

Летняя школа «Современная математика»
Дубна, июль 2024

И. В. Аржанцев

Бесконечная транзитивность

Москва
Издательство МЦНМО

УДК 512.54
ББК 22.144.126
А80

Аржанцев И. В.
А80 Бесконечная транзитивность. — М.: МЦНМО, 2025. — 48 с.

ISBN 978-5-4439-1951-5

Брошюра посвящена изучению кратно транзитивных и бесконечно транзитивных действий групп. Вначале излагаются основные понятия и конструкции, связанные с действиями групп на множествах. Затем обсуждаются кратно транзитивные конечные группы подстановок, в частности, группы Матьё. Приведены примеры бесконечно транзитивных действий дискретных групп. В последних разделах рассматривается свойство бесконечной транзитивности для групп автоморфизмов аффинных пространств и, в большей общности, аффинных алгебраических многообразий.

В тексте содержится более 65 задач. В приложении к основному тексту приведены необходимые сведения из теории групп. Излагаемый материал доступен студентам младших курсов физико-математических специальностей университетов.

Для студентов, аспирантов, преподавателей и научных работников, интересующихся алгеброй, геометрией и комбинаторикой.

ББК 22.144.126

ISBN 978-5-4439-1951-5



© МЦНМО, 2025.

Введение

Этот курс посвящен изучению *действий* групп на множествах. По определению, группа действует на множестве, если каждому ее элементу сопоставляется преобразование этого множества и это сопоставление уважает групповые операции.

Исторически группы в математике возникли именно как группы преобразований. Определение группы как множества с бинарной операцией, удовлетворяющей определенным требованиям, появилось намного позже. Оно стало результатом аксиоматизации классических математических дисциплин в первой половине XX века. С формальным определением проще работать, его удобно использовать для преподавания и последующего контроля знаний студентов. И все же при переходе к полной формализации мы теряем часть содержательной математики. Данная брошюра написана вполне в духе абстрактной алгебры. Но одна из целей, которую ставит перед собой автор, состоит в наполнении формальных понятий и конструкций живыми результатами и примерами, возникающими при изучении действий групп.

В первом разделе мы фиксируем необходимые определения и обсуждаем базовые конструкции, связанные с действиями групп. Оказывается, каждое транзитивное действие группы G реализуется как действие G левыми сдвигами на множестве левых смежных классов G/H группы G по подгруппе H . Далее, два таких действия изоморфны тогда и только тогда, когда соответствующие подгруппы сопряжены в G .

Несколько фактов, изложенных в этом разделе, могут оказаться новыми и для студентов, уже изучавших действия групп. Например, мы описываем ядро неэффективности действия группы G на G/H , а также находим группу биекций на этом множестве, коммутирующих с действием группы G .

В разделе 2 мы переходим к кратно транзитивным действиям. Пусть m — натуральное число. Говорят, что действие группы G на множестве X является m -транзитивным, если для любых двух упорядоченных наборов $(x_1, \dots, x_m)$ и $(y_1, \dots, y_m)$ попарно различных элементов из X найдется элемент группы G , переводящий первый набор во второй. В качестве примера: обычное рассуждение в геометрии — что условие

задачи сохраняется, например, преобразованиями подобия, а потому данные точки можно считать началом координат и точкой $(1, 0)$ — использует 2-транзитивность действия группы преобразований подобия на плоскости.

Ясно, что естественное действие группы подстановок S_n на множестве из n элементов n -транзитивно. Если ограничить это действие на подгруппу четных подстановок A_n , мы получим $(n - 2)$ -транзитивное действие. Также нетрудно проверить, что группа аффинных преобразований векторного пространства V , порожденная линейными преобразованиями и параллельными переносами, действует 2-транзитивно на V . Линейные преобразования векторного пространства V индуцируют преобразования проективного пространства $\mathbb{P}(V)$. Группа таких преобразований действует 2-транзитивно на $\mathbb{P}(V)$, если пространство $\mathbb{P}(V)$ как минимум двумерно, и 3-транзитивно, если $\mathbb{P}(V)$ — это проективная прямая. Рассматривая такие действия над различными конечными полями, мы получим бесконечно много примеров 2-транзитивных и 3-транзитивных действий конечных групп.

Оказывается, что конечные группы подстановок, отличные от S_n и A_n , не более чем 5-транзитивны. При этом к числу 5-транзитивных групп (к уже упомянутым S_n и A_n) добавляются только две новые группы подстановок, и еще две группы подстановок являются 4-транзитивными. Эти группы были открыты в XIX веке и называются группами Матьё. Они входят в число 26 спорадических конечных простых групп.

В конце раздела 2 мы доказываем, что если группа G действует на множестве X эффективно и 2-транзитивно, то любая неединичная нормальная подгруппа в G действует на X транзитивно. Отсюда вытекает, что если G допускает эффективное 2-транзитивное действие, то центр группы G тривиален.

Действие группы G на множестве X называется *бесконечно транзитивным*, если оно m -транзитивно для любого натурального числа m . В разделе 3 мы обсуждаем, какие группы допускают эффективные бесконечно транзитивные действия, и приводим примеры таких действий. В частности, рассматриваются бесконечно транзитивные действия свободных групп. Также мы доказываем, что если группа G действует на множестве X эффективно и бесконечно транзитивно, то любая неединичная нормальная подгруппа в G действует на X бесконечно транзитивно.

В разделе 4 мы рассматриваем действия групп несколько другого типа. А именно, изучаются группы полиномиальных автоморфизмов аффинного пространства и, в большей общности, аффинных алгебра-

ических многообразий. Такие группы играют важную роль в алгебраической геометрии. Мы доказываем, что начиная с размерности 2 группа полиномиальных автоморфизмов действует на аффинном пространстве бесконечно транзитивно, и обсуждаем, как этот результат можно перенести на аффинные гиперповерхности и другие многообразия.

Раздел 5 посвящен бесконечной транзитивности действий подгрупп группы полиномиальных автоморфизмов аффинного пространства. Рассматриваются подгруппы, порожденные небольшим числом однопараметрических подгрупп, каждая из которых порождена мономиальным оператором дифференцирования. Неожиданно, что бесконечная транзитивность для случая двух подгрупп, действующих на $\mathbb{A}^2$, реализуется, только если один из мономов первой, а другой второй степени. Бесконечная транзитивность порожденного несколькими мономиальными подгруппами действия — пока малоизученный эффект, и с ним связано несколько интересных открытых вопросов.

В последнем разделе, который мы назвали приложением, собраны основные определения и факты о группах. Этот короткий раздел не предназначен для изучения теории групп. Мы рекомендуем читателю до чтения основного текста прочитать приложение — это позволит согласовать используемые термины и обозначения. Если материал приложения покажется новым и сложным, мы советуем предварительно проработать один из учебников по основам теории групп.

Каждый раздел снабжен определенным числом задач разной степени сложности. В конце текста мы приводим указания к некоторым задачам. Рекомендуем читателю прорешать все задачи, это будет полезно для усвоения изложенного материала.

Брошюра подготовлена на основе материалов курсов, прочитанных на летней школе «Современная математика» в Ратмино в 2021 и 2024 годах. Автор благодарен слушателям курсов за интерес к теме, полезные комментарии и множество стимулирующих вопросов. Отдельно хотелось бы поблагодарить организаторов летней школы за настойчивую рекомендацию написать эту брошюру и содействие в подготовке текста.

1. Действия групп

1.1. Действие, орбита, стабилизатор

Начнем с определений основных понятий этого курса.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Действие $G \curvearrowright X$ группы G на множестве X — это такое отображение $G \times X \rightarrow X$, $(g, x) \mapsto gx$, что

1) оно согласовано с операцией в группе, т. е. $g_1(g_2x) = (g_1g_2)x$ для любых $g_1, g_2 \in G$, $x \in X$;

2) нейтральный элемент действует тождественно, т. е. $ex = x$ для любого $x \in X$.

Заметим, что условие 2 не следует из условия 1. Например, можно положить gx равным фиксированному элементу x_0 множества X для любых $g \in G$ и $x \in X$. Тогда условие 1 выполняется, а условие 2 — нет.

Если задано действие, то каждый элемент $g \in G$ определяет отображение $l_g: X \rightarrow X$, $x \mapsto gx$. Это отображение биективно, поскольку из условий 1 и 2 следует, что отображение $l_{g^{-1}}$ является для него обратным.

Более того, задание действия группы G на множестве X равносильно заданию гомоморфизма β из группы G в группу биекций $S(X)$ множества X с операцией композиции. В самом деле, условие 2) показывает, что отображение $G \rightarrow S(X)$, переводящее элемент $g \in G$ в биекцию l_g , является гомоморфизмом групп. Обратно, если задан гомоморфизм $\beta: G \rightarrow S(X)$, то отображение действия $G \times X \rightarrow X$ можно определить по формуле $(g, x) \mapsto \beta(g)(x)$.

С каждым действием группы связаны следующие объекты.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Орбитой элемента $x \in X$ под действием группы G называется подмножество

$$Gx = \{gx \mid g \in G\}.$$

Легко видеть, что отношение «точки x и y лежат в одной G -орбите» является отношением эквивалентности на множестве X — свойства рефлексивности, симметричности и транзитивности вытекают из определения действия. Это показывает, что каждое действие G на X определяет разбиение множества X на непересекающиеся орбиты.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Стабилизатор* элемента $x \in X$ — это подмножество

$$\text{St}(x) = \{g \in G \mid gx = x\}.$$

Ясно, что $\text{St}(x)$ является подгруппой группы G . Ниже мы увидим, что любая подгруппа в G реализуется как стабилизатор некоторой точки для подходящего действия группы G .

Легко проверить, что стабилизатором точки gx является подгруппа $\text{St}(gx) = g\text{St}(x)g^{-1}$. Это показывает, что стабилизаторы точек из одной орбиты сопряжены и любая подгруппа, сопряженная подгруппе $\text{St}(x)$, является стабилизатором некоторой точки из орбиты Gx . Другими словами, множество стабилизаторов точек на одной G -орбите — это класс сопряженности подгрупп в группе G . В частности, если $\text{St}(x)$ — нормальная подгруппа в G , то стабилизаторы всех точек из орбиты Gx совпадают. Например, это так, если группа G коммутативна.

1.2. Свойства и описания действий

Нам будут полезны несколько понятий, связанных с действиями групп.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Действие группы G на множестве X *транзитивно*, если для любых $x_1, x_2 \in X$ существует такой элемент $g \in G$, что $gx_1 = x_2$. Другими словами, транзитивное действие — это действие с одной орбитой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Действие группы G на множестве X *свободно*, если условие « $gx = x$ для некоторых $g \in G$ и $x \in X$ » влечет $g = e$.

Это означает, что любой элемент группы G , кроме нейтрального, сдвигает все точки множества X , или, равносильно, стабилизатор любой точки равен $\{e\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Действие группы G на множестве X *эффективно*, если условие « $gx = x$ для любого $x \in X$ » влечет $g = e$.

В этом случае только нейтральный элемент оставляет все точки на месте, или, эквивалентно, пересечение всех стабилизаторов тривиально:

$$\bigcap_{x \in X} \text{St}(x) = \{e\}.$$

Ясно, что каждое свободное действие эффективно, а для коммутативных групп каждое транзитивное эффективно. Действие свободно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. *Ядро неэффективности* действия группы G на множестве X — это подгруппа

$$K = \{g \in G \mid gx = x \forall x \in X\}.$$

Легко видеть, что K — нормальная подгруппа в группе G . Она совпадает с ядром гомоморфизма действия $\beta: G \rightarrow S(X)$. Действие эффективно в том и только в том случае, когда его ядро неэффективности тривиально, или, другими словами, гомоморфизм $\beta: G \rightarrow S(X)$ является вложением.

Заметим, что действие группы G на множестве X определяет действие факторгруппы G/K на X , заданное формулой $(gK)x = gx$. Последнее действие является эффективным.

1.3. Важные примеры

Приведем три примера действий произвольной группы G на себе, т. е. положим $X = G$.

1) Левые сдвиги: $(g, x) \mapsto gx$; здесь gx — произведение элементов в группе.

2) Правые сдвиги: $(g, x) \mapsto xg^{-1}$. При умножении именно на g^{-1} выполнено требование согласованности с операцией:

$$(xg_2^{-1})g_1^{-1} = x(g_1g_2)^{-1}.$$

3) Сопряжения: $(g, x) \mapsto xgx^{-1}$.

Действия левыми и правыми сдвигами транзитивны и свободны. А вот действие сопряжениями для неединичной группы G транзитивным и свободным не является: одна из орбит этого действия состоит только из элемента e , и стабилизатор этого элемента совпадает со всей группой. Стабилизатором элемента $x \in G$ является централизатор $Z_G(x)$ элемента x в группе G . В частности, стабилизатор любого элемента нетривиален, поскольку любой неединичный элемент коммутирует как минимум сам с собой. Ядром неэффективности этого действия будет центр $Z(G)$ группы G . Это показывает, что фактически сопряжениями действует факторгруппа $G/Z(G)$.

Орбиты действия сопряжениями называют *классами сопряженности* в группе G . Разбиение группы на классы сопряженности — это каноническая стратификация, которая очень полезна при изучении структуры группы.

Группы биекций $S(X)$ всевозможных множеств X важны как минимум тем, что любая группа реализуется в качестве подгруппы такой группы.

ТЕОРЕМА (Кэли). *Любая группа G изоморфна подгруппе группы биекций $S(G)$.*

Доказательство. Рассмотрим действие группы G на себе левыми сдвигами. Разные элементы группы определяют разные биекции, по-

скольку у единицы при таких сдвигах разные образы. Следовательно, гомоморфизм действия $\beta: G \rightarrow S(G)$ инъективен, и группа G изоморфна своему образу $\beta(G)$ в группе $S(G)$. $\square$

Применительно к конечным группам теорема Кэли утверждает, что каждая конечная группа G изоморфна подгруппе группы S_n , где $n = |G|$.

1.4. Изоморфизмы действий

Пришло время сказать, какие действия мы считаем одинаковыми.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Действия $G \curvearrowright X_1$ и $G \curvearrowright X_2$ группы G *изоморфны*, если существует такая биекция $\gamma: X_1 \rightarrow X_2$, что $\gamma(gx) = g\gamma(x)$ для любых $g \in G$ и $x \in X$.

Легко проверить, что в этой ситуации стабилизаторы точек x и $\gamma(x)$ совпадают.

Поскольку любое множество X с действием группы G является объединением непересекающихся орбит, можно сказать, что любое действие складывается из транзитивных действий. В качестве первого шага при изучении действий естественно описать все транзитивные действия данной группы G во внутренних терминах самой группы.

Для этого заметим, что для любого действия группы G на множестве X и для любой орбиты Gx имеется биекция между точками орбиты и левыми смежными классами группы G по стабилизатору точки x :

$$Gx \longleftrightarrow G/\text{St}(x), \quad gx \longleftrightarrow g\text{St}(x).$$

Более того, если обозначить эту биекцию буквой φ , то

$$g'\varphi(gx) = g'(g\text{St}(x)) = (g'g)\text{St}(x) = \varphi(g'g).$$

Это показывает, что транзитивное действие $G \curvearrowright Gx$ изоморфно действию группы G на множестве левых смежных классов $G/\text{St}(x)$ левыми сдвигами.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Классы изоморфизма транзитивных действий данной группы G находятся во взаимно однозначном соответствии с классами сопряженности подгрупп группы G .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы уже показали, что каждое транзитивное действие изоморфно действию группы G на множестве левых смежных классов G/H по некоторой подгруппе H . Остается доказать, что два таких действия на G/H_1 и на G/H_2 изоморфны тогда и только тогда, когда подгруппы H_1 и H_2 сопряжены. Если изоморфизм $\gamma: G/H_1 \rightarrow G/H_2$ переводит смежный класс eH_1 в смежный класс gH_2 , то стабилизатор H_1

точки eH_1 совпадает со стабилизатором gH_2g^{-1} точки gH_2 . Отсюда следует, что подгруппы H_1 и H_2 сопряжены.

Обратно, если $H_1 = gH_2g^{-1}$, то отображение $g'H_1 \mapsto g'gH_2$ является требуемым изоморфизмом. Корректность так определенного отображения, т. е. независимость от выбора представителя в смежном классе $g'H_1$, следует из цепочки равенств

$$g'hgH_2 = g'hgg^{-1}H_1g = g'H_1g = g'gH_2g^{-1}g = g'gH_2 \quad \forall h \in H_1. \quad \square$$

В частности, действия левыми и правыми сдвигами на группе G изоморфны, поскольку каждое из них отвечает при соответствии из предложения 1 единичной подгруппе.

Рискуя запутать читателя, скажем, что можно дать еще одно определение изоморфизма действий.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Действия $G_1 \curvearrowright X_1$ и $G_2 \curvearrowright X_2$ изоморфны, если существуют такой изоморфизм групп $\varphi: G_1 \rightarrow G_2$ и такая биекция $\gamma: X_1 \rightarrow X_2$, что $\gamma(g_1x_1) = \varphi(g_1)\gamma(x_1)$ для любых $g_1 \in G_1$ и $x_1 \in X_1$.

Если в этом определении считать, что $G_1 = G_2$, но разрешить использовать нетривиальные изоморфизмы φ , то получится более сильное определение изоморфизма действий группы G . В частности, транзитивные действия группы G будут находиться во взаимно однозначном соответствии с орбитами группы $\text{Aut}(G)$ автоморфизмов группы G , естественно действующей на множестве подгрупп группы G .

В случае конечной группы G биекция

$$Gx \leftrightarrow G/\text{St}(x)$$

показывает, что длина орбиты $|Gx|$ равна $|G|/|\text{St}(x)|$. В частности, число $|Gx|$ является делителем порядка группы $|G|$.

Предложение 2. Ядро неэффективности действия левыми сдвигами группы G на множестве левых смежных классов G/H — это наибольшая нормальная в G подгруппа, содержащаяся в H . В частности, действие $G \curvearrowright G/H$ эффективно тогда и только тогда, когда подгруппа H не содержит нетривиальных нормальных в G подгрупп.

Доказательство. По определению, ядро неэффективности K действия $G \curvearrowright G/H$ равно

$$K = \bigcap_{x \in X} \text{St}(x) = \bigcap_{g \in G} \text{St}(gH) = \bigcap_{g \in G} gHg^{-1}.$$

Эта подгруппа лежит в H и нормальна в G . С другой стороны, если N — это нормальная в G подгруппа, содержащаяся в H , то $N = gNg^{-1} \subseteq gHg^{-1}$

для любого $g \in G$. Это показывает, что N лежит в указанном пересечении. $\square$

С каждым действием $G \curvearrowright X$ связана группа $S_G(X)$ так называемых *эквивариантных биекций*:

$$S_G(X) = \{\psi: X \rightarrow X \mid \psi(gx) = g\psi(x) \ \forall g \in G, x \in X\}.$$

Вычислим эту группу для транзитивных действий.

Предложение 3. Пусть H — подгруппа группы G . Тогда

$$S_G(G/H) = N_G(H)/H.$$

Доказательство. Пусть $\psi: G/H \rightarrow G/H$ — эквивариантная биекция и $\psi(eH) = g_0H$. Тогда $\psi(gH) = gg_0H$ в силу условия эквивариантности. Это показывает, что биекция ψ однозначно определяется образом g_0H элемента eH .

При этом у элементов eH и g_0H должны быть одинаковые стабилизаторы, т. е. $H = g_0Hg_0^{-1}$. Значит, $g_0 \in N_G(H)$.

Остается заметить, что группа $N_G(H)$ действует на множестве G/H правыми сдвигами:

$$(n, gH) \mapsto gn^{-1}H, \quad g \in G, n \in N_G(H).$$

Это действие корректно определено, коммутирует с действием G на G/H левыми сдвигами, а ядром неэффективности этого действия является подгруппа H . $\square$

Следствие 1. Биекции на группе G , перестановочные с левыми сдвигами на элементах группы G , — это в точности правые сдвиги на элементы группы G .

Задачи к разделу 1

Задача 1. Постройте действие, орбитами которого являются смежные классы группы G по подгруппе H .

Задача 2. Пусть H — подгруппа в группе G и H действует на некотором множестве X . Всегда ли можно найти такое действие группы G на множестве X , что элементы подгруппы H действуют на X так же, как и при исходном действии?

Задача 3. Докажите, что для любого действия группы G на множестве X и для любой нормальной подгруппы N в группе G действие любого элемента группы G на X переставляет N -орбиты на X .

Задача 4. Докажите, что если группа G содержит собственную подгруппу конечного индекса, то G содержит и собственную нормальную подгруппу конечного индекса.

Задача 5. Найдите орбиты и стабилизаторы действия циклической группы $\langle \sigma \rangle \subseteq S_{10}$ на множестве $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, где

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 8 & 3 & 9 & 4 & 10 & 6 & 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Задача 6. Найдите нормализаторы подгруппы диагональных матриц T_n и подгруппы верхнетреугольных матриц B_n в группе $GL_n(\mathbb{R})$.

Задача 7. Для действия группы $GL_2(\mathbb{R})$ на себе сопряжениями найдите стабилизатор матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Задача 8. Приведите примеры конечных и бесконечных множеств X с транзитивным действием группы G , для которых стабилизатор $St(x)$ какой-то точки $x \in X$ действует на множестве $X \setminus \{x\}$ транзитивно. Покажите, что если это свойство выполнено для одной точки $x \in X$, то оно выполнено и для любой другой точки из X .

Задача 9. Пусть G — конечная коммутативная группа. Докажите, что G допускает транзитивное действие на множестве X из m элементов тогда и только тогда, когда число m делит $|G|$. Верно ли это утверждение для некоммутативных конечных групп G ?

Задача 10. Приведите пример транзитивного действия группы S_4 на множестве из 3 элементов. Может ли для $n \geq 5$ группа S_n транзитивно действовать на множестве из k элементов при $2 < k < n$?

Задача 11. Докажите, что для коммутативной группы транзитивное и эффективное действие является свободным.

Задача 12. Приведите несколько примеров транзитивных и эффективных, но не свободных действий группы подстановок S_n .

Задача 13. Докажите, что если группа S_n , $n \geq 5$, действует на множестве X и хотя бы одна орбита содержит не менее трех элементов, то это действие эффективно.

Задача 14 (формула БЕРНСАЙДА). Пусть конечная группа G действует на конечном множестве X . Докажите, что число орбит этого действия равно

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|, \quad \text{где } X^g := \{x \in X \mid gx = x\}.$$

Задача 15. Докажите, что центр группы — это объединение ее одноэлементных классов сопряженности.

Задача 16. Опишите все конечные группы, в которых один, два или три класса сопряженности.

Задача 17. Докажите, что каждая конечная группа четного порядка содержит элемент порядка 2.

Задача 18. Используя теорему Кэли, докажите, что группа G порядка $2n$ для нечетного n содержит подгруппу индекса 2.¹⁾

Задача 19. Докажите, что любая группа порядка 6 вкладывается в группу S_5 .²⁾

Задача 20. Классифицируйте с точностью до изоморфизма все действия группы порядка 5 на множестве из 9 элементов.

Задача 21. Постройте явно биекцию $G \rightarrow G$, определяющую изоморфизм действий группы G на себе левыми и правыми сдвигами.

Задача 22. Приведите пример конечной группы G , которая допускает ровно три попарно неизоморфных транзитивных действия на некотором множестве X .

¹⁾Эту задачу предложила одна из слушателей лекции в качестве ответа на вопрос, есть ли у теоремы Кэли реальные приложения.

²⁾Слушатель курса Дмитрий Гнатюк заметил, что для любого n было бы интересно найти такое наименьшее k , что каждая группа порядка n вкладывается в группу S_k . Также для данного n хотелось бы найти группу G наименьшего порядка, которая содержит в качестве подгрупп все группы порядка $\leq n$.

2. Кратная транзитивность

Этот раздел посвящен одному из основных интересующих нас в данном курсе понятий — кратной транзитивности.

2.1. Основное определение

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Пусть m — натуральное число. Действие группы G на множестве X , состоящем из хотя бы m элементов, называется m -транзитивным, если для любых наборов $(a_1, \dots, a_m)$ и $(b_1, \dots, b_m)$ попарно различных элементов множества X найдется такой элемент $g \in G$, что $ga_1 = b_1, \dots, ga_m = b_m$.

Другими словами, мы требуем, чтобы любой упорядоченный набор из m попарно различных элементов можно было перевести в любой упорядоченный набор из m попарно различных элементов некоторым элементом группы G . Важно, что элементы в наборах попарно различны: перевести одинаковые элементы в разные и наоборот не получится.

Заметим, что 1-транзитивность — это обычная транзитивность в смысле предыдущего раздела. Если действие m -транзитивно, то оно и k -транзитивно для любого $k \leq m$.

ЛЕММА 1. При $m \geq 2$ действие группы G на множестве X является m -транзитивным тогда и только тогда, когда это действие транзитивно и стабилизатор $\text{St}(x)$ некоторой точки $x \in X$ действует на дополнении $X \setminus \{x\}$ $(m-1)$ -транзитивно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если действие $G \curvearrowright X$ является m -транзитивным, то оно транзитивно и набор $(a_1, a_2, \dots, a_m)$ можно перевести в любой набор вида $(a_1, b_2, \dots, b_m)$. Это доказывает $(m-1)$ -транзитивность действия стабилизатора точки $x = a_1$ на $X \setminus \{a_1\}$.

Для доказательства обратной импликации зафиксируем наборы $(a_1, \dots, a_m)$ и $(b_1, \dots, b_m)$. В силу транзитивности действия G на X найдутся такие элементы $g, g' \in G$, что $ga_1 = x$ и $g'b_1 = x$. Поскольку стабилизатор $\text{St}(x)$ действует на $X \setminus \{x\}$ $(m-1)$ -транзитивно, найдется элемент $h \in \text{St}(x)$, для которого $hga_i = g'b_i$ для всех $i = 2, \dots, m$. Это показывает, что элемент $(g')^{-1}hg$ переводит набор $(a_1, \dots, a_m)$ в набор $(b_1, \dots, b_m)$. $\square$

ПРИМЕРЫ для конечных групп. 1) Действие группы подстановок $S_n \curvearrowright \{1, \dots, n\}$ n -транзитивно.

2) Действие группы четных подстановок $A_n \curvearrowright \{1, \dots, n\}$ в точности $(n - 2)$ -транзитивно. В самом деле, если мы фиксируем образы $n - 2$ элементов, то за счет транспозиции двух оставшихся элементов можно добиться того, чтобы соответствующая подстановка была четной. Если же зафиксировать образы $n - 1$ элемента, то образ оставшегося элемента определен однозначно, и соответствующая подстановка может оказаться нечетной.

2.2. Группы Матьё

Удивительный факт состоит в том, что все другие конечные группы подстановок являются не более чем 5-транзитивными. Более того, есть ровно две новые группы подстановок (отличные от S_n и A_n), которые 5-транзитивны, и еще ровно две группы подстановок, которые 4-транзитивны. Остановимся на этом вопросе подробнее.

В классификацию конечных простых групп входят 26 *спорадических* групп. Так называют конечные простые группы, которые не изоморфны группам A_n , $n \geq 5$, и не являются группами типа Ли, т.е. не реализуются как группы матриц над конечными полями. Первые 5 спорадических групп были открыты Эмилем Матьё около 1860 года. Это группы M_{24} , M_{23} , M_{22} , M_{12} и M_{11} .¹⁾

Индексы снизу показывают порядок множества, на котором данная группа действует транзитивно. Порядки самих этих групп равны

$$|M_{11}| = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11 = 7920, \quad |M_{12}| = 2^6 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 11 = 95040,$$

$$|M_{22}| = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 443520, \quad |M_{23}| = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23 = 10200960$$

и

$$|M_{24}| = 2^{10} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23 = 244823040.$$

В книге [6, § 38] можно найти порождающие групп Матьё. Например, группа M_{11} порождается подстановками

$$(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11) \quad \text{и} \quad (3\ 7\ 11\ 8)(4\ 10\ 5\ 6).$$

Группа M_{23} также является 2-порожденной, а группы M_{12} , M_{22} и M_{24} порождаются тремя подстановками.

Действие группы M_{12} на множестве из 12 элементов и действие группы M_{24} на множестве из 24 элементов 5-транзитивны. Группы

¹⁾Интересно отметить, что следующая спорадическая группа была открыта в 1965 году, т.е. более чем через 100 лет.

M_{11} и M_{23} являются стабилизаторами точки для этих действий, поэтому их действия 4-транзитивны. Наконец, группа M_{22} является стабилизатором точки для действия группы M_{23} и поэтому она 3-транзитивна.

Отметим еще одно интересное свойство групп Матьё. Будем говорить, что m -транзитивное действие группы G на множестве X является m -регулярным, если пересечение стабилизаторов любых m попарно различных точек из множества X единично. Иными словами, в этом случае элемент группы, переводящий один набор из m элементов в другой, не только существует, но и единственен. Заметим, что m -регулярное действие не может быть $(m + 2)$ -транзитивным, но — только для одной серии групп! — может оказаться $(m + 1)$ -транзитивным. (Несложное упражнение — понять, как такое возможно.)

Так вот, оказывается, что группы Матьё M_{12} и M_{11} (а именно, их стандартные действия) являются 5- и 4-регулярными соответственно, а группы M_{24} и M_{23} свойством регулярности не обладают. Утверждение о том, что полный список 5-регулярных конечных групп — это S_6 , S_5 , A_7 и M_{12} , а полный список 4-регулярных конечных групп — это S_5 , S_4 , A_6 и M_{11} , называют теоремой Жордана.

Доказательства результатов об уникальной роли групп Матьё в описании кратно транзитивных групп подстановок опираются на классификацию конечных простых групп и не могут быть включены в этот курс. Подробнее об этом можно прочитать в [12, chapters 6—7].

2.3. 3-транзитивные действия

Оказывается, что (в отличие от 5- и 4-транзитивных действий) существует бесконечно много групп подстановок, отличных от S_n и A_n , действие которых 3-транзитивно. Покажем это.

Напомним, что проективной прямой $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ над полем $\mathbb{K}$ называется множество прямых на координатной плоскости $\mathbb{K}^2$, проходящих через начало координат. На $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ действует группа $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{K})$, которая является фактором группы $\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ невырожденных (2×2) -матриц над $\mathbb{K}$, или, другими словами, группы обратимых линейных операторов на $\mathbb{K}^2$, по подгруппе ненулевых скалярных матриц.

Предложение 4. Действие $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{K})$ на $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ является 3-транзитивным и даже 3-регулярным.

Доказательство. Пусть l_1, l_2, l_3 — тройка попарно различных прямых в $\mathbb{K}^2$ и v_1, v_2, v_3 — ненулевые векторы на соответствующих прямых. Действуя подходящей невырожденной матрицей, можно перевести v_1 и v_2 в векторы стандартного базиса e_1 и e_2 . Тогда пересечение стабилизаторов прямых l_1 и l_2 — это в точности подгруппа T обра-

тимых диагональных матриц. Вектор v_3 имеет в новом базисе две ненулевые координаты, и за счет действия подгруппы T можно добиться того, что $v_3 = (1, 1)$. Легко видеть, что теперь стабилизатор тройки l_1, l_2, l_3 содержит только скалярные матрицы, и, значит, действие группы $\text{PGL}_2(\mathbb{K})$ на $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ является 3-регулярным. $\square$

Применим этот результат в случае конечного поля $\mathbb{F}_q$.¹⁾ Поскольку прямая на плоскости, проходящая через начало координат, определяется ненулевым вектором с точностью до пропорциональности, число таких прямых равно

$$\frac{q^2 - 1}{q - 1} = q + 1.$$

Чтобы задать невырожденную матрицу порядка 2 над полем $\mathbb{F}_q$, надо задать первую строку матрицы, в качестве которой может выступать любая ненулевая строка, и вторую строку, которой может быть любая строка, не пропорциональная первой. Это показывает, что порядок группы $\text{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ равен $(q^2 - 1)(q^2 - q)$, а порядок группы $\text{PGL}_2(\mathbb{F}_q)$ равен

$$\frac{(q^2 - 1)(q^2 - q)}{q - 1} = q(q - 1)(q + 1).$$

При разных значениях q мы получаем бесконечно много различных 3-регулярных действий конечных групп подстановок.

Оказывается, получить классификационные результаты можно даже для 2-транзитивных групп подстановок. Подробнее об этом можно прочитать в [6, глава 9, § 4] и [12, section 7.7].

2.4. Действия нормальных подгрупп

Докажем еще один общий результат о кратно транзитивных действиях.

Предложение 5. Пусть группа G действует на множестве X эффективно и 2-транзитивно. Предположим, что $|X| \geq 3$. Тогда

1) любая неединичная нормальная подгруппа N группы G действует на X транзитивно;

2) $Z(G) = \{e\}$.

Доказательство. Заметим, что группа G переставляет орбиты нормальной подгруппы N . Это следует из равенства $gNx = Ngx$. Поскольку N неединична и действие G эффективно, хотя бы одна N -орбита содержит не менее двух точек. Если N -орбит не меньше двух, можно

¹⁾Читатель не много потеряет, если будет считать, что поле $\mathbb{F}_q$ — это поле $\mathbb{Z}_p$ вычетов по модулю простого числа p и, соответственно, $q = p$.

взять одну пару точек в X из одной N -орбиты, а другую пару точек из разных N -орбит. В этом случае никакой элемент $g \in G$ не переводит первую пару во вторую, что противоречит 2-транзитивности действия. Значит, N -орбита всего одна, что доказывает пункт 1).

Для доказательства 2) заметим, что если центр $Z(G)$ неединичен, то эта нормальная подгруппа должна действовать на X транзитивно. Фиксируем точку $x \in X$. Поскольку элементы из $Z(G)$ коммутируют с элементами из $\text{St}(x)$, группа $Z(G)$ переводит $\text{St}(x)$ -неподвижные точки в $\text{St}(x)$ -неподвижные точки. Это противоречит лемме 1, согласно которой $\text{St}(x)$ действует на $X \setminus \{x\}$ транзитивно. В самом деле, условие $|X| \geq 3$ влечет, что $\text{St}(x)$ -неподвижная точка в X только одна. $\square$

Следствие 2. Действие коммутативной или, более общо, нильпотентной группы G на множестве X , содержащем как минимум 3 элемента, не может быть 2-транзитивным.

Доказательство. Поскольку факторгруппа коммутативной группы коммутативна, а факторгруппа нильпотентной группы нильпотентна, мы можем считать, что действие эффективно. Остается заметить, что центр $Z(G)$ группы G неединичен. $\square$

Задачи к разделу 2

Задача 23. Докажите, что свободное действие группы на множестве, содержащем хотя бы 3 элемента, не может быть 2-транзитивным.

Задача 24. Приведите пример транзитивного действия группы $(\mathbb{Z}, +)$ на множестве натуральных чисел. Может ли такое действие быть 2-транзитивным?

Задача 25. Пусть H — подгруппа группы G . Известно, что действие группы G на множестве левых смежных классов G/H левыми сдвигами 2-транзитивно. Докажите, что подгруппа H совпадает со своим нормализатором $N_G(H)$.

Задача 26. Пусть $G = \text{GL}_3(\mathbb{R})$ и H — подгруппа верхнетреугольных матриц в G . Докажите, что H совпадает со своим нормализатором в G , но действие G на G/H не является 2-транзитивным.

Задача 27. Пусть V — это n -мерное векторное пространство над полем $\mathbb{Z}_2$, $n \geq 2$. Пусть $G = \text{Aff}(V)$ — группа аффинных преобразований и $N \subseteq G$ — (нормальная) подгруппа параллельных переносов. Докажите, что G действует на V 3-транзитивно, но не 4-транзитивно, а N действует на V транзитивно, но не 2-транзитивно. Это показывает, что при переходе к нормальной подгруппе степень транзитивности может падать больше чем на 1.

Задача 28. Пусть группа G эффективно и 2-транзитивно действует на бесконечном множестве X . Докажите, что в G нет нетривиальных нормальных конечных подгрупп.

Задача 29. Докажите, что действия S_n на множестве $\{1, \dots, n\}$ и S_{n+1} на множестве $\{1, \dots, n+1\}$ являются n -регулярными, а действие A_n на множестве $\{1, \dots, n\}$ является $(n-2)$ -регулярным.

Задача 30. Докажите, что группа $SL_2(\mathbb{R})$ не может эффективно и 2-транзитивно действовать на каком-либо множестве. Покажите, что при этом факторгруппа $PSL_2(\mathbb{R})$ этой группы допускает 2- и даже 3-транзитивное действие.

Задача 31. Докажите, что при $n \geq 2$ группа $PGL_{n+1}(\mathbb{K})$ действует на проективном пространстве $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ 2-транзитивно, но не 3-транзитивно.

3. Бесконечная транзитивность

В этом разделе мы перейдем к рассмотрению бесконечной транзитивности — понятия, которое имеет смысл только для бесконечных групп.

3.1. Бесконечно транзитивные действия

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. Действие $G \curvearrowright X$ *бесконечно транзитивно*, если оно m -транзитивно для любого натурального числа m .

ПРИМЕР 1. Рассмотрим бесконечное множество X и группу всех биекций $S(X)$ множества X . Тогда естественное действие $S(X) \curvearrowright X$ бесконечно транзитивно.

Было бы интересно построить бесконечно транзитивные действия относительно небольших бесконечных групп G . Например, заметим, что если группа G циклическая, то она коммутативна, и предложение 5 показывает, что такая группа не может действовать даже 2-транзитивно.

В то же время несложно построить пример бесконечно транзитивного действия 2-порожденной группы. Для этого рассмотрим подгруппу G группы биекций $S(\mathbb{Z})$, порожденную сдвигом $h: i \mapsto i + 1$ и транспозицией (12). Сопрягая транспозицию (12) с помощью кратных сдвига, мы получим все транспозиции соседних элементов в $\mathbb{Z}$. Поскольку транспозиции соседних элементов порождают группу S_n , мы заключаем, что группа G содержит все подстановки на любом конечном отрезке множества $\mathbb{Z}$. Отсюда следует, что группа G действует на $\mathbb{Z}$ бесконечно транзитивно.¹⁾

Далее нам будет полезна другая конструкция бесконечно транзитивной 2-порожденной группы биекций множества $\mathbb{Z}$, заимствованная из работы [15].

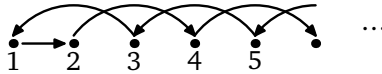
ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Биекция f на множестве X называется *циклом*, если циклическая группа $\langle f \rangle$ действует на X транзитивно.

Пусть h — это снова сдвиг $i \mapsto i + 1$, а f — цикл на множестве натуральных чисел, который оставляет все неположительные целые числа

¹⁾Этот пример был предложен одним из слушателей.

неподвижными. Пример цикла f на множестве натуральных чисел:

$$1 \mapsto 2, \quad 2s + 1 \mapsto 2s - 1, \quad 2s \mapsto 2s + 2, \quad s \geq 1.$$



ТЕОРЕМА 1. *Группа $G = \langle f, h \rangle$ действует на множестве $\mathbb{Z}$ бесконечно транзитивно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим подгруппы

$$G_n = \langle f, h^{-1}fh, \dots, h^{-n}fh^n \rangle \subseteq G, \quad n \geq 0.$$

ЛЕММА 2. *Группа G_n действует на множестве*

$$X_n = \{-n + 1, -n + 2, \dots\}$$

$(n + 1)$ -транзитивно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Индукция по n . База $n = 0$: здесь $G_0 = \langle f \rangle$, $X_0 = \mathbb{N}$ и по определению цикла действие $\langle f \rangle \cap \mathbb{N}$ транзитивно.

Шаг индукции: заметим сначала, что раз циклическая подгруппа $G_0 = \langle f \rangle$ действует транзитивно на $X_0 = \mathbb{N}$, то сопряженная ей подгруппа $\langle h^{-n}fh^n \rangle = h^{-n}G_0h^n$ действует на $X_n = h^{-n}(X_0)$ транзитивно. Действительно, чтобы перевести $h^{-n}(i)$ в $h^{-n}(j)$, где $i, j \in X_0$, найдем такой элемент $g = f^k \in G_0$, что $g(i) = j$, и тогда

$$h^{-n}gh^n(h^{-n}(i)) = h^{-n}(g(i)) = h^{-n}(j).$$

С другой стороны, подгруппа $\langle h^{-n}fh^n \rangle$ вложена в G_n , поэтому и все действие G_n на X_n тем более транзитивно.

Применим теперь лемму 1, взяв в качестве элемента x наименьший элемент $-n + 1 \in X_n$. Действительно, $\text{St}(-n + 1)$ содержит подгруппу G_{n-1} , которая по предположению индукции n -транзитивна на X_{n-1} . В силу леммы 1, действие $G_n \cap X_n$ является $(n + 1)$ -транзитивным. Лемма 2 доказана. $\square$

Вернемся теперь к доказательству теоремы. Возьмем $m \in \mathbb{N}$, и пусть $(a_1, \dots, a_m)$ и $(b_1, \dots, b_m)$ — наборы попарно различных целых чисел. Надо найти элемент из G , который один набор переведет в другой.

Пусть n таково, что $a_i > -n$ и $b_j > -n$ для любых i, j и $n \geq m - 1$. Тогда оба набора лежат в множестве X_n . Поскольку подгруппа G_n действует на X_n $(n + 1)$ -транзитивно и $m \leq n + 1$, мы можем подходящим элементом из G_n перевести набор $(a_1, \dots, a_m)$ в набор $(b_1, \dots, b_m)$. $\square$

3.2. Бесконечно транзитивные группы

Мы только что разобрали пример одного бесконечно транзитивного действия. Естественно задаться вопросом: а какие группы вообще могут действовать бесконечно транзитивно?

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Бесконечная группа G называется *бесконечно транзитивной*, если G допускает эффективное бесконечно транзитивное действие на некотором множестве.

Давайте начнем с одного из самых естественных примеров бесконечных групп — со свободной группы. Напомним, что *свободная группа* F_2 — это группа, свободно порожденная двумя символами a и b :

$$F_2 = \langle a, b \rangle = \{a^{\alpha_1} b^{\beta_1} a^{\alpha_2} b^{\beta_2} \dots a^{\alpha_k} b^{\beta_k} \mid \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{Z}\}.$$

Умножение элементов группы, т. е. групповых слов, — это приписывание с учетом возможных сокращений на стыке, например,

$$(a^2 b a^2 b^{-2})(b^2 a^{-1} b^4 a^{-5}) = a^2 b a^2 b^{-2} b^2 a^{-1} b^4 a^{-5} = a^2 b a b^4 a^{-5}.$$

Легко проверить, что эта операция ассоциативна, нейтральный элемент — пустое слово, а обратное слово получается из данного слова обращением порядка букв и взятием обратных показателей степеней.

Тот факт, что группа G является 2-порожденной, равносильно тому, что G является гомоморфным образом группы F_2 . В частности, каждое действие 2-порожденной группы определяет действие группы F_2 , однако последнее не обязательно эффективно.

Можно ли построить эффективное бесконечно транзитивное действие группы F_2 ? Как показано в [15, section 2], цикл f в теореме 1 можно подобрать так, что группа G , порожденная элементами f и h , будет порождаться ими свободно. Соответствующая конструкция довольно технична, и мы не будем ее здесь приводить.

Сейчас мы докажем полезный и достаточно неожиданный общий факт.

ТЕОРЕМА 2. *Предположим, что группа G действует на множестве X эффективно и бесконечно транзитивно. Тогда каждая неединичная нормальная подгруппа N группы G также действует на X бесконечно транзитивно.*

Доказательство. Покажем, что действие подгруппы N на X m -транзитивно для любого натурального числа m . Для этого индукцией по m будем доказывать следующее утверждение: действие *любой* неединичной нормальной подгруппы *любой* эффективно и бесконечно транзи-

тивно действующей группы m -транзитивно. Для $m = 1$ это в точности первое заключение предложения 5: нормальная подгруппа N неединична, и потому ее действие транзитивно.

Выполним теперь шаг индукции. Для этого зафиксируем какой-нибудь элемент $x_1 \in X$ и рассмотрим его стабилизатор $G_1 := \text{St}(x_1)$. Тогда $N_1 := N \cap G_1$ — нормальная подгруппа в G_1 .

Более того, действие N на X транзитивно и N_1 — стабилизатор точки x_1 для этого действия. В силу леммы 1, достаточно проверить, что N_1 действует m -транзитивно на $X_1 := X \setminus \{x_1\}$: тогда действие N на X будет $(m + 1)$ -транзитивным, что завершит шаг индукции.

Опять же в силу леммы 1, действие G_1 на X_1 бесконечно транзитивно, поэтому достаточно проверить, что подгруппа N_1 неединична: после этого m -транзитивность действия N_1 следует из предположения индукции.

Допустим, что $N_1 = \{e\}$. Мы уже знаем, что группа N действует на X транзитивно, и раз для этого действия стабилизатор точки тривиален, то N можно отождествить с X : соответствие

$$h \mapsto x = hx_1$$

является биекцией. Заметим, что при этом отождествлении действие группы G_1 на X соответствует действию на N сопряжениями. Действительно, для любого $g \in G_1$ и любого $h \in N$, применив g к точке $hx_1 \in X$, получаем

$$g(hx_1) = ghg^{-1}(gx_1) = (ghg^{-1})x_1,$$

где мы воспользовались тем, что $gx_1 = x_1$. Поэтому G_1 действует сопряжениями и на элементах $N \setminus \{e\}$, соответствующих точкам X_1 .

Остается заметить, что действие сопряжениями на $N \setminus \{e\}$ никогда не бывает бесконечно транзитивным (и даже 3-транзитивным). Действительно, сопряжения переводят пары вида (h, h^{-1}) в пары того же вида. Это показывает, что действие $G_1 \curvearrowright N \setminus \{e\}$ не является 2-транзитивным, если только для всех элементов $h \in N \setminus \{e\}$ не выполнено $h = h^{-1}$, т. е. если не все элементы из $N \setminus \{e\}$ имеют порядок 2.

Если все элементы из $N \setminus \{e\}$ имеют порядок 2, то группа N коммутативна и является аддитивной группой $(V, +)$ некоторого векторного пространства V над полем $\mathbb{Z}_2$. При этом $G_1 \subseteq \text{GL}(V)$, поскольку сопряжение сохраняет операцию сложения. Но линейные преобразования сохраняют линейную зависимость и, значит, не 3-транзитивны: тройку линейно зависимых векторов в тройку линейно независимых векторов линейным преобразованием не перевести. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы 2. $\square$

Известно, что коммутант $[F_2, F_2]$ свободной группы F_2 — это свободная группа F_∞ , порожденная счетным числом свободных образующих. Теорема 2 показывает, что если мы построили эффективное бесконечно транзитивное действие группы F_2 на некотором множестве X , то на этом множестве бесконечно транзитивно действует и группа F_∞ .

Зафиксируем натуральное $n \geq 2$. Можно показать, что минимальная нормальная подгруппа в группе $F_2 = \langle a, b \rangle$, содержащая элементы a^{n-1} и b , является свободной группой F_n с n порождающими. Тем самым из теоремы 2 следует, что группы F_n , $n \geq 2$, являются бесконечно транзитивными.

Выяснение вопроса о том, является ли данная бесконечная группа G бесконечно транзитивной, — это активно развивающееся направление современной теории групп.

Задачи к разделу 3

Задача 32. Приведите пример группы, все элементы которой имеют конечный порядок и которая действует на множестве натуральных чисел бесконечно транзитивно.

Задача 33. Подгруппа H группы G называется субнормальной, если есть цепочка подгрупп

$$G = H_0 \supseteq H_1 \supseteq H_2 \supseteq \dots \supseteq H_s = H,$$

в которой каждая подгруппа H_i нормальна в H_{i-1} . Докажите, что если группа G действует на множестве X эффективно и бесконечно транзитивно, то действие нетривиальной субнормальной подгруппы H на X обладает этими же свойствами.

Задача 34. Докажите, что если группа G бесконечно транзитивна, то G не содержит нетривиальных конечных нормальных подгрупп и нетривиальных нильпотентных нормальных подгрупп.

Задача 35. Предположим, что группа G допускает бесконечно транзитивное действие. Может ли группа G содержать нормальную подгруппу конечного индекса?

Задача 36. Пусть группа G действует на множестве X бесконечно транзитивно и $H \subseteq G$ — подгруппа конечного индекса. Докажите, что действие H на X также бесконечно транзитивно.

Задача 37*. Найдите достаточные условия на подгруппу H бесконечной группы G , при которых действие G на G/H бесконечно транзитивно.

4. Автоморфизмы алгебраических многообразий

В этом разделе мы рассмотрим свойство бесконечной транзитивности для групп, возникающих в алгебраической геометрии.

4.1. Полиномиальные автоморфизмы аффинного пространства

Зафиксируем бесконечное поле K и рассмотрим аффинное пространство

$$\mathbb{A}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in K\}$$

над полем K . Напомним, что *полиномиальный автоморфизм* пространства $\mathbb{A}^n$ — это отображение

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n)),$$

где $f_1, \dots, f_n$ — многочлены, для которого существует обратное отображение

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_n(x_1, \dots, x_n)),$$

также заданное многочленами $g_1, \dots, g_n$, т. е.

$$g_i(f_1, \dots, f_n) = x_i \quad \text{и} \quad f_i(g_1, \dots, g_n) = x_i$$

для всех $i = 1, \dots, n$. Полиномиальные автоморфизмы образуют группу $\text{Aut}(\mathbb{A}^n)$.

Например, аффинное преобразование

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \left(\sum_{j=1}^n a_{1j}x_j + b_1, \dots, \sum_{j=1}^n a_{nj}x_j + b_n \right)$$

является полиномиальным автоморфизмом тогда и только тогда, когда выполнено условие $\det((a_{ij})) \neq 0$.

Приведем теперь пример неаффинного полиномиального автоморфизма. Для $n = 2$ можно рассмотреть прямое преобразование $(x_1, x_2) \mapsto (x_1 + x_2^2, x_2)$ и обратное преобразование $(x_1, x_2) \mapsto (x_1 - x_2^2, x_2)$. Более общо, можно рассмотреть прямое отображение

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (x_1 + h(x_2, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n)$$

для любого многочлена h от $n - 1$ переменной. Обратным отображением будет

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (x_1 - h(x_2, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n).$$

Используя индукцию, легко показать, что автоморфизмами являются любые отображения вида

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (x_1 + h_1(x_2, \dots, x_n), x_2 + h_2(x_3, \dots, x_n), \dots, x_n + h_n),$$

где h_i — многочлен от $n - i$ переменной и, в частности, многочлен h_n является константой. Такие автоморфизмы называются *треугольными*. Треугольные автоморфизмы образуют подгруппу группы $\text{Aut}(\mathbb{A}^n)$.

Естественно спросить, представляется ли каждый полиномиальный автоморфизм пространства $\mathbb{A}^n$ в виде многократной композиции аффинных и треугольных автоморфизмов. При $n = 2$ это доказано Юнгом (1942) для полей нулевой характеристики и ван дер Кюлком (1953) для произвольных полей. При $n = 3$ Нагата в 1972 году предположил, что автоморфизм

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 - 2x_2\Delta - x_3\Delta^2, x_2 + x_3\Delta, x_3), \quad \text{где } \Delta = x_1x_3 + x_2^2,$$

является диким, т.е. не лежит в подгруппе группы $\text{Aut}(\mathbb{A}^3)$, порожденной аффинными и треугольными автоморфизмами. Эта гипотеза была доказана Шестаковым и Умирбаевым в 2004 году. Ранее Смит (1975) доказала, что если к автоморфизму Нагаты добавить еще одну неподвижную переменную и рассмотреть это отображение как автоморфизм пространства $\mathbb{A}^4$, такой автоморфизм окажется ручным, т.е. будет представим как композиция аффинных и треугольных автоморфизмов. Отметим, что в настоящее время для группы $\text{Aut}(\mathbb{A}^3)$ нет даже гипотетического кандидата на роль явной системы порождающих.

При $n \geq 4$ вопрос о наличии диких автоморфизмов остается открытым. Вероятным претендентом на вакансию дикого автоморфизма пространства $\mathbb{A}^4$ является *автоморфизм Аника*

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_1, x_2 + x_1\nabla, x_3, x_4 + x_3\nabla), \quad \text{где } \nabla = x_1x_4 - x_2x_3.$$

Несмотря на то что структура группы $\text{Aut}(\mathbb{A}^n)$ остается загадочной, на многие вопросы об автоморфизмах аффинного пространства можно отвечать, используя только аффинные и треугольные автоморфизмы. Приведем пример такого результата.

ТЕОРЕМА 3. Если $n \geq 2$, то группа полиномиальных автоморфизмов $\text{Aut}(\mathbb{A}^n)$ действует на пространстве $\mathbb{A}^n$ бесконечно транзитивно.

Доказательство. Зафиксируем натуральное число m и рассмотрим набор попарно различных точек

$$a_1 = (x_1^1, \dots, x_n^1), \dots, a_m = (x_1^m, \dots, x_n^m).$$

Достаточно доказать, что этот набор можно перевести в набор

$$(1, \dots, 1), (2, \dots, 2), \dots, (m, \dots, m)$$

подходящим полиномиальным автоморфизмом.¹⁾ Сделаем это в три шага.

Шаг 1. Добьемся того, чтобы $x_1^i \neq x_1^j$ при $i \neq j$. Если $x_1^1 = x_1^2$, то без ограничения общности можно считать, что $x_2^1 \neq x_2^2$. Напомним, что *интерполяционный многочлен Лагранжа* — это многочлен степени $\leq n-1$, который в заданных попарно различных точках $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ принимает предписанные значения $f(\alpha_1) = \beta_1, \dots, f(\alpha_n) = \beta_n$. Такой многочлен существует и единственен, и для него нетрудно выписать явную формулу:

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \beta_i \frac{(x - \alpha_1) \dots \widehat{(x - \alpha_i)} \dots (x - \alpha_n)}{(\alpha_i - \alpha_1) \dots \widehat{(\alpha_i - \alpha_i)} \dots (\alpha_i - \alpha_n)}.$$

Итак, подберем многочлен $f(x)$ так, что $f(x_2^1) = a$ и $f(x_2^i) = 0$ при всех $x_2^i \neq x_2^1$, причем $a \neq x_1^i - x_1^j$ для любых i, j . Применив преобразование

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (x_1 + f(x_2), x_2, \dots, x_n),$$

получим $x_1^1 \neq x_1^2$, и новых совпадений первых координат не возникнет.

Шаг 2. Пусть $x_1^i \neq x_1^j$ для всех $i \neq j$. Подберем многочлены

$$f_2(x), \dots, f_n(x)$$

так, что $x_s^i + f_s(x_1^i) = i$, где $s = 2, \dots, n$, $i = 2, \dots, m$. Применив треугольный автоморфизм

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (x_1, x_2 + f_2(x_1), \dots, x_n + f_n(x_1)),$$

получим точки $(x_1^1, 1, \dots, 1), \dots, (x_1^m, m, \dots, m)$.

Шаг 3. Подбирая такой многочлен $\tilde{f}(x)$, что $x_1^i + \tilde{f}(i) = i$, и применяя преобразование $(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (x_1 + \tilde{f}(x_2), x_2, \dots, x_n)$, приходим к набору точек

$$(1, \dots, 1), \dots, (m, \dots, m).$$

□

¹⁾Здесь мы предполагаем, что поле K имеет нулевую характеристику. Доказательство в общем случае можно провести по той же схеме с небольшими изменениями.

Следствие 3. Если $n \geq 2$, некоторое свойство выполнено для одного набора из t попарно различных точек на $\mathbb{A}^n$ и это свойство сохраняется при полиномиальных автоморфизмах, то это свойство выполнено для любого набора из t попарно различных точек на $\mathbb{A}^n$.

Доказательство. Теорема 3 показывает, что произвольный набор из t попарно различных точек можно подходящим полиномиальным автоморфизмом перевести в данный набор. $\square$

В качестве приложения следствия 3 заметим, что через любой конечный набор точек в $\mathbb{A}^n$ можно провести кривую, изоморфную прямой $\mathbb{A}^1$. В самом деле, возьмем набор точек той же мощности на координатной оси и переведем его в данный набор полиномиальным автоморфизмом. Образ координатной оси при этом автоморфизме будет искомой кривой.

Отметим, что для аффинной прямой $\mathbb{A}^1$ утверждение теоремы 3 не выполнено: ее полиномиальные автоморфизмы — это просто аффинные отображения, а они сохраняют величину $\frac{x_1 - x_3}{x_3 - x_2}$, так что соответствующее действие не может быть 3-транзитивным. Не выполнено утверждение теоремы 3 и для проективной прямой $\mathbb{P}^1(K)$: ее полиномиальные автоморфизмы это — уже встречавшаяся нам группа проективных преобразований $\text{PGL}_2(K)$, а такие преобразования сохраняют двойное отношение четырех точек, так что соответствующее действие не будет 4-транзитивным.

4.2. Аффинные многообразия

В завершение мы обсудим, как теорему 3 можно обобщить со случая аффинного пространства на другие аффинные алгебраические многообразия. Для простоты мы будем работать над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$.

Напомним, что *аффинным алгебраическим многообразием* называется множество нулей X системы уравнений

$$f_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \dots, f_m(x_1, \dots, x_n) = 0$$

в $\mathbb{A}^n$, где $f_1, \dots, f_m$ — некоторые многочлены. Заметим, что более правильно называть аффинным многообразием класс изоморфизма таких множеств нулей, не фиксируя конкретное вложение многообразия в аффинное пространство. Но сейчас мы не будем погружаться в такие тонкости.

Если написать систему из одного уравнения $0 = 0$, в качестве аффинного многообразия мы получим все пространство $\mathbb{A}^n$. Уравнение

$1 = 0$ показывает, что пустое множество также является аффинным многообразием. Наконец, множество нулей одного непостоянного многочлена $f_1(x_1, \dots, x_n)$ называется *аффинной гиперповерхностью* в пространстве $\mathbb{A}^n$.

С каждым алгебраическим многообразием X связана алгебра регулярных функций $\mathbb{C}[X]$, которая определяется как алгебра функций на X , полученных ограничением на X всевозможных многочленов на пространстве $\mathbb{A}^n$. Другими словами, алгебра $\mathbb{C}[X]$ — это факторалгебра алгебры многочленов $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ по идеалу $I(X)$ всех многочленов, которые тождественно обращаются в нуль на подмножестве X .

Определим группу полиномиальных автоморфизмов $\text{Aut}(X)$ аффинного многообразия X . Эта группа будет состоять из полиномиальных отображений $\varphi: \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^n$, которые переводят подмножество X в себя и для которых найдется полиномиальное отображение $\psi: \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^n$ со следующими свойствами: оно также переводит X в себя и композиции $\varphi \circ \psi$ и $\psi \circ \varphi$ индуцируют тождественное отображение на X . Нетрудно показать, что группа $\text{Aut}(X)$ — это в точности группа автоморфизмов алгебры $\mathbb{C}[X]$.

Рассмотрим аддитивную группу $\mathbb{G}_a$ поля комплексных чисел, т. е. $\mathbb{G}_a = (\mathbb{C}, +)$. Нас будут интересовать действия этой группы на аффинном многообразии X , для которых отображение действия $\mathbb{G}_a \times X \rightarrow X$ задано многочленами. В этом случае мы получаем гомоморфизм $\mathbb{G}_a \rightarrow \text{Aut}(X)$, образ которого называют $\mathbb{G}_a$ -подгруппой группы $\text{Aut}(X)$. Такую подгруппу можно рассматривать как однопараметрическую группу автоморфизмов $\varphi_t: X \rightarrow X$, где $t \in \mathbb{C}$ и $\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{t+s}$.

Определим *группу специальных автоморфизмов* $\text{SAut}(X)$ аффинного многообразия X как подгруппу в $\text{Aut}(X)$, порожденную всеми $\mathbb{G}_a$ -подгруппами. Оказывается, эта подгруппа тесно связана с бесконечно транзитивными действиями: здесь возникают неожиданные результаты в духе «транзитивность влечет бесконечную транзитивность». Более точно, имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4 ([9, theorem 0.1]). Пусть X — неприводимое аффинное многообразие размерности не ниже 2. Предположим, что группа $\text{SAut}(X)$ транзитивно действует на множестве гладких точек X^{reg} многообразия X . Тогда действие $\text{SAut}(X)$ на X^{reg} бесконечно транзитивно.

Полагаясь на эрудицию или интуицию читателя, мы не будем определять все используемые в формулировке теоремы 4 термины. Вместо этого мы расскажем об одной идее, которая отчасти объясняет, почему группа $\text{SAut}(X)$ обладает определенной гибкостью и как эта гибкость может привести к бесконечной транзитивности.

Действие группы $\mathbb{G}_a$ автоморфизмами алгебры $\mathbb{C}[X]$ можно продифференцировать: рассмотрим

$$D(f) := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi_t(f).$$

Тогда $D: \mathbb{C}[X] \rightarrow \mathbb{C}[X]$ — линейный оператор, удовлетворяющий *правилу Лейбница* (проверьте это!):

$$D(fh) = D(f)h + fD(h) \quad \text{для любых } f, h \in \mathbb{C}[X].$$

Такие линейные операторы называют *дифференцированиями* алгебр.

Оказывается, что наш оператор D обладает дополнительным свойством *локальной нильпотентности*. А именно, для любого $f \in \mathbb{C}[X]$ найдется такое натуральное k , что $D^k(f) = 0$.

Пример 2. Пусть $X = \mathbb{A}^2$, $\mathbb{C}[X] = \mathbb{C}[x, y]$ и $\varphi_t(x, y) = (x + ty^2, y)$. Дифференцируя по t при $t = 0$, получаем $D(x) = y^2$ и $D(y) = 0$. Это показывает, что D совпадает с локально нильпотентным дифференцированием $y^2 \frac{\partial}{\partial x}$ алгебры $\mathbb{C}[x, y]$.

Обратно, по каждому локально нильпотентному дифференцированию D алгебры $\mathbb{C}[X]$ можно восстановить соответствующее $\mathbb{G}_a$ -действие. А именно, для данной функции $f \in \mathbb{C}[X]$ определим $\varphi_t(f)$ с помощью формулы для экспоненты:

$$\varphi_t(f) = \exp(tD)(f) = f + \frac{t}{1!}D(f) + \frac{t^2}{2!}D^2(f) + \frac{t^3}{3!}D^3(f) + \dots$$

В силу локальной нильпотентности D для каждого f сумма справа конечна, и можно проверить, что мы получаем корректно определенную однопараметрическую группу автоморфизмов $\{\varphi_t\}$ алгебры $\mathbb{C}[X]$. Тем самым $\mathbb{G}_a$ -подгруппы в группе $\text{Aut}(X)$ биективно соответствуют локально нильпотентным дифференцированиям D алгебры $\mathbb{C}[X]$. А изучать дифференцирования намного проще.

В качестве конкретного приложения этой техники заметим, что если D — локально нильпотентное дифференцирование алгебры $\mathbb{C}[X]$ и $D(h) = 0$ для некоторого $h \in \mathbb{C}[X]$, то линейный оператор hD , определенный по правилу $(hD)(f) := hD(f)$, также является локально нильпотентным дифференцированием. Полученные таким образом дифференцирования называют *репликами* дифференцирования D .

Для знакомого с дифференциальной геометрией читателя отметим аналогию: $\mathbb{G}_a$ -подгруппе соответствует однопараметрическая подгруппа диффеоморфизмов, являющихся сдвигами за время t вдоль

векторного поля v на компактном многообразии X . Оператору D соответствует оператор дифференцирования вдоль этого векторного поля (уже не обязательно локально нильпотентный), а восстановление по нему $\mathbb{G}_a$ -подгруппы с помощью экспоненты — нахождению сдвига вдоль векторного поля за данное время t ; реплике же соответствует переход от поля v к полю hv .

Возвращаясь к репликам, отметим, что им также соответствуют $\mathbb{G}_a$ -подгруппы, типичные орбиты действий которых на X совпадают с типичными орбитами $\mathbb{G}_a$ -действия, отвечающего дифференцированию D . Но скорость движения по орбитам при переходе к репликам изменяется. В частности, те $\mathbb{G}_a$ -орбиты исходного действия, которые попадают в подмногообразие $h = 0$, становятся кривыми неподвижных точек.

Например, дифференцирование $D = \frac{\partial}{\partial x}$ алгебры $\mathbb{C}[x, y]$ соответствует $\mathbb{G}_a$ -подгруппе параллельных переносов $(x + t, y)$. Переход к реплике $h(y)\frac{\partial}{\partial x}$ означает переход к $\mathbb{G}_a$ -подгруппе $(x + th(y), y)$. Относительно этой подгруппы неподвижны точки на прямых $y = c$, где c пробегает корни многочлена $h(y)$.

Это соображение показывает, что переход к репликам позволяет останавливать движение точек на одних линиях уровня функции h , продолжая двигать точки на других линиях уровня. Это важный шаг в доказательстве теоремы 4.

Наконец, укажем широкий класс явно заданных аффинных гиперповерхностей X , для которых действие группы $\text{SAut}(X)$ на множестве гладких точек X^{reg} бесконечно транзитивно.

ТЕОРЕМА 5 ([13, theorem 5.1]). Пусть $n \geq 3$ и X — гиперповерхность в $\mathbb{A}^n$, заданная уравнением

$$x_1 x_2 = f(x_3, \dots, x_n)$$

для некоторого непостоянного многочлена $f \in \mathbb{C}[x_3, \dots, x_n]$. Тогда группа $\text{SAut}(X)$ действует на множестве гладких точек X^{reg} бесконечно транзитивно.

Интересно было бы узнать, является ли бесконечная транзитивность действия группы $\text{SAut}(X)$ единственной причиной для бесконечной транзитивности действия группы всех полиномиальных автоморфизмов $\text{Aut}(X)$ аффинного многообразия X . В работе [8] показано, что это верно при незначительных ограничениях на многообразие X , и, вероятно, это верно всегда. Подробнее о бесконечной транзитивности действий групп автоморфизмов алгебраических многообразий можно прочитать в обзоре [1].

Задачи к разделу 4

Задача 38. Докажите, что группа полиномиальных автоморфизмов $\text{Aut}(\mathbb{A}^1)$ аффинной прямой $\mathbb{A}^1$ состоит из автоморфизмов вида $x \mapsto ax + b$, $a \neq 0$.

Задача 39. Докажите, что группа полиномиальных автоморфизмов $\text{Aut}(\mathbb{A}^1)$ аффинной прямой $\mathbb{A}^1$ действует на этой прямой 2-транзитивно, но не 3-транзитивно, а также действие $\text{Aut}(\mathbb{A}^1)$ на $\mathbb{A}^1$ является 2-регулярным.

Задача 40. Приведите примеры нетривиальных нормальных подгрупп в группах полиномиальных автоморфизмов $\text{Aut}(\mathbb{A}^1)$ и $\text{Aut}(\mathbb{A}^n)$ при $n \geq 2$.

Задача 41. Покажите, что $\text{SAut}(\mathbb{A}^n) \neq \text{Aut}(\mathbb{A}^n)$ для любого натурального n .

Задача 42. Проверьте, что треугольное полиномиальное отображение допускает полиномиальное обратное.

Задача 43. Найдите явные формулы для автоморфизмов, обратных к автоморфизмам Нагаты и Аника.

Задача 44. Докажите теорему 3 над бесконечным полем положительной характеристики.

Задача 45. Покажите, что при $n \geq 2$ группа $\text{SAut}(\mathbb{A}^n)$ действует на $\mathbb{A}^n$ бесконечно транзитивно.

5. Бесконечная транзитивность для конечных наборов подгрупп

Вернемся к действию полиномиальных автоморфизмов на плоскости $\mathbb{A}^2$. В этом разделе основное поле также будем считать полем комплексных чисел $\mathbb{C}$.

В доказательстве теоремы 3 мы рассматривали преобразования, которые при $n = 2$ имеют вид

$$(x + f(x), y) \quad \text{и} \quad (x, y + h(y)),$$

где многочлены f и h строились как интерполяционные многочлены Лагранжа и их степень зависела от числа m точек в перемещаемом наборе.

Можно ли получить бесконечную транзитивность, действуя многочленами ограниченной степени? Фиксируем числа $a, b \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ и рассмотрим две группы преобразований:

$$F_a = \{(x + \alpha y^a, y) \mid \alpha \in \mathbb{C}\} \quad \text{и} \quad S_b = \{(x, y + \beta x^b) \mid \beta \in \mathbb{C}\}.$$

Рассмотрим подгруппу $H_{a,b}$ в $\text{Aut}(\mathbb{A}^2)$, порожденную подгруппами F_a и S_b . Выясним, какова кратность транзитивности ее действия на $\mathbb{A}^2$ или $\mathbb{A}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Разберем случаи в зависимости от a и b .

- Если $a = 0$ или $b = 0$, к соответствующей координате прибавляются константы. В этом случае группа $H_{a,b}$ действует на $\mathbb{A}^2$ транзитивно, но поскольку преобразования из группы $H_{a,b}$ сохраняют разности соответствующих координат, это действие не является 2-транзитивным. Поэтому далее мы считаем, что $ab \neq 0$, и рассматриваем действие $H_{a,b}$ на $\mathbb{A}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

- При $a = b = 1$ получаем линейные преобразования. Они сохраняют свойство векторов быть пропорциональными, что также противоречит 2-транзитивности.

- Пусть $ab \geq 3$. Рассмотрим первообразный корень ω степени $ab - 1$ из 1. Это означает, что $\omega^{ab-1} = 1$ и $\omega^k \neq 1$ при $0 < k < ab - 1$.

Рассмотрим пары вида

$$\{(P, Q) \in \mathbb{A}^2 \times \mathbb{A}^2 \mid P = (x, y), Q = (\omega x, \omega^b y)\}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 & (x, y) \mapsto (x + \alpha y^a, y), \\
 F_a: & (\omega x, \omega^b y) \mapsto (\omega x + \alpha \omega^{ab} y^a, \omega^b y) = (\omega(x + \alpha y^a), \omega^b y), \\
 & (x, y) \mapsto (x, y + \beta x^b), \\
 S_b: & (\omega x, \omega^b y) \mapsto (\omega x, \omega^b y + \beta \omega^b x^b) = (\omega x, \omega^b(y + \beta x^b)).
 \end{aligned}$$

Эти вычисления показывают, что группа $H_{a,b}$ сохраняет множество пар такого вида и не может действовать на $\mathbb{A}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ даже 2-транзитивно. Нам остается рассмотреть последний случай: $ab = 2$.

• Случай $ab = 2$. С точностью до перестановки переменных мы можем считать, что $a = 1$ и $b = 2$. Другими словами, мы рассматриваем группу $H_{1,2}$, порожденную преобразованиями вида

$$(x + \alpha y, y) \quad \text{и} \quad (x, y + \beta y^2), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

Здесь обнаруживается достаточно неожиданный эффект.

ТЕОРЕМА 6. *Группа $H_{1,2}$ действует на $\mathbb{A}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ бесконечно транзитивно.*

В настоящее время известны два принципиально различных доказательства этого факта: одно дано в работе [14], другое в препринте [11]. Каждое из этих доказательств не является элементарным. Было бы полезно найти элементарное доказательство теоремы 6.

В заключение мы приведем два факта о бесконечной транзитивности действий полиномиальных автоморфизмов ограниченной степени на аффинных пространствах большой размерности.

ТЕОРЕМА 7 ([10, theorem 5.3]). *Пусть $n \geq 3$ и G — подгруппа группы $\text{Aut}(\mathbb{A}^n)$, порожденная преобразованиями вида*

$$(x_1, \dots, x_i + \alpha x_j^2, \dots, x_n), \quad \alpha \in \mathbb{C}, \quad \text{для всех } i \neq j.$$

Тогда действие $G \cap \mathbb{A}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ бесконечно транзитивно.

Еще один результат касается «небольших» подгрупп группы автоморфизмов, действующих бесконечно транзитивно.

ТЕОРЕМА 8 ([10, theorem 5.17], [7, corollary 11]). *Для любого $n \geq 2$ найдутся такие три $\mathbb{G}_a$ -подгруппы U_1, U_2, U_3 группы $\text{Aut}(\mathbb{A}^n)$, что группа G , порожденная этими подгруппами, действует на $\mathbb{A}^n$ бесконечно транзитивно.*

Легко видеть, что при $n = 2$ теорема 8 следует из теоремы 6.

Было бы интересно выяснить, можно ли в теореме 8 обойтись двумя $\mathbb{G}_a$ -подгруппами. Также хотелось бы найти условия, при которых груп-

па, порожденная данным конечным набором $\mathbb{G}_a$ -подгрупп, действует на множестве гладких точек данного аффинного многообразия X транзитивно или бесконечно транзитивно.

Задачи к разделу 5

ЗАДАЧА 46. При каких значениях параметров a и b группа $H_{a,b}$ коммутативна?

ЗАДАЧА 47. Докажите, что группа $H_{1,1}$ изоморфна группе $SL_2(\mathbb{C})$.

ЗАДАЧА 48. Докажите, что группа $H_{a,b}$ транзитивна на $\mathbb{A}^2$ тогда и только тогда, когда $ab = 0$, а в остальных случаях эта группа транзитивна на $\mathbb{A}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

ЗАДАЧА 49. Пусть $n \geq 3$ и $k \geq 3$. Рассмотрим подгруппу G_k группы $\text{Aut}(\mathbb{A}^n)$, порожденную преобразованиями вида

$$(x_1, \dots, x_i + \alpha x_j^k, \dots, x_n), \quad \alpha \in \mathbb{C}, \quad \text{для всех } i \neq j.$$

Докажите, что действие группы G_k на $\mathbb{A}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ не является 2-транзитивным.

ЗАДАЧА 50. Выведите теорему 8 при $n = 2$ из теоремы 6.

6. Приложение. Необходимые сведения из теории групп

В этом приложении мы собрали используемые в основном тексте определения и факты из теории групп. Более подробно о группах можно прочитать в учебниках [2, 3, 4, 5].

Множество G с бинарной операцией $\cdot: G \times G \rightarrow G$, $(g_1, g_2) \mapsto g_1 \cdot g_2$, называется *группой*, если

1) операция $\cdot$ ассоциативна, т. е. $g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3) = (g_1 \cdot g_2) \cdot g_3$ для любых $g_1, g_2, g_3 \in G$;

2) существует *нейтральный* элемент $e \in G$, для которого $e \cdot g = g \cdot e = g$ при всех $g \in G$;

3) для любого элемента $g \in G$ найдется *обратный* элемент $g^{-1} \in G$, для которого $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e$.

Операцию в группе традиционно называют умножением и символ « $\cdot$ » опускают. Отметим также, что множество с ассоциативной бинарной операцией называют *полугруппой*, а множество с ассоциативной бинарной операцией и нейтральным элементом — *моноидом*.

Порядком группы G называется число элементов в множестве G . Порядок группы G обозначается $|G|$.

Группа G *коммутативна*, или *абелева*, если для любых $g_1, g_2 \in G$ выполнено $g_1 g_2 = g_2 g_1$.

Примерами групп являются:

- аддитивные группы $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$, $(\mathbb{Z}_n, +)$;
- мультипликативные группы $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \times)$, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \times)$, $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \times)$, $(\mathbb{Z}_p \setminus \{0\}, \times)$, где p — простое число;
- множество $S(X)$ биекций $\sigma: X \rightarrow X$ некоторого множества X с операцией композиции; если $|X| = n$, то $S(X) = S_n$ — симметрическая группа, или группа подстановок, причем $|S_n| = n!$ (также рассматривается знакопеременная группа, или группа четных подстановок, обозначаемая A_n , для которой $|A_n| = n!/2$);
- группы матриц $GL_n(K)$ и $SL_n(K)$, где K — некоторое поле.

Подмножество $H \subseteq G$ — это *подгруппа* группы G , если $e \in H$ и для любых элементов $h_1, h_2 \in H$ выполнено $h_1 h_2^{-1} \in H$. Другими словами, подмножество H само является группой относительно ограничения той же бинарной операции.

С каждым элементом g группы G связана *циклическая* подгруппа, т. е. подмножество элементов $\langle g \rangle = \{g^m \mid m \in \mathbb{Z}\}$.

Отображение групп $\varphi: G_1 \rightarrow G_2$ называется *гомоморфизмом*, если оно сохраняет операции, т. е. для любых $a, b \in G_1$ выполнено $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$, где в левой части равенства умножение в группе G_1 , а в правой — в G_2 . Легко проверить, что гомоморфизм переводит нейтральный элемент группы G_1 в нейтральный элемент группы G_2 , а образом обратного элемента является элемент, обратный к образу. *Изоморфизм* групп — это биективный гомоморфизм. Можно проверить, что отображение, обратное к изоморфизму, также сохраняет операции. Две группы называются *изоморфными*, если между ними можно установить изоморфизм. В алгебре группы рассматривают с точностью до изоморфизма, т. е. изоморфные группы считают одинаковыми. Наконец, *автоморфизм* — это изоморфизм из группы G в себя. Множество всех автоморфизмов группы G образует группу относительно операции композиции. Эта группа обозначается $\text{Aut}(G)$.

Группу G называют *циклической*, если найдется такой элемент $g \in G$, что $G = \langle g \rangle$. Каждая циклическая группа коммутативна и не более чем счетна. Более того, любая бесконечная циклическая группа изоморфна группе $(\mathbb{Z}, +)$, а любая циклическая группа порядка n изоморфна группе $(\mathbb{Z}_n, +)$.

Левый смежный класс элемента $g \in G$ по подгруппе $H \subseteq G$ — это подмножество $gH = \{gh \mid h \in H\}$, а *правый смежный класс* элемента $g \in G$ по подгруппе $H \subseteq G$ — подмножество $Hg = \{hg \mid h \in H\}$.

Легко проверяется, что левые (правые) смежные классы различных элементов группы либо не пересекаются, либо совпадают, поэтому вся группа разбивается в дизъюнктное объединение левых (правых) смежных классов. Полезно отметить, что левый и правый смежные классы нейтрального элемента совпадают с подгруппой H , т. е. $eH = He = H$.

Из этих наблюдений вытекает *теорема Лагранжа*, которая утверждает, что для любой конечной группы G и любой подгруппы $H \subseteq G$ мы имеем

$$|G| = [G : H]|H|,$$

где $[G : H]$ — индекс H в G , т. е. число левых (или правых) смежных классов в группе G по подгруппе H .

Из теоремы Лагранжа следует, что для любой конечной группы G порядок любой ее подгруппы H делит порядок G . Например, в группе G из 25 элементов кроме тривиальных подгрупп $\{e\}$ и G могут быть лишь подгруппы из 5 элементов.

Порядком $\text{ord}(g)$ элемента $g \in G$ называется минимальное натуральное число k , для которого $g^k = e$, или ∞ , если такого k не существует. Легко показать, что $\text{ord}(g) = |\langle g \rangle|$, что объясняет употребление слова «порядок» в двух разных смыслах. Отметим, что последнее равенство справедливо и для элемента g бесконечного порядка.

Из теоремы Лагранжа вытекает, что для любого элемента g конечной группы G число $\text{ord}(g)$ делит порядок группы $|G|$ и что

$$g^{|G|} = e.$$

Подгруппа H группы G называется *нормальной*, если $gH = Hg$ для любого элемента $g \in G$. Эквивалентно, подгруппа $H \subseteq G$ нормальна, если $gHg^{-1} = H$ для любого $g \in G$. Например, любая подгруппа в коммутативной группе нормальна.

Будем говорить, что подгруппы H_1 и H_2 группы G *сопряжены*, если найдется элемент $g \in G$, для которого $H_2 = gH_1g^{-1}$. В этих терминах нормальная подгруппа — это подгруппа, которая сопряжена только самой себе. Полезно отметить, что для заданного элемента $g \in G$ отображение сопряжения

$$G \rightarrow G, \quad h \mapsto ghg^{-1},$$

является автоморфизмом группы G . Такие автоморфизмы называют *внутренними*, а все прочие автоморфизмы называются *внешними*.

Итак, нормальные подгруппы — это в точности подгруппы, которые инвариантны относительно всех внутренних автоморфизмов. Если подгруппа инвариантна относительно всех автоморфизмов, она называется *характеристической*.

На множестве левых смежных классов G/H группы G по подгруппе H можно попробовать определить бинарную операцию по следующей естественной формуле:

$$G/H \times G/H \rightarrow G/H, \quad (g_1H)(g_2H) = g_1g_2H.$$

Легко проверить, что так заданная операция корректно определена, т. е. не зависит от выбора представителей смежных классов, тогда и только тогда, когда подгруппа H нормальна. Тем самым мы получаем структуру группы на множестве смежных классов G/H группы G по нормальной подгруппе H . Это группа называется *факторгруппой* группы G по нормальной подгруппе H .

Теорема о гомоморфизме утверждает, что для произвольного гомоморфизма групп $\varphi : G_1 \rightarrow G_2$ ядро $\text{Ker}(\varphi)$ является нормальной подгруппой группы G_1 и имеется изоморфизм между образом $\text{Im}(\varphi)$ и фактор-

группой $G/\text{Ker}(\varphi)$. Этот изоморфизм устанавливается формулой

$$G/\text{Ker}(\varphi) \rightarrow \text{Im}(\varphi), \quad g\text{Ker}(\varphi) \mapsto \varphi(g).$$

Теорема о гомоморфизме позволяет получать конструктивные реализации для факторгруппы G/H : чтобы «представить себе» факторгруппу G/H , надо подобрать гомоморфизм $\varphi: G \rightarrow F$ в некоторую группу F , ядром которого будет подгруппа H . После этого G/H будет отождествлена с подгруппой $\text{Im}(\varphi)$ группы F .

Центром группы G называется подмножество

$$Z(G) = \{a \in G \mid ab = ba \ \forall b \in G\}.$$

Ясно, что $Z(G)$ — это нормальная и даже характеристическая подгруппа в G . Далее, $G = Z(G)$ тогда и только тогда, когда группа G коммутативна.

Группа G называется *нильпотентной*, если в ней существует такая цепочка нормальных подгрупп

$$G = Z_n \supseteq Z_{n-1} \supseteq \dots \supseteq Z_1 \supseteq Z_0 = \{e\},$$

что $Z_1 = Z(G)$ и Z_{i+1} — это подгруппа, для которой $Z_{i+1}/Z_i = Z(G/Z_i)$. Из определения легко вывести, что центр нильпотентной группы неединичен и что гомоморфный образ нильпотентной группы нильпотентен.

Нормализатор подгруппы H в группе G — это подмножество

$$N_G(H) = \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}.$$

Это наибольшая подгруппа группы G , которая содержит H в качестве нормальной подгруппы. В частности, H нормальна в G тогда и только тогда, когда $G = N_G(H)$.

Также полезно определить *централизатор подгруппы* $H \subseteq G$:

$$Z_G(H) = \{a \in G \mid ab = ba \ \forall b \in H\}$$

и *централизатор элемента* $g \in G$:

$$Z_G(g) = \{a \in G \mid ag = ga\}.$$

Ясно, что $Z_G(\langle g \rangle) = Z_G(g)$.

Будем говорить, что подгруппа H группы G *порождается* подмножеством $S \subseteq H$, если H — это наименьшая подгруппа в G , которая содержит подмножество S . Ясно, что такая подгруппа состоит из всевозможных произведений элементов подмножества S и обратных к ним элементов. Подмножество $S \subseteq G$ порождает группу G , если группа G совпадает с подгруппой, порожденной подмножеством S . Заметим, что группа является циклической тогда и только тогда, когда она может

быть порождена одним элементом. Более общо, группа G называется k -порожденной, если в G можно выбрать порождающее подмножество из k элементов.

Определим коммутант группы G как подгруппу $[G, G]$, порожденную всеми выражениями вида

$$aba^{-1}b^{-1}, \quad a, b \in G.$$

Легко видеть, что коммутант является характеристической и, в частности, нормальной подгруппой в G . Это наименьшая нормальная подгруппа, факторгруппа группы G по которой коммутативна. В частности, $[G, G] = \{e\}$ тогда и только тогда, когда G коммутативна. Если $G = [G, G]$, то группа G называется совершенной.

Группа G называется простой, если G не содержит нормальных подгрупп, кроме тривиальных подгрупп $\{e\}$ и G . Легко видеть, что группа G проста тогда и только тогда, когда любой гомоморфизм из группы G в некоторую группу F либо отображает все элементы G в нейтральный элемент F , либо является инъективным отображением. Для коммутативной группы G простота означает, что G не содержит нетривиальных подгрупп. Это свойство выполнено только для групп $(\mathbb{Z}_p, +)$, где p — простое число.

Задачи к разделу 6

Задача 51. Докажите, что любая конечная полугруппа содержит такой элемент a , что $a^2 = a$.

Задача 52. Приведите примеры счетных коммутативных групп, не являющихся циклическими.

Задача 53. Докажите, что группы $(\mathbb{R}, +)$ и $(\mathbb{R}_{>0}, \times)$ изоморфны.

Задача 54. Пусть G — группа, все элементы которой имеют порядок не больше 2. Докажите, что G коммутативна и, более того, G изоморфна группе $(V, +)$, где V — векторное пространство над полем $\mathbb{Z}_2$.

Задача 55. Найдите все группы G , для которых $\text{Aut}(G) = \{e\}$.

Задача 56. Приведите пример двух элементов порядка 2 в некоторой группе G , произведение которых имеет бесконечный порядок.

Задача 57. Приведите пример подгруппы H в группе G , которая не является нормальной, но содержит такую неединичную подгруппу N , что N нормальна в G .

Задача 58. Приведите пример подгруппы H в группе G и элемента $g \in G$, для которых подгруппа gHg^{-1} является собственным подмножеством в H .

Задача 59. Приведите пример группы G и двух таких ее подгрупп $H_2 \subseteq H_1 \subseteq G$, что подгруппа H_2 нормальна в H_1 , подгруппа H_1 нормальна в G , но подгруппа H_2 не нормальна в G .

Задача 60. Приведите пример такой конечной группы G и такого делителя d числа $|G|$, что в группе G нет подгруппы из d элементов.

Задача 61. Приведите пример подгруппы H в некоторой группе G , которая является нормальной, но не характеристической.

Задача 62. Найдите центры групп S_n , A_n , $GL_n(\mathbb{R})$ и $SL_n(\mathbb{C})$.

Задача 63. Верно ли, что центр факторгруппы $G/Z(G)$ всегда тривиален?

Задача 64. Докажите, что в группе A_n при $n \geq 5$ нет нетривиальных нормальных подгрупп.

Задача 65. Докажите, что при $n \geq 5$ единственной нетривиальной нормальной подгруппой в группе S_n является подгруппа A_n .

Задача 66. Предположим, что конечная группа G порождается элементами порядка 2. Следует ли из этого, что существует сюръективный гомоморфизм из G в группу из двух элементов?

Задача 67. Пусть N — максимальная по включению собственная нормальная подгруппа группы G . Докажите, что факторгруппа G/N проста.

Задача 68. Докажите, что группа $SL_n(\mathbb{C})$ является совершенной.

Указания к задачам

4. Если $H \subseteq G$ — собственная подгруппа конечного индекса, то рассмотрите ядро действия группы G на G/H левыми сдвигами.

6. Первая подгруппа имеет в своем нормализаторе индекс $n!$, а вторая совпадает со своим нормализатором.

10. Рассмотрите ядра неэффективности таких действий.

13. Воспользуйтесь тем, что единственной нетривиальной нормальной подгруппой в S_n , $n \geq 5$, является подгруппа A_n .

14. Посчитайте двумя разными способами число элементов множества

$$\{(g, x) \mid gx = x, g \in G, x \in X\}.$$

17. Рассмотрите пары (g, g^{-1}) .

18. При вложении Кэли элемент порядка 2 переходит в произведение n транспозиций. Это нечетная подстановка, и требуемая подгруппа получается пересечением образа G с подгруппой A_{2n} .

20. Таких действий два — тождественное и нетождественное.

21. Подойдет отображение $g \mapsto g^{-1}$.

22. Можно взять $G = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4$ и множество X из четырех элементов.

23. Воспользуйтесь леммой 1.

31. Действие группы сохраняет свойство пары прямых лежать в одной двумерной плоскости.

32. Рассмотрите группу биекций, каждая из которых перемещает лишь конечное число элементов.

35. Может. Например, группа F_2 содержит бесконечно много нормальных подгрупп конечного индекса. Чтобы это доказать, рассмотрите сюръективные гомоморфизмы из F_2 в конечные группы.

36. Используйте задачу 4.

37. Автору такие условия неизвестны, и было бы интересно их узнать.

40. В первом случае подходит группа параллельных переносов, во втором — группа автоморфизмов с якобианом 1. Также в каждом из

случаев можно взять подгруппу $\text{SAut}(\mathbb{A}^n)$. При $n = 1$ она совпадает с группой параллельных переносов. При $n \geq 2$ вопрос о том, совпадает ли $\text{SAut}(\mathbb{A}^n)$ с группой автоморфизмов с якобианом 1, остается открытым.

45. В доказательстве теоремы 3 мы использовали только автоморфизмы из $\text{SAut}(\mathbb{A}^n)$.

46. В точности при $a = b = 0$.

49. При $\omega^{k-1} = 1$ пары точек вида $(P, \omega P)$ будут переходить в пары того же вида.

50. Добавьте к группе $H_{1,2}$ подгруппу параллельных переносов вдоль одной из координат.

52. Можно взять $(\mathbb{Q}, +)$ или $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \times)$.

53. Подойдет отображение $a \mapsto e^a$.

55. Это $\{e\}$ и $\mathbb{Z}_2$. Для некоммутативных групп рассмотрите внутренние автоморфизмы, для коммутативных — отображение $a \mapsto -a$ или линейные отображения над $\mathbb{Z}_2$.

56. Можно в группе движений вещественной плоскости взять два отражения относительно прямых, угол между которыми не является рациональным кратным числа π .

58. Можно взять $G = S(\mathbb{Z})$, $H = S(\mathbb{N})$ и $g: i \mapsto i + 1$.

59. Например, $G = A_4$, $H_1 = [A_4, A_4] = V_4$ и H_2 — любая подгруппа порядка 2 в V_4 .

60. Можно взять $G = A_4$ и $d = 6$ или $G = A_5$ и $d = 30$.

63. Можно рассмотреть группу диэдра D_4 или группу кватернионов Q_8 .

66. Группа A_5 порождается произведениями пар независимых транспозиций.

Список литературы

- [1] *И. В. Аржанцев*. Автоморфизмы алгебраических многообразий и бесконечная транзитивность // *Алгебра и анализ*. 2022. Т. 34, вып. 2. С. 1—55.
- [2] *Э. Б. Винберг*. Курс алгебры. М.: МЦНМО, 2024.
- [3] *М. И. Каргаполов, Ю. И. Мерзляков*. Основы теории групп. М.: Наука, 1982.
- [4] *А. И. Кострикин*. Введение в алгебру. Часть 1: Основы алгебры. М.: МЦНМО, 2024.
- [5] *А. И. Кострикин*. Введение в алгебру. Часть 3: Основные структуры алгебры. М.: МЦНМО, 2024.
- [6] *Д. А. Супруненко*. Группы подстановок. Минск: Навука і тэхніка, 1996
- [7] *R. B. Andrist*. Integrable generators of Lie algebras of vector fields on $\mathbb{C}^n$ // *Forum Math*. 2019. V. 31, № 4. P. 943—949.
- [8] *I. Arzhantsev*. Infinite transitivity and special automorphisms // *Ark. Mat*. 2018. V. 56, № 1. P. 1—14.
- [9] *I. Arzhantsev, H. Flenner, S. Kaliman, F. Kutzschebauch, M. Zaidenberg*. Flexible varieties and automorphism groups // *Duke Math. J*. 2013. V. 162, № 4. P. 767—823.
- [10] *I. Arzhantsev, K. Kuyumzhiyan, M. Zaidenberg*. Infinite transitivity, finite generation, and Demazure roots // *Adv. Math*. 2019. V. 351. P. 1—32.
- [11] *A. Chistopolskaya, G. Taroyan*. Infinite transitivity for automorphism groups of the affine plane. Preprint, arXiv:2202.02214.
- [12] *J. D. Dixon, B. Mortimer*. *Permutation Groups*. Springer, 1996. (Graduate Texts in Math.; V. 163).

- [13] *S. Kaliman, M. Zaidenberg*. Affine modifications and affine hypersurfaces with a very transitive automorphism group // Transform. Groups. 1999. V. 4, № 1. P. 53—95.
- [14] *D. Lewis, K. Perry, A. Straub*. An algorithmic approach to the polydegree conjecture for plane polynomial automorphisms // J. Pure Appl. Algebra. 2019. V. 223. P. 5346—5359.
- [15] *T. McDonough*. A permutation representation of a free group // Quart. J. Math. Oxford Ser. (2). 1977. V. 28, № 111. P. 353—356.

Содержание

Введение	3
1. Действия групп	6
1.1. Действие, орбита, стабилизатор	6
1.2. Свойства и описания действий	7
1.3. Важные примеры	8
1.4. Изоморфизмы действий	9
2. Кратная транзитивность	14
2.1. Основное определение	14
2.2. Группы Матьё	15
2.3. 3-транзитивные действия	16
2.4. Действия нормальных подгрупп	17
3. Бесконечная транзитивность	20
3.1. Бесконечно транзитивные действия	20
3.2. Бесконечно транзитивные группы	22
4. Автоморфизмы алгебраических многообразий	25
4.1. Полиномиальные автоморфизмы аффинного пространства	25
4.2. Аффинные многообразия	28
5. Бесконечная транзитивность для конечных наборов подгрупп	33
6. Приложение. Необходимые сведения из теории групп	36
Указания к задачам	42
Список литературы	44

Научно-популярное издание

Иван Владимирович Аржанцев

БЕСКОНЕЧНАЯ ТРАНЗИТИВНОСТЬ

Издательство Московского центра

непрерывного математического образования

119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241-08-04

Подписано в печать 16.06.2025 г. Формат $60 \times 90^{1/16}$. Бумага офсетная.

Печать офсетная. Печ. л. 3. Тираж 1000. Заказ .

Отпечатано в ООО «Типография „Миттель Пресс“».

Москва, ул. Руставели, д. 14, стр. 6.

Тел./факс +7 (495) 619-08-30, 647-01-89

E-mail: mittelpress@mail.ru

Книги издательства МЦНМО можно приобрести в магазине
«Математическая книга», Москва, Большой Власьевский пер., д. 11.
Тел. (499) 241-72-85. E-mail: biblio@mccme.ru
