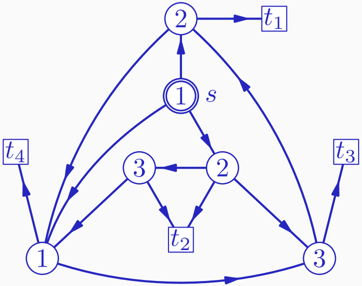
Равновесия Нэша в чистых стационарных стратегиях для игр двух игроков с положительными аддитивными штрафами

М.Н. Вялый (совместная работа с E. Boros, Kh. Elbassioni, V. Gurvich)

III научная конференция ФКН ВШЭ

Правила игры: игровое поле

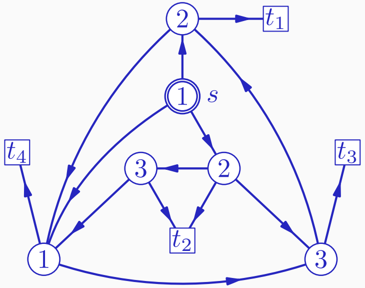
Орграф $G = (V, E)$ (граф игры); вершины — позиции, рёбра — ходы.



Правила игры: игровое поле

Орграф $G = (V, E)$ (граф игры); вершины — позиции, рёбра — ходы.

Разбиение позиций $V = V_1 \sqcup V_2 \sqcup \ldots V_k \sqcup V_T$: в позициях из V_i ход делает игрок i, позиции из V_T — терминальные (из них нет ходов). В любой позиции из $V \setminus V_T$ хотя бы один ход возможен.

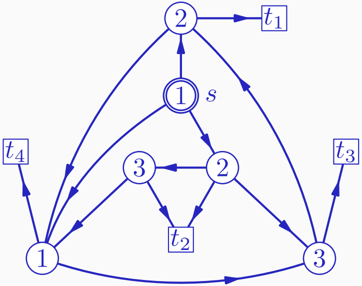


Правила игры: игровое поле

Орграф $G = (V, E)$ (граф игры); вершины — позиции, рёбра — ходы.

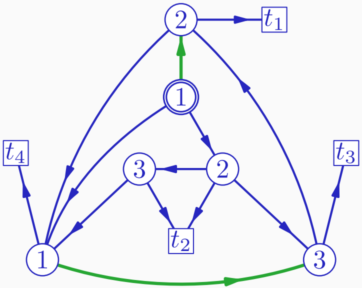
Разбиение позиций $V = V_1 \sqcup V_2 \sqcup \dots V_k \sqcup V_T$: в позициях из V_i ход делает игрок i, позиции из V_T — терминальные (из них нет ходов). В любой позиции из $V \setminus V_T$ хотя бы один ход возможен.

Начальная позиция s.



Стационарные стратегии, партии

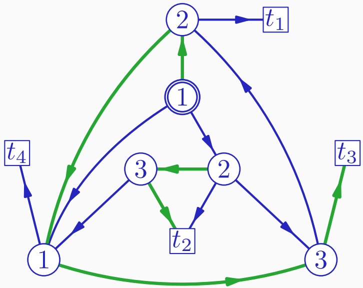
Чистая стационарная (позиционная, memoryless) стратегия игрока i:
такое $\sigma_i \colon V_i \to V$, что $(v, \sigma_i(v)) \in E$ для всех $v \in V_i$.



Стационарные стратегии, партии

Чистая стационарная (позиционная, memoryless) стратегия игрока i: такое $\sigma_i \colon V_i \to V$, что $(v, \sigma_i(v)) \in E$ для всех $v \in V_i$.

Ситуация $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$: набор стратегий для каждого игрока.



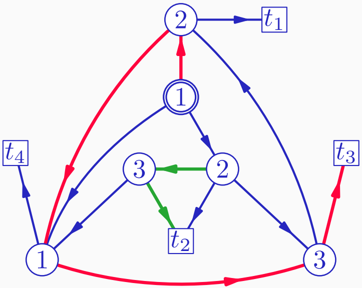
Стационарные стратегии, партии

Чистая стационарная (позиционная, memoryless) стратегия игрока i: такое $\sigma_i \colon V_i \to V$, что $(v, \sigma_i(v)) \in E$ для всех $v \in V_i$.

Ситуация $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$: набор стратегий для каждого игрока.

Партия $P(\sigma)$ в ситуации σ: игрок i ходит в соответствии со стратегией σ_i.

Терминальная партия заканчивается в терминале



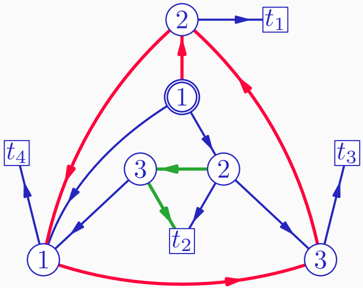
Стационарные стратегии, партии

Чистая стационарная (позиционная, memoryless) стратегия игрока i: такое $\sigma_i\colon V_i \to V$, что $(v, \sigma_i(v)) \in E$ для всех $v \in V_i$.

Ситуация $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$: набор стратегий для каждого игрока.

Партия $P(\sigma)$ в ситуации σ: игрок i ходит в соответствии со стратегией σ_i.

В других ситуациях возможна бесконечная партия (цикл)



Результат партии, аддитивный платеж

Каждый ход e стоит $r_i(e)$ игроку i (каждый ход стоит чего-то каждому из игроков). Результат терминальной партии $\ell^{(i)}(P)$ для игрока i: сумма платежей по всем ходам партии. В примере $(\ell^{(1)}(P), \ell^{(2)}(P), \ell^{(3)}(P)) = (7, 10, 6)$.

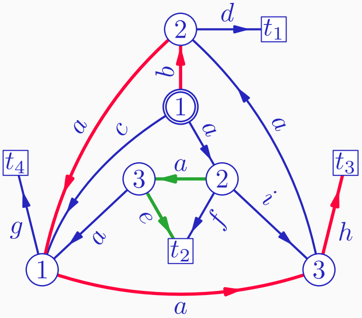
$a = (1,1,1)$ $\quad b = (4,1,1)$

$c = (6,1,1)$ $\quad d = (6,4,1)$

$e = (7,7,6)$ $\quad f = (8,9,1)$

$g = (5,1,6)$ $\quad h = (1,7,3)$

$i = (1,4,1)$



Результат партии, аддитивный платеж

Каждый ход e стоит $r_i(e)$ игроку i (каждый ход стоит чего-то каждому из игроков). Результат на цикле: $+\infty$, $-\infty$ или сумма платежей до входа в цикл, если длина цикла равна 0. В примере $(\ell^{(1)}(P), \ell^{(2)}(P), \ell^{(3)}(P)) = (+\infty, +\infty, +\infty)$.

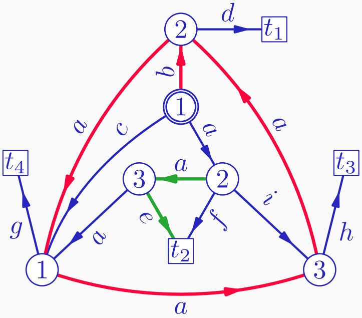
$a = (1,1,1)$ $\quad b = (4,1,1)$

$c = (6,1,1)$ $\quad d = (6,4,1)$

$e = (7,7,6)$ $\quad f = (8,9,1)$

$g = (5,1,6)$ $\quad h = (1,7,3)$

$i = (1,4,1)$



Равновесные ситуации (равновесия Нэша)

Ситуация σ называется равновесием Нэша (NE), если $\ell^{(i)}(P(\sigma)) \leqslant \ell^{(i)}(P(\sigma'))$ для любой σ', отличающейся от σ разве лишь стратегией игрока i.

Равновесные ситуации (равновесия Нэша)

Ситуация σ называется равновесием Нэша (NE), если $\ell^{(i)}(P(\sigma)) \leqslant \ell^{(i)}(P(\sigma'))$ для любой σ', отличающейся от σ разве лишь стратегией игрока i.

Пример неравновесной ситуации для аддитивного платежа

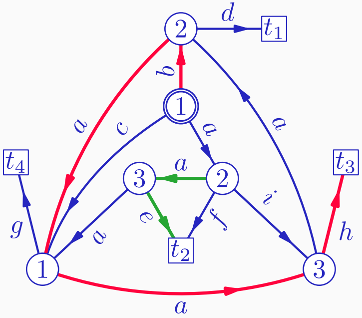
$a = (1,1,1)$ $\quad b = (4,1,1)$

$c = (6,1,1)$ $\quad d = (6,4,1)$

$e = (7,7,6)$ $\quad f = (8,9,1)$

$g = (5,1,6)$ $\quad h = (1,7,3)$

$i = (1,4,1)$



Платежи $(7,10,6)$

Равновесные ситуации (равновесия Нэша)

Ситуация σ называется равновесием Нэша (NE), если $\ell^{(i)}(P(\sigma)) \leqslant \ell^{(i)}(P(\sigma'))$ для любой σ', отличающейся от σ разве лишь стратегией игрока i.

Пример неравновесной ситуации для аддитивного платежа

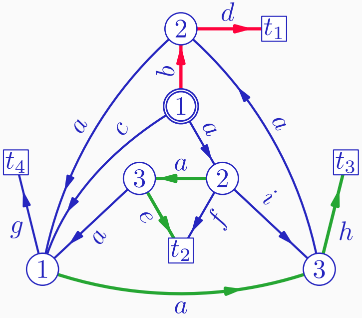
$a = (1,1,1)$ $\quad b = (4,1,1)$

$c = (6,1,1)$ $\quad d = (6,4,1)$

$e = (7,7,6)$ $\quad f = (8,9,1)$

$g = (5,1,6)$ $\quad h = (1,7,3)$

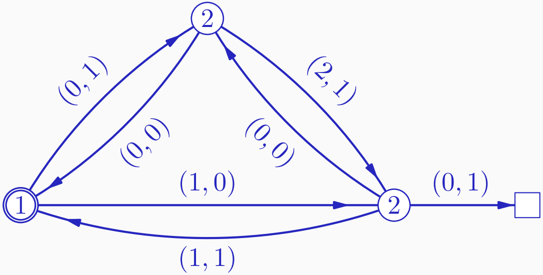
$i = (1,4,1)$



Платежи $(10, 5, 2)$

Несуществование NE

2 игрока, платежи неотрицательные, NE нет (Boros, Gurvich; 2003)



Несуществование NE

3 игрока, платежи строго положительные, NE нет (Gurvich, Oudalov; 2014)

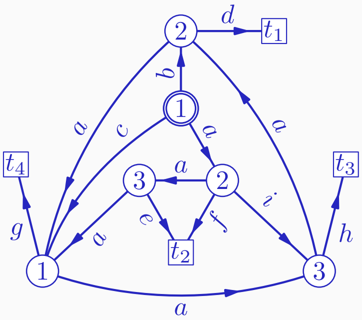
$a = (1,1,1)$ $\qquad b = (4,1,1)$

$c = (6,1,1)$ $\qquad d = (6,4,1)$

$e = (7,7,6)$ $\qquad f = (8,9,1)$

$g = (5,1,6)$ $\qquad h = (1,7,3)$

$i = (1,4,1)$



2 игрока, платежи строго положительные

Теорема (Boros, Elbassioni, Gurvich, M.V.; 2024)

Любая игра двух игроков с положительными аддитивными платежами имеет NE.

Свежайшая версия `https://arxiv.org/abs/2410.09257v4`

Идея построения равновесной стратегии

Каждый игрок строит оптимальную стратегию в предположении, что его оппонент играет против, не думая о своих интересах. Получаем ситуацию $(\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)})$, которая порождает партию p.

Равновесные стратегии: игроку i на пути p играть вдоль пути (заботиться о своих интересах), вне пути p играть по $\sigma^{(3-i)}$ (наказывать оппонента).

Реализация идеи

Нужна теорема об играх с запретами: один игрок строит кратчайшие пути в терминал, а второй пытается ему помешать и сделать кратчайшие пути как можно длиннее, уничтожая часть рёбер. Для таких игр с единой неотрицательной платежной функцией имеется обобщение алгоритма Дийкстры, с помощью которого доказывается существование дерева длиннейших кратчайших путей (L. Khachiyan, V. Gurvich, J. Zhao; 2006).

Реализация идеи

Нужна теорема об играх с запретами: один игрок строит кратчайшие пути в терминал, а второй пытается ему помешать и сделать кратчайшие пути как можно длиннее, уничтожая часть рёбер. Для таких игр с единой неотрицательной платежной функцией имеется обобщение алгоритма Дийкстры, с помощью которого доказывается существование дерева длиннейших кратчайших путей (L. Khachiyan, V. Gurvich, J. Zhao; 2006).

В нашей работе построено обобщение игр с запретами на случай разных платежных функций у игроков и доказано существование NE для строго положительных платежей.

Комбинаторная интерпретация: дважды кратчайшие пути

$G = (V, E)$ — орграф с выделенной вершиной $s \in V$;

$V_1 \cup V_2 \cup V_T$, где V_T — терминалы;

локальные платежи $r_i \colon E \to \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2\}$, строго положительные.

Комбинаторная интерпретация: дважды кратчайшие пути

$G = (V, E)$ — орграф с выделенной вершиной $s \in V$;
$V_1 \cup V_2 \cup V_T$, где V_T — терминалы;
локальные платежи $r_i \colon E \to \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2\}$, строго положительные.

S_i — множество стратегий игрока i (стратегия: такое $\sigma_i \colon V_i \to V$, что $(u, \sigma_i(u)) \in E$ для всех $u \in V_i$).

$P_{3-i}(\sigma_i)$, $\sigma_i \in S_i$, — множество r_{3-i}-кратчайших (s, V_T)-путей в редуцированном графе $G(\sigma_i)$, в котором оставлены только рёбра $(u, \sigma_i(u)) \in E$ для всех $u \in V_i$.

Множество возможных кратчайших путей $P_{3-i} = \cup_{\sigma_i \in S_i} P_{3-i}(\sigma_i)$.

Комбинаторная интерпретация: дважды кратчайшие пути

$G = (V, E)$ — орграф с выделенной вершиной $s \in V$;
$V_1 \cup V_2 \cup V_T$, где V_T — терминалы;
локальные платежи $r_i \colon E \to \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2\}$, строго положительные.

S_i — множество стратегий игрока i (стратегия: такое $\sigma_i \colon V_i \to V$, что $(u, \sigma_i(u)) \in E$ для всех $u \in V_i$).

$P_{3-i}(\sigma_i)$, $\sigma_i \in S_i$, — множество r_{3-i}-кратчайших (s, V_T)-путей в редуцированном графе $G(\sigma_i)$, в котором оставлены только рёбра $(u, \sigma_i(u)) \in E$ для всех $u \in V_i$.

Множество возможных кратчайших путей $P_{3-i} = \cup_{\sigma_i \in S_i} P_{3-i}(\sigma_i)$.

Комбинаторная интерпретация: дважды кратчайшие пути

$G = (V, E)$ — орграф с выделенной вершиной $s \in V$;
$V_1 \cup V_2 \cup V_T$, где V_T — терминалы;
локальные платежи $r_i \colon E \to \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2\}$, строго положительные.

S_i — множество стратегий игрока i (стратегия: такое $\sigma_i \colon V_i \to V$, что $(u, \sigma_i(u)) \in E$ для всех $u \in V_i$).

$P_{3-i}(\sigma_i)$, $\sigma_i \in S_i$, — множество r_{3-i}-кратчайших (s, V_T)-путей в редуцированном графе $G(\sigma_i)$, в котором оставлены только рёбра $(u, \sigma_i(u)) \in E$ для всех $u \in V_i$.

Множество возможных кратчайших путей $P_{3-i} = \cup_{\sigma_i \in S_i} P_{3-i}(\sigma_i)$.

Вопрос:

Верно ли, что всегда $P_1 \cap P_2 \neq \varnothing$? (То есть существуют дважды кратчайшие пути.) **Ответ:** нет.

Теорема о дважды кратчайшем пути

Причина отсутствия дважды кратчайших путей: вообще нет (s, V_T)-путей в G.
Тогда $P_{3-i}(\sigma_i) = \varnothing$ для всех σ_i.

Теорема о дважды кратчайшем пути

Причина отсутствия дважды кратчайших путей: вообще нет (s, V_T)-путей в G.
Тогда $P_{3-i}(\sigma_i) = \varnothing$ для всех σ_i.

Гипотеза

Если в G есть (s, V_T)-путь, то существует дважды кратчайший путь.

Теорема о дважды кратчайшем пути

Причина отсутствия дважды кратчайших путей: вообще нет (s, V_T)-путей в G. Тогда $P_{3-i}(\sigma_i) = \varnothing$ для всех σ_i.

Гипотеза

Если в G есть (s, V_T)-путь, то существует дважды кратчайший путь.

Игрок i блокирует V_T стратегией σ_i, если в графе $G(\sigma_i)$ нет (s, V_T)-путей.

Теорема о дважды кратчайшем пути

Причина отсутствия дважды кратчайших путей: вообще нет (s, V_T)-путей в G.
Тогда $P_{3-i}(\sigma_i) = \varnothing$ для всех σ_i.

Гипотеза

Если в G есть (s, V_T)-путь, то существует дважды кратчайший путь.

Игрок i блокирует V_T стратегией σ_i, если в графе $G(\sigma_i)$ нет (s, V_T)-путей.

Теорема (Boros, Elbassioni, Gurvich, M.V.; 2024)

Если хотя бы один из игроков не может блокировать V_T, то $P_1 \cap P_2 \neq \varnothing$.

Спасибо за внимание!