О спектре диофантовых экспонент решёток

Олег Н. Герман

ФКН ВШЭ

«Современные направления теории чисел»
16.03.2026

Диофантовы экспоненты решёток

Диофантовы экспоненты решёток

Для $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ положим

$$|\mathbf{x}| = \max_{1 \leqslant i \leqslant d} |x_i| \qquad \Pi(\mathbf{x}) = \prod_{1 \leqslant i \leqslant d} |x_i|^{1/d}$$

Диофантовы экспоненты решёток

Для $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ положим

$$|\mathbf{x}| = \max_{1 \leqslant i \leqslant d} |x_i| \qquad \Pi(\mathbf{x}) = \prod_{1 \leqslant i \leqslant d} |x_i|^{1/d}$$

Функция меры иррациональности для решётки Λ

$$\psi_\Lambda(t) = \min_{\substack{\mathbf{x} \in \Lambda \\ 0 < |\mathbf{x}| \leqslant t}} \Pi(\mathbf{x})$$

Диофантовы экспоненты решёток

Для $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ положим

$$|\mathbf{x}| = \max_{1 \leqslant i \leqslant d} |x_i| \qquad \Pi(\mathbf{x}) = \prod_{1 \leqslant i \leqslant d} |x_i|^{1/d}$$

Функция меры иррациональности для решётки Λ

$$\psi_\Lambda(t) = \min_{\substack{\mathbf{x} \in \Lambda \\ 0 < |\mathbf{x}| \leqslant t}} \Pi(\mathbf{x})$$

Регулярная экспонента

$$\omega(\Lambda) = \sup \left\{ \gamma \in \mathbb{R} \,\middle|\, \liminf_{t \to +\infty} \left(t^\gamma \psi_\Lambda(t) \right) < +\infty \right\}$$

Диофантовы экспоненты решёток

Для $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ положим

$$|\mathbf{x}| = \max_{1 \leqslant i \leqslant d} |x_i| \qquad \Pi(\mathbf{x}) = \prod_{1 \leqslant i \leqslant d} |x_i|^{1/d}$$

Функция меры иррациональности для решётки Λ

$$\psi_\Lambda(t) = \min_{\substack{\mathbf{x} \in \Lambda \\ 0 < |\mathbf{x}| \leqslant t}} \Pi(\mathbf{x})$$

Регулярная экспонента

$$\omega(\Lambda) = \sup \left\{ \gamma \in \mathbb{R} \,\middle|\, \liminf_{t \to +\infty} \left(t^\gamma \psi_\Lambda(t) \right) < +\infty \right\}$$

Равномерная экспонента

$$\bar{\omega}(\Lambda) = \sup \left\{ \gamma \in \mathbb{R} \,\middle|\, \limsup_{t \to +\infty} \left(t^\gamma \psi_\Lambda(t) \right) < +\infty \right\}$$

Диофантовы экспоненты решёток

Для $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ положим

$$|\mathbf{x}| = \max_{1 \leqslant i \leqslant d} |x_i| \qquad \Pi(\mathbf{x}) = \prod_{1 \leqslant i \leqslant d} |x_i|^{1/d}$$

Функция меры иррациональности для решётки Λ

$$\psi_\Lambda(t) = \min_{\substack{\mathbf{x} \in \Lambda \\ 0 < |\mathbf{x}| \leqslant t}} \Pi(\mathbf{x})$$

Регулярная экспонента

$$\omega(\Lambda) = \sup \left\{ \gamma \in \mathbb{R} \,\middle|\, \liminf_{t \to +\infty} \left(t^\gamma \psi_\Lambda(t) \right) < +\infty \right\}$$

Равномерная экспонента

$$\bar{\omega}(\Lambda) = \sup \left\{ \gamma \in \mathbb{R} \,\middle|\, \limsup_{t \to +\infty} \left(t^\gamma \psi_\Lambda(t) \right) < +\infty \right\}$$

NB: Норму можно брать любую!

Спектры

По теореме Минковского

$$\omega(\Lambda) \geqslant \bar{\omega}(\Lambda) \geqslant 0$$

Спектры

По теореме Минковского

$$\omega(\Lambda) \geqslant \bar{\omega}(\Lambda) \geqslant 0$$

Спектры регулярной и равномерной экспонент

$$\mathbf{\Omega}_d = \left\{ \omega(\Lambda) \,\middle|\, \Lambda \text{ — решётка полного ранга в } \mathbb{R}^d \right\}$$

$$\bar{\mathbf{\Omega}}_d = \left\{ \bar{\omega}(\Lambda) \,\middle|\, \Lambda \text{ — решётка полного ранга в } \mathbb{R}^d \right\}$$

Спектры

По теореме Минковского

$$\omega(\Lambda) \geqslant \bar{\omega}(\Lambda) \geqslant 0$$

Спектры регулярной и равномерной экспонент

$$\boldsymbol{\Omega}_d = \left\{ \omega(\Lambda) \,\middle|\, \Lambda \text{ — решётка полного ранга в } \mathbb{R}^d \right\}$$

$$\bar{\boldsymbol{\Omega}}_d = \left\{ \bar{\omega}(\Lambda) \,\middle|\, \Lambda \text{ — решётка полного ранга в } \mathbb{R}^d \right\}$$

Н. Г. Мощевитин, 2025–26 $\quad d \geqslant 2$

$$\boldsymbol{\Omega}_d = [0, +\infty]$$

Спектры

По теореме Минковского

$$\omega(\Lambda) \geqslant \bar{\omega}(\Lambda) \geqslant 0$$

Спектры регулярной и равномерной экспонент

$$\boldsymbol{\Omega}_d = \Big\{ \omega(\Lambda) \,\Big|\, \Lambda \text{ — решётка полного ранга в } \mathbb{R}^d \Big\}$$

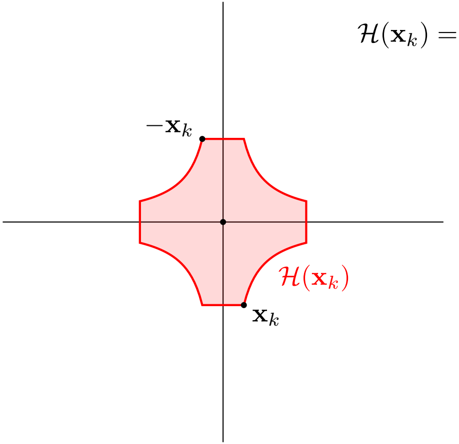
$$\bar{\boldsymbol{\Omega}}_d = \Big\{ \bar{\omega}(\Lambda) \,\Big|\, \Lambda \text{ — решётка полного ранга в } \mathbb{R}^d \Big\}$$

Н. Г. Мощевитин, 2025–26 $\quad d \geqslant 2$

$$\boldsymbol{\Omega}_d = [0, +\infty]$$

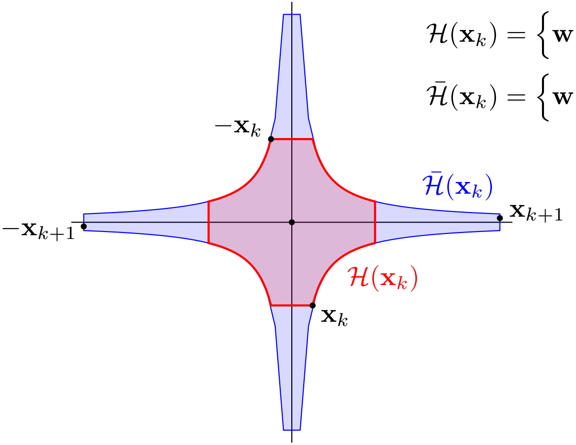
О.Г., 2026 $\quad d \geqslant 2$

$$\bar{\boldsymbol{\Omega}}_d = [0, +\infty]$$



$$\mathcal{H}(\mathbf{x}_k)=\Big\{\mathbf{w}\in\mathbb{R}^d\ \Big|\ |\mathbf{w}|\leqslant|\mathbf{x}_k|,\ \Pi(\mathbf{w})<\Pi(\mathbf{x}_k)\Big\}$$

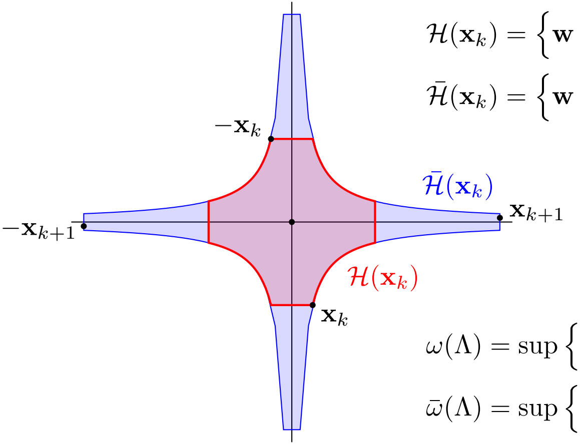
Последовательные гиперболические минимумы и диофантовы экспоненты решёток



$$\mathcal{H}(\mathbf{x}_k)=\Big\{\mathbf{w}\in\mathbb{R}^d\ \Big|\ |\mathbf{w}|\leqslant|\mathbf{x}_k|,\ \Pi(\mathbf{w})<\Pi(\mathbf{x}_k)\Big\}$$

$$\bar{\mathcal{H}}(\mathbf{x}_k)=\Big\{\mathbf{w}\in\mathbb{R}^d\ \Big|\ |\mathbf{w}|<|\mathbf{x}_{k+1}|,\ \Pi(\mathbf{w})<\Pi(\mathbf{x}_k)\Big\}$$

Последовательные гиперболические минимумы и диофантовы экспоненты решёток



$$\mathcal{H}(\mathbf{x}_k) = \left\{ \mathbf{w} \in \mathbb{R}^d \,\middle|\, |\mathbf{w}| \leqslant |\mathbf{x}_k|,\ \Pi(\mathbf{w}) < \Pi(\mathbf{x}_k) \right\}$$

$$\bar{\mathcal{H}}(\mathbf{x}_k) = \left\{ \mathbf{w} \in \mathbb{R}^d \,\middle|\, |\mathbf{w}| < |\mathbf{x}_{k+1}|,\ \Pi(\mathbf{w}) < \Pi(\mathbf{x}_k) \right\}$$

$$\omega(\Lambda) = \sup \left\{ \gamma \in \mathbb{R} \,\middle|\, \forall\, K \in \mathbb{N}\ \exists\, k \geqslant K :\ \Pi(\mathbf{x}_k) \leqslant |\mathbf{x}_k|^{-\gamma} \right\}$$

$$\bar{\omega}(\Lambda) = \sup \left\{ \gamma \in \mathbb{R} \,\middle|\, \exists\, K \in \mathbb{N} :\ \forall k \geqslant K\ \Pi(\mathbf{x}_k) \leqslant |\mathbf{x}_{k+1}|^{-\gamma} \right\}$$

Двумерный случай и дополнительные линейные формы

Пусть $\ell_1, \ldots, \ell_n$ — линейные формы от двух переменных общего положения, пусть Γ — решётка ранга 2

$$\mathbf{L} = (\ell_1, \ldots, \ell_n) \qquad \Pi_{\mathbf{L}}(\mathbf{x}) = \left| x_1 x_2 \prod_{1 \leqslant i \leqslant n} \ell_i(\mathbf{x}) \right|^{1/(n+2)} \qquad \psi_{\Gamma,\mathbf{L}}(t) = \min_{\substack{\mathbf{x} \in \Gamma \\ 0 < |\mathbf{x}| \leqslant t}} \Pi_{\mathbf{L}}(\mathbf{x})$$

Двумерный случай и дополнительные линейные формы

Пусть $\ell_1,\ldots,\ell_n$ — линейные формы от двух переменных общего положения,

пусть Γ — решётка ранга 2

$$\mathbf{L}=(\ell_1,\ldots,\ell_n)\qquad \Pi_{\mathbf{L}}(\mathbf{x})=\left|x_1x_2\prod_{1\leqslant i\leqslant n}\ell_i(\mathbf{x})\right|^{1/(n+2)}\qquad \psi_{\Gamma,\mathbf{L}}(t)=\min_{\substack{\mathbf{x}\in\Gamma\\ 0<|\mathbf{x}|\leqslant t}}\Pi_{\mathbf{L}}(\mathbf{x})$$

$$\omega_{\mathbf{L}}(\Gamma)=\sup\left\{\gamma\in\mathbb{R}\ \middle|\ \liminf_{t\to+\infty}\big(t^{\gamma}\psi_{\Gamma,\mathbf{L}}(t)\big)<+\infty\right\}$$

Двумерный случай и дополнительные линейные формы

Пусть $\ell_1, \ldots, \ell_n$ — линейные формы от двух переменных общего положения, пусть Γ — решётка ранга 2

$$\mathbf{L} = (\ell_1, \ldots, \ell_n) \qquad \Pi_{\mathbf{L}}(\mathbf{x}) = \left| x_1 x_2 \prod_{1 \leqslant i \leqslant n} \ell_i(\mathbf{x}) \right|^{1/(n+2)} \qquad \psi_{\Gamma,\mathbf{L}}(t) = \min_{\substack{\mathbf{x} \in \Gamma \\ 0 < |\mathbf{x}| \leqslant t}} \Pi_{\mathbf{L}}(\mathbf{x})$$

$$\omega_{\mathbf{L}}(\Gamma) = \sup \left\{ \gamma \in \mathbb{R} \,\middle|\, \liminf_{t \to +\infty} \left(t^{\gamma} \psi_{\Gamma,\mathbf{L}}(t) \right) < +\infty \right\}$$

$$\bar{\omega}_{\mathbf{L}}(\Gamma) = \sup \left\{ \gamma \in \mathbb{R} \,\middle|\, \limsup_{t \to +\infty} \left(t^{\gamma} \psi_{\Gamma,\mathbf{L}}(t) \right) < +\infty \right\}$$

Двумерный случай и дополнительные линейные формы

Пусть $\ell_1,\ldots,\ell_n$ — линейные формы от двух переменных общего положения,

пусть Γ — решётка ранга 2

$$\mathbf{L}=(\ell_1,\ldots,\ell_n) \qquad \Pi_{\mathbf{L}}(\mathbf{x})=\left|x_1x_2\prod_{1\leqslant i\leqslant n}\ell_i(\mathbf{x})\right|^{1/(n+2)} \qquad \psi_{\Gamma,\mathbf{L}}(t)=\min_{\substack{\mathbf{x}\in\Gamma\\ 0<|\mathbf{x}|\leqslant t}}\Pi_{\mathbf{L}}(\mathbf{x})$$

$$\omega_{\mathbf{L}}(\Gamma)=\sup\left\{\gamma\in\mathbb{R}\;\middle|\;\liminf_{t\to+\infty}\left(t^\gamma\psi_{\Gamma,\mathbf{L}}(t)\right)<+\infty\right\}$$

$$\bar{\omega}_{\mathbf{L}}(\Gamma)=\sup\left\{\gamma\in\mathbb{R}\;\middle|\;\limsup_{t\to+\infty}\left(t^\gamma\psi_{\Gamma,\mathbf{L}}(t)\right)<+\infty\right\}$$

Логарифмически плохо приближаемый набор $\mathbf{L}$

$$\exists\,\varepsilon>0,c>0: \qquad |\ell_i(\mathbf{x})|>\frac{c}{|\mathbf{x}|\log^{1+\varepsilon}(1+|\mathbf{x}|)} \qquad \forall\,i,\ \forall\,\mathbf{x}\in\Gamma\backslash\{\mathbf{0}\}$$

Двумерный случай и дополнительные линейные формы

От ω к $\omega_{\mathbf{L}}$

Пусть набор $\mathbf{L}$ логарифмически плохо приближаем. Тогда

$$\omega(\Gamma) = \delta \geqslant \frac{n}{2} \quad \Longrightarrow \quad \omega_{\mathbf{L}}(\Gamma) = \frac{2\delta - n}{n+2}$$

Двумерный случай и дополнительные линейные формы

От ω к $\omega_{\mathbf{L}}$

Пусть набор $\mathbf{L}$ логарифмически плохо приближаем. Тогда

$$\omega(\Gamma) = \delta \geqslant \frac{n}{2} \quad \Longrightarrow \quad \omega_{\mathbf{L}}(\Gamma) = \frac{2\delta - n}{n+2}$$

От $\bar{\omega}$ к $\bar{\omega}_{\mathbf{L}}$

Пусть набор $\mathbf{L}$ логарифмически плохо приближаем. Тогда

$$\left.\begin{array}{l} |\mathbf{x}_{k+1}| \asymp |\mathbf{x}_k|^{\beta} \\ \Pi(\mathbf{x}_k) \asymp |\mathbf{x}_k|^{(1-\beta^2)/2} \\ \beta \geqslant \sqrt{n+1} \end{array}\right. \quad \Longrightarrow \quad \bar{\omega}_{\mathbf{L}}(\Gamma) = \frac{\beta - (n+1)\beta^{-1}}{n+2}$$

Двумерный случай и дополнительные линейные формы

Как обеспечить плохо-приближаемость

Для почти всех $\tau \in \mathbb{R}$ набор $\mathbf{L}$ логарифмически плохо приближаем относительно решётки $D_\tau \Gamma$, где

$$D_\tau = \begin{pmatrix} 2^\tau & 0 \\ 0 & 2^{-\tau} \end{pmatrix}$$

Двумерный случай и дополнительные линейные формы

Как обеспечить плохо-приближаемость

Для почти всех $\tau \in \mathbb{R}$ набор $\mathbf{L}$ логарифмически плохо приближаем относительно решётки $D_\tau \Gamma$, где

$$D_\tau = \begin{pmatrix} 2^\tau & 0 \\ 0 & 2^{-\tau} \end{pmatrix}$$

Изменение нормы

$$D_\tau : \quad \Gamma \to D_\tau \Gamma$$

$$D_\tau : \ |\cdot| \to |D_\tau^{-1}(\cdot)|$$

Вложение решётки ранга 2 в $\mathbb{R}^d$

Пусть A — матрица 2×2 и пусть $\Gamma = A\mathbb{Z}^2$

Вложение решётки ранга 2 в $\mathbb{R}^d$

Пусть A — матрица 2×2 и пусть $\Gamma = A\mathbb{Z}^2$

Возьмём $\quad 0 < a_i < 1/2 \quad 0 < b_i < 1/2 \quad i = 1, \ldots, n = d - 2$

Вложение решётки ранга 2 в $\mathbb{R}^d$

Пусть A — матрица 2×2 и пусть $\Gamma = A\mathbb{Z}^2$

Возьмём $0 < a_i < 1/2$ $0 < b_i < 1/2$ $i = 1, \ldots, n = d - 2$

Подпространство $\mathcal{L}$ и подрешётка $\Gamma_{\mathcal{L}}$

Положим
$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ a_1 & b_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & b_n \end{pmatrix} \qquad \mathcal{L} = L\mathbb{R}^2 \qquad \Gamma_{\mathcal{L}} = L\Gamma = LA\mathbb{Z}^2$$

Вложение решётки ранга 2 в $\mathbb{R}^d$

Пусть A — матрица 2×2 и пусть $\Gamma = A\mathbb{Z}^2$

Возьмём $0 < a_i < 1/2$ $\quad 0 < b_i < 1/2$ $\quad i = 1, \ldots, n = d - 2$

Подпространство $\mathcal{L}$ и подрешётка $\Gamma_{\mathcal{L}}$

Положим
$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ a_1 & b_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & b_n \end{pmatrix} \qquad \mathcal{L} = L\mathbb{R}^2 \qquad \Gamma_{\mathcal{L}} = L\Gamma = LA\mathbb{Z}^2$$

Зададим $\mathbf{L} = (\ell_1, \ldots, \ell_n)$ равенствами

$$\ell_i(\mathbf{x}) = a_i x_1 + b_i x_2 \qquad i = 1, \ldots, n$$

Вложение решётки ранга 2 в $\mathbb{R}^d$

Пусть A — матрица 2×2 и пусть $\Gamma = A\mathbb{Z}^2$

Возьмём $0 < a_i < 1/2$ $0 < b_i < 1/2$ $i = 1, \dots, n = d - 2$

Подпространство $\mathcal{L}$ и подрешётка $\Gamma_{\mathcal{L}}$

Положим
$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ a_1 & b_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & b_n \end{pmatrix} \qquad \mathcal{L} = L\mathbb{R}^2 \qquad \Gamma_{\mathcal{L}} = L\Gamma = LA\mathbb{Z}^2$$

Зададим $\mathbf{L} = (\ell_1, \dots, \ell_n)$ равенствами

$$\ell_i(\mathbf{x}) = a_i x_1 + b_i x_2 \qquad i = 1, \dots, n$$

Действие вложения на функционалы $|\cdot|$ и $\Pi(\cdot)$

$$\forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \qquad |L\mathbf{x}| = |\mathbf{x}| \qquad \text{и} \qquad \Pi(L\mathbf{x}) = \Pi_{\mathbf{L}}(\mathbf{x})$$

Дополнение $\Gamma_{\mathcal{L}}$ до Λ

Пусть $\Gamma_{\mathcal{L}}$ дополнена до $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$, $\operatorname{rk}\Lambda = d$

Если нам повезло

$$\exists\, \varepsilon > 0, c > 0 : \forall\, \mathbf{x} \in \Lambda \backslash \Gamma_{\mathcal{L}} \quad \Pi(\mathbf{x}) > \frac{c}{\log^{1+\varepsilon}(1 + |\mathbf{x}|)} \quad \Longrightarrow \quad \omega(\Lambda) = \omega_{\mathbf{L}}(\Gamma), \;\; \bar{\omega}(\Lambda) = \bar{\omega}_{\mathbf{L}}(\Gamma)$$

Дополнение $\Gamma_{\mathcal{L}}$ до Λ

Пусть $\Gamma_{\mathcal{L}}$ дополнена до $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$, $\operatorname{rk}\Lambda = d$

Если нам повезло

$$\exists\,\varepsilon > 0, c > 0 : \ \forall\,\mathbf{x} \in \Lambda\backslash\Gamma_{\mathcal{L}} \quad \Pi(\mathbf{x}) > \frac{c}{\log^{1+\varepsilon}(1+|\mathbf{x}|)} \quad \Longrightarrow \quad \omega(\Lambda) = \omega_{\mathbf{L}}(\Gamma), \ \ \bar{\omega}(\Lambda) = \bar{\omega}_{\mathbf{L}}(\Gamma)$$

Как обеспечить везение

$\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,c > 0$: для почти всякого дополнения $\Gamma_{\mathcal{L}}$ до Λ

$$\Pi(\mathbf{x}) > \frac{c}{\log^{1+\varepsilon}(1+|\mathbf{x}|)} \qquad \forall\,\mathbf{x} \in \Lambda\backslash\Gamma_{\mathcal{L}}$$

Построение Γ

Построение Γ

$$\Gamma_{\theta,\eta} = \begin{pmatrix} \theta & -1 \\ 1 & \eta \end{pmatrix} \mathbb{Z}^2$$

Построение Γ

$$\Gamma_{\theta,\eta} = \begin{pmatrix} \theta & -1 \\ 1 & \eta \end{pmatrix} \mathbb{Z}^2$$

$\Gamma_{\theta,\eta}$ для регулярной экспоненты

$$a_0 = 1, \qquad a_{k+1} = [q_k^{\beta}] + 1 \quad \text{при} \quad k \geqslant 0, \qquad \theta = \eta = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$$

Построение Γ

$$\Gamma_{\theta,\eta} = \begin{pmatrix} \theta & -1 \\ 1 & \eta \end{pmatrix} \mathbb{Z}^2$$

$\Gamma_{\theta,\eta}$ для регулярной экспоненты

$a_0 = 1,\qquad a_{k+1} = [q_k^\beta] + 1$ при $k \geqslant 0,\qquad \theta = \eta = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$

$$\omega(\Gamma_{\theta,\theta}) = \delta \qquad \text{где} \qquad \delta = \frac{\beta - 1}{2}$$

$$\omega(\Lambda) = \omega_{\mathbf{L}}(\Gamma) = \frac{2\delta - n}{n+2} = \frac{\beta - n - 1}{n+2} \qquad \text{при} \qquad \delta \geqslant \frac{n}{2}$$

Построение Γ

$$\Gamma_{\theta,\eta} = \begin{pmatrix} \theta & -1 \\ 1 & \eta \end{pmatrix} \mathbb{Z}^2$$

$\Gamma_{\theta,\eta}$ для равномерной экспоненты

$$a_0 = b_0 = 1, \qquad a_1 = 2, \qquad b_1 = [2^\beta] + 1$$

$$a_k = \left[\frac{s_{k-1}^\beta - q_{k-2}}{q_{k-1}}\right] + 1, \qquad b_k = \left[\frac{q_k^\beta - s_{k-2}}{s_{k-1}}\right] + 1 \quad \text{при} \quad k \geqslant 2$$

$$\theta = [a_0; a_1, a_2, \ldots] \qquad \eta = [b_0; b_1, b_2, \ldots]$$

Построение Γ

$$\Gamma_{\theta,\eta} = \begin{pmatrix} \theta & -1 \\ 1 & \eta \end{pmatrix} \mathbb{Z}^2$$

$\Gamma_{\theta,\eta}$ для равномерной экспоненты

$$a_0 = b_0 = 1, \qquad a_1 = 2, \qquad b_1 = [2^\beta] + 1$$

$$a_k = \left[\frac{s_{k-1}^\beta - q_{k-2}}{q_{k-1}} \right] + 1, \qquad b_k = \left[\frac{q_k^\beta - s_{k-2}}{s_{k-1}} \right] + 1 \quad \text{при} \quad k \geqslant 2$$

$$\theta = [a_0; a_1, a_2, \ldots] \qquad \eta = [b_0; b_1, b_2, \ldots]$$

$$|\mathbf{x}_{k+1}| \asymp |\mathbf{x}_k|^\beta, \qquad \Pi(\mathbf{x}_k) \asymp |\mathbf{x}_k|^{(1-\beta^2)/2}$$

$$\bar{\omega}(\Lambda) = \bar{\omega}_{\mathbf{L}}(\Gamma) = \frac{\beta - (n+1)\beta^{-1}}{n+2} \qquad \text{при} \qquad \beta \geqslant \sqrt{n+1}$$

Слабая равномерная диофантова экспонента вещественного числа

Слабая равномерная диофантова экспонента вещественного числа

$$(*)\quad \begin{cases} |q| \leqslant t \\ |q\theta - p| \leqslant t^{-\gamma} \end{cases}$$

Равномерная диофантова экспонента

$$\hat{\omega} = \hat{\omega}(\theta) = \sup\left\{\gamma \in \mathbb{R} \,\middle|\, \forall \text{ дост. большого } t \ (*) \text{ имеет решение в } (q,p) \in \mathbb{Z}^2,\ q \neq 0\right\}$$

Слабая равномерная диофантова экспонента вещественного числа

$$(*)\quad \begin{cases} |q| \leqslant t \\ |q\theta - p| \leqslant t^{-\gamma} \end{cases}$$

Равномерная диофантова экспонента

$$\hat{\omega} = \hat{\omega}(\theta) = \sup\left\{\gamma \in \mathbb{R} \;\middle|\; \forall \text{ дост. большого } t \ (*) \text{ имеет решение в } (q,p) \in \mathbb{Z}^2,\ q \neq 0\right\}$$

$$(**)\quad \begin{cases} |q| \leqslant t \\ |q(q\theta - p)| \leqslant t^{1-\gamma} \end{cases}$$

Слабая равномерная диофантова экспонента вещественного числа

$$(*) \quad \begin{cases} |q| \leqslant t \\ |q\theta - p| \leqslant t^{-\gamma} \end{cases}$$

Равномерная диофантова экспонента

$$\hat{\omega} = \hat{\omega}(\theta) = \sup\left\{\gamma \in \mathbb{R} \,\middle|\, \forall \text{ дост. большого } t \ (*) \text{ имеет решение в } (q,p) \in \mathbb{Z}^2,\ q \neq 0\right\}$$

$$(**) \quad \begin{cases} |q| \leqslant t \\ |q(q\theta - p)| \leqslant t^{1-\gamma} \end{cases}$$

Слабая равномерная диофантова экспонента

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}(\theta) = \sup\left\{\gamma \in \mathbb{R} \,\middle|\, \forall \text{ дост. большого } t \ (**) \text{ имеет решение в } (q,p) \in \mathbb{Z}^2,\ q \neq 0\right\}$$

Слабая равномерная диофантова экспонента вещественного числа

$$(*)\quad \begin{cases} |q| \leqslant t \\ |q\theta - p| \leqslant t^{-\gamma} \end{cases}$$

Равномерная диофантова экспонента

$$\hat{\omega} = \hat{\omega}(\theta) = \sup\left\{\gamma \in \mathbb{R} \;\middle|\; \forall \text{ дост. большого } t \ (*) \text{ имеет решение в } (q,p) \in \mathbb{Z}^2,\ q \neq 0\right\}$$

$$(**)\quad \begin{cases} |q| \leqslant t \\ |q(q\theta - p)| \leqslant t^{1-\gamma} \end{cases}$$

Слабая равномерная диофантова экспонента

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}(\theta) = \sup\left\{\gamma \in \mathbb{R} \;\middle|\; \forall \text{ дост. большого } t \ (**) \text{ имеет решение в } (q,p) \in \mathbb{Z}^2,\ q \neq 0\right\}$$

Связь с решётками

$$\bar{\omega}(\Gamma_{\theta,\theta}) = \frac{\bar{\omega}(\theta) - 1}{2}, \qquad \text{где} \qquad \Gamma_{\theta,\theta} = \begin{pmatrix} \theta & -1 \\ 1 & \theta \end{pmatrix} \mathbb{Z}^2$$

Слабая равномерная диофантова экспонента вещественного числа

$$(**)\quad \begin{cases} |q| \leqslant t \\ |q(q\theta - p)| \leqslant t^{1-\gamma} \end{cases}$$

Слабая равномерная диофантова экспонента

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}(\theta) = \sup\left\{\gamma \in \mathbb{R} \,\middle|\, \forall \text{ дост. большого } t \ (**) \text{ имеет решение в } (q,p) \in \mathbb{Z}^2,\ q \neq 0\right\}$$

Связь с решётками

$$\bar{\omega}(\Gamma_{\theta,\theta}) = \frac{\bar{\omega}(\theta) - 1}{2}, \qquad \text{где} \qquad \Gamma_{\theta,\theta} = \begin{pmatrix} \theta & -1 \\ 1 & \theta \end{pmatrix} \mathbb{Z}^2$$

Слабая равномерная диофантова экспонента вещественного числа

$$(**)\qquad \begin{cases} |q| \leqslant t \\ |q(q\theta - p)| \leqslant t^{1-\gamma} \end{cases}$$

Слабая равномерная диофантова экспонента

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}(\theta) = \sup\left\{\gamma \in \mathbb{R} \;\middle|\; \forall \text{ дост. большого } t \ (**) \text{ имеет решение в } (q,p) \in \mathbb{Z}^2,\ q \neq 0\right\}$$

Связь с решётками

$$\bar{\omega}(\Gamma_{\theta,\theta}) = \frac{\bar{\omega}(\theta) - 1}{2}, \qquad \text{где} \qquad \Gamma_{\theta,\theta} = \begin{pmatrix} \theta & -1 \\ 1 & \theta \end{pmatrix} \mathbb{Z}^2$$

О.Г., 2025–26 — Нетривиальность слабой равномерной экспоненты числа

Для иррациональных θ спектр возможных значений $\bar{\omega}(\theta)$ совпадает с отрезком

$$[1, 2]$$

Спасибо!