*, т. 31, вып. 2, сс. 652–660, окт. 2019, doi: 10.1080/10586458.2019.1671922.