О распределении дробных частей чисел вида $2^n 3^m \alpha$

Дмитрий Гайфулин

НИУ ВШЭ

Современные направления теории чисел
16 марта 2026

Дробные части и всюду плотные последовательности

В теории чисел любят изучать распределение дробных долей значений функций в натуральных точках. Пусть $f(n)$ – функция $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, зададим последовательность $\{f(1)\}, \{f(2)\}, \ldots$. Её элементы принадлежат $[0, 1) = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Дробные части и всюду плотные последовательности

В теории чисел любят изучать распределение дробных долей значений функций в натуральных точках. Пусть $f(n)$ – функция $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, зададим последовательность $\{f(1)\}, \{f(2)\}, \ldots$. Её элементы принадлежат $[0,1) = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Интуитивно понятно, что такое всюду плотная последовательность:

Определение

Последовательность $\xi_n \in [0,1)$ всюду плотна, если для любого интервала $(a,b) \in [0,1)$ существует k такое, что $\xi_k \in (a,b)$.

Дробные части и всюду плотные последовательности

В теории чисел любят изучать распределение дробных долей значений функций в натуральных точках. Пусть $f(n)$ – функция $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, зададим последовательность $\{f(1)\}, \{f(2)\}, \ldots$. Её элементы принадлежат $[0, 1) = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Интуитивно понятно, что такое всюду плотная последовательность:

Определение

Последовательность $\xi_n \in [0, 1)$ всюду плотна, если для любого интервала $(a, b) \in [0, 1)$ существует k такое, что $\xi_k \in (a, b)$.

Например, если x иррационально, то последовательность дробных частей $\{nx\}$ всюду плотна. Если же $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, то она, очевидно, пробегает только дроби со знаменателем q и не является всюду плотной.

Равномерное распределение

Определение

Последовательность $\xi_n \in [0,1)$ *равномерно распределена, если для любого интервала* $(a,b) \in [0,1)$ *выполнено*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\{\#n : 1 \leqslant n \leqslant N \quad \xi_n \in (a,b)\} = b - a. \tag{1}$$

Равномерное распределение

Определение

Последовательность $\xi_n \in [0,1)$ *равномерно распределена, если для любого интервала* $(a,b) \in [0,1)$ *выполнено*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \{\# n : 1 \leqslant n \leqslant N \quad \xi_n \in (a,b)\} = b - a. \tag{1}$$

Эквивалентное определение:

Определение

Последовательность $\xi_n \in [0,1)$ *равномерно распределена, если для любой интегрируемой по Риману функции* $f : [0,1) \to \mathbb{R}$ *выполнено*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(\xi_n) = \int\limits_0^1 f(x)dx. \tag{2}$$

Равномерно распределённые последовательности

Рассмотренная ранее последовательность $\{nx\}$ равномерно распределена. Верно и более сильное утверждение

Теорема (Вейль (1916))

Пусть хотя бы один из коэффициентов многочлена $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ иррационален. Тогда последовательность $\{P(n)\}_{n=1,2,\ldots}$ равномерно распределена.

Равномерно распределённые последовательности

Рассмотренная ранее последовательность $\{nx\}$ равномерно распределена. Верно и более сильное утверждение

Теорема (Вейль (1916))

Пусть хотя бы один из коэффициентов многочлена $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ иррационален. Тогда последовательность $\{P(n)\}_{n=1,2,\ldots}$ равномерно распределена.

Равномерно распределены, например, дробные доли $\sqrt{n}$, а вот последовательности $\{\sin(n)\}$ и $\{\log(n)\}$ всюду плотны, но не равномерно распределены.

Равномерно распределённые последовательности

Рассмотренная ранее последовательность $\{nx\}$ равномерно распределена. Верно и более сильное утверждение

Теорема (Вейль (1916))

Пусть хотя бы один из коэффициентов многочлена $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ *иррационален. Тогда последовательность* $\{P(n)\}_{n=1,2,\ldots}$ *равномерно распределена.*

Равномерно распределены, например, дробные доли $\sqrt{n}$, а вот последовательности $\{\sin(n)\}$ и $\{\log(n)\}$ всюду плотны, но не равномерно распределены. Если же взять экспоненциальные последовательности вида x^n, всё сразу становится гораздо сложнее: например, про последовательность $\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^n\right\}$ неизвестно почти ничего, непонятно даже, всюду ли она плотна.

Постановка задачи

Пусть α – произвольное иррациональное число. Мы будем исследовать распределение чисел вида $\{a^n b^m \alpha\}$, где m и n независимо пробегают по множеству натуральных чисел, a, b – произвольные фиксированные натуральные числа, например, 2 и 3.

Постановка задачи

Пусть α – произвольное иррациональное число. Мы будем исследовать распределение чисел вида $\{a^n b^m \alpha\}$, где m и n независимо пробегают по множеству натуральных чисел, a, b – произвольные фиксированные натуральные числа, например, 2 и 3.

Естественное ограничение – a и b не являются степенью одного натурального числа, что эквивалентно $\frac{\log a}{\log b} \notin \mathbb{Q}$. Такие числа называются мультипликативно независимыми, это более слабое условие, чем взаимная простота.

Постановка задачи

Пусть α – произвольное иррациональное число. Мы будем исследовать распределение чисел вида $\{a^n b^m \alpha\}$, где m и n независимо пробегают по множеству натуральных чисел, a, b – произвольные фиксированные натуральные числа, например, 2 и 3.

Естественное ограничение – a и b не являются степенью одного натурального числа, что эквивалентно $\frac{\log a}{\log b} \notin \mathbb{Q}$. Такие числа называются мультипликативно независимыми, это более слабое условие, чем взаимная простота.

Другими словами, случаи вида $\{4^n 8^m \alpha\}$ мы не рассматриваем, поскольку на самом деле это то же множество, что и $\{2^n \alpha\}$.

Теорема Фюрстенберга

Мы докажем следующее утверждение:

Теорема 1 (Фюрстенберг (1967))

Пусть a и b – произвольные мультипликативно независимые натуральные числа, α – произвольное иррациональное число. Тогда множество

$$\{a^n b^m \alpha\}, \quad m, n \in \mathbb{N} \tag{3}$$

всюду плотно на интервале $(0, 1)$.

Мы докажем следующее утверждение:

Теорема 1 (Фюрстенберг (1967))

Пусть a и b – произвольные мультипликативно независимые натуральные числа, α – произвольное иррациональное число. Тогда множество

$$\{a^n b^m \alpha\}, \quad m, n \in \mathbb{N} \tag{3}$$

всюду плотно на интервале $(0, 1)$.

Доказательство Фюрстенберга использует эргодическую теорию, мы будем следовать элементарному доказательству Бошерницана (1994).

Последовательность S

Пусть S – множество значений величины $a^n b^m$. Обозначим его элементы как $s_1 < s_2 < \ldots$. Легко видеть, что если a и b мультипликативно независимы, то $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{s_{n+1}}{s_n} = 1$. Такое свойство последовательности называется *нелакунарностью*.

Последовательность S

Пусть S – множество значений величины $a^n b^m$. Обозначим его элементы как $s_1 < s_2 < \dots$. Легко видеть, что если a и b мультипликативно независимы, то $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{s_{n+1}}{s_n} = 1$. Такое свойство последовательности называется *нелакунарностью*. Действительно, в этом случае для любого $\varepsilon > 0$ существуют целые p_0, q_0 и p_1, q_1 такие, что

$$0 < q_0 \log a - p_0 \log b < \varepsilon \quad 0 > q_1 \log a - p_1 \log b > -\varepsilon.$$

Последовательность S

Пусть S – множество значений величины $a^n b^m$. Обозначим его элементы как $s_1 < s_2 < \ldots$. Легко видеть, что если a и b мультипликативно независимы, то $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{s_{n+1}}{s_n} = 1$. Такое свойство последовательности называется *нелакунарностью*. Действительно, в этом случае для любого $\varepsilon > 0$ существуют целые p_0, q_0 и p_1, q_1 такие, что

$$0 < q_0 \log a - p_0 \log b < \varepsilon \quad 0 > q_1 \log a - p_1 \log b > -\varepsilon.$$

А значит, $1 < \frac{a^{q_0}}{b^{p_0}}, \frac{b^{p_1}}{a^{q_1}} < e^{\varepsilon} \sim 1 + \varepsilon$. Легко видеть, что при любом достаточно большом k если $s_k = a^n b^m$, либо $n \geqslant q_1$, либо $m \geqslant p_0$ точно выполнено.

Пусть S – множество значений величины $a^n b^m$. Обозначим его элементы как $s_1 < s_2 < \dots$. Легко видеть, что если a и b мультипликативно независимы, то $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{s_{n+1}}{s_n} = 1$. Такое свойство последовательности называется *нелакунарностью*. Действительно, в этом случае для любого $\varepsilon > 0$ существуют целые p_0, q_0 и p_1, q_1 такие, что

$$0 < q_0 \log a - p_0 \log b < \varepsilon \quad 0 > q_1 \log a - p_1 \log b > -\varepsilon.$$

А значит, $1 < \frac{a^{q_0}}{b^{p_0}}, \frac{b^{p_1}}{a^{q_1}} < e^\varepsilon \sim 1 + \varepsilon$. Легко видеть, что при любом достаточно большом k если $s_k = a^n b^m$, либо $n \geqslant q_1$, либо $m \geqslant p_0$ точно выполнено.
Заметим также, что S является полугруппой по умножению.

Инвариантность под действием полугруппы

Обозначим $K = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Будем говорить, что некоторое подмножество $X \subset K$ инвариантно под действием полугруппы S, если для любого $s \in S$ выполнено $sX \subset X$.

Инвариантность под действием полугруппы

Обозначим $K = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Будем говорить, что некоторое подмножество $X \subset K$ инвариантно под действием полугруппы S, если для любого $s \in S$ выполнено $sX \subset X$. Таким свойством, разумеется, обладает рассматриваемое в задаче множество $\{a^n b^m \alpha\}$, а также его замыкание.

Инвариантность под действием полугруппы

Обозначим $K = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Будем говорить, что некоторое подмножество $X \subset K$ инвариантно под действием полугруппы S, если для любого $s \in S$ выполнено $sX \subset X$. Таким свойством, разумеется, обладает рассматриваемое в задаче множество $\{a^n b^m \alpha\}$, а также его замыкание. Доказываемая нами теорема мгновенно выводится из следующего утверждения:

Теорема 2

Пусть X – замкнутое бесконечное подмножество K, инвариантное относительно некоторой нелакунарной полугруппы S. Тогда $X = K$.

Обозначим $K = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Будем говорить, что некоторое подмножество $X \subset K$ инвариантно под действием полугруппы S, если для любого $s \in S$ выполнено $sX \subset X$. Таким свойством, разумеется, обладает рассматриваемое в задаче множество $\{a^n b^m \alpha\}$, а также его замыкание. Доказываемая нами теорема мгновенно выводится из следующего утверждения:

Теорема 2

Пусть X – замкнутое бесконечное подмножество K, инвариантное относительно некоторой нелакунарной полугруппы S. Тогда $X = K$.

Достаточно применить теорему к множеству $\overline{\{a^n b^m \alpha\}}$.

Обозначим через X' множество предельных точек X. Будем выводить доказательство теоремы из двух лемм.

Лемма 1

Пусть $X \subset K$ – замкнутое бесконечное S-инвариантное. Пусть множество X' содержит рациональное число. Тогда $X = K$.

Формулировка двух лемм

Обозначим через X' множество предельных точек X. Будем выводить доказательство теоремы из двух лемм.

Лемма 1

Пусть $X \subset K$ – замкнутое бесконечное S-инвариантное. Пусть множество X' содержит рациональное число. Тогда $X = K$.

Лемма 2

Пусть Y – непустое замкнутое подмножество K, инвариантное относительно S. Тогда Y содержит рациональное число.

Формулировка двух лемм

Обозначим через X' множество предельных точек X. Будем выводить доказательство теоремы из двух лемм.

Лемма 1

Пусть $X \subset K$ – замкнутое бесконечное S-инвариантное. Пусть множество X' содержит рациональное число. Тогда $X = K$.

Лемма 2

Пусть Y – непустое замкнутое подмножество K, инвариантное относительно S. Тогда Y содержит рациональное число.

Теорема 2 легко выводится из сформулированных утверждений.

Формулировка двух лемм

Обозначим через X' множество предельных точек X. Будем выводить доказательство теоремы из двух лемм.

Лемма 1

Пусть $X \subset K$ – замкнутое бесконечное S-инвариантное. Пусть множество X' содержит рациональное число. Тогда $X = K$.

Лемма 2

Пусть Y – непустое замкнутое подмножество K, инвариантное относительно S. Тогда Y содержит рациональное число.

Теорема 2 легко выводится из сформулированных утверждений. X', очевидно, замкнуто и непусто т.к. X бесконечно.

Обозначим через X' множество предельных точек X. Будем выводить доказательство теоремы из двух лемм.

Лемма 1

Пусть $X \subset K$ – замкнутое бесконечное S-инвариантное. Пусть множество X' содержит рациональное число. Тогда $X = K$.

Лемма 2

Пусть Y – непустое замкнутое подмножество K, инвариантное относительно S. Тогда Y содержит рациональное число.

Теорема 2 легко выводится из сформулированных утверждений. X', очевидно, замкнуто и непусто т.к. X бесконечно. Оно инвариантно, как легко проверить, относительно S.

Формулировка двух лемм

Обозначим через X' множество предельных точек X. Будем выводить доказательство теоремы из двух лемм.

Лемма 1

Пусть $X \subset K$ – замкнутое бесконечное S-инвариантное. Пусть множество X' содержит рациональное число. Тогда $X = K$.

Лемма 2

Пусть Y – непустое замкнутое подмножество K, инвариантное относительно S. Тогда Y содержит рациональное число.

Теорема 2 легко выводится из сформулированных утверждений. X', очевидно, замкнуто и непусто т.к. X бесконечно. Оно инвариантно, как легко проверить, относительно S. Применяем Лемму 2 для $Y = X'$ и затем Лемму 1.

Доказательство Леммы 1. Случай $0 \in X'$.

Пусть X' содержит рациональную точку. Сначала рассмотрим случай, когда эта точка – 0. Выберем N такое, что $\frac{s_{n+1}}{s_n} < 1 + \varepsilon$ для всех $n \geqslant N$. Найдём $0 < x < \frac{\varepsilon}{s_N}$, принадлежащий X.

Доказательство Леммы 1. Случай $0 \in X'$.

Пусть X' содержит рациональную точку. Сначала рассмотрим случай, когда эта точка – 0. Выберем N такое, что $\frac{s_{n+1}}{s_n} < 1 + \varepsilon$ для всех $n \geqslant N$. Найдём $0 < x < \frac{\varepsilon}{s_N}$, принадлежащий X. Тогда последовательность

$$s_N x, s_{N+1} x, \dots$$

образует ε-сеть.

Доказательство Леммы 1. Случай $0 \in X'$.

Пусть X' содержит рациональную точку. Сначала рассмотрим случай, когда эта точка – 0. Выберем N такое, что $\frac{s_{n+1}}{s_n} < 1 + \varepsilon$ для всех $n \geqslant N$. Найдём $0 < x < \frac{\varepsilon}{s_N}$, принадлежащий X. Тогда последовательность

$$s_N x, s_{N+1} x, \dots$$

образует ε-сеть. А значит, в силу S-инвариантности и замкнутости X, имеем $X = K$.

Доказательство Леммы 1. Общий случай

Пусть $r = \frac{n}{t} \in X'$. Выберем мультипликативно независимые $p, q \in S$. Без ограничения общности можем считать, что p и q взаимно просты с t (иначе домножим r на соответствующую степень p или q).

Пусть $r = \frac{n}{t} \in X'$. Выберем мультипликативно независимые $p, q \in S$. Без ограничения общности можем считать, что p и q взаимно просты с t (иначе домножим r на соответствующую степень p или q).
Выберем u так, чтобы

$$p^u \equiv q^u \equiv 1 \pmod{t}. \tag{4}$$

Доказательство Леммы 1. Общий случай

Пусть $r = \frac{n}{t} \in X'$. Выберем мультипликативно независимые $p, q \in S$. Без ограничения общности можем считать, что p и q взаимно просты с t (иначе домножим r на соответствующую степень p или q).
Выберем u так, чтобы

$$p^u \equiv q^u \equiv 1 \pmod{t}. \tag{4}$$

Теперь мы видим, что множества $X - r$ и $X' - r$ инвариантны относительно домножения на нелакунарную полугруппу S', порождённую p^u и q^u.

Доказательство Леммы 1. Общий случай

Пусть $r = \frac{n}{t} \in X'$. Выберем мультипликативно независимые $p, q \in S$. Без ограничения общности можем считать, что p и q взаимно просты с t (иначе домножим r на соответствующую степень p или q).
Выберем u так, чтобы

$$p^u \equiv q^u \equiv 1 \pmod{t}. \tag{4}$$

Теперь мы видим, что множества $X - r$ и $X' - r$ инвариантны относительно домножения на нелакунарную полугруппу S', порождённую p^u и q^u. Дальше применяем рассуждение из предыдущего случая, лемма доказана.

Доказательство Леммы 2. Множества Y_i

Напомним формулировку: любое непустое замкнутое подмножество $Y \subset K$, инвариантное относительно S, содержит рациональную точку.

Напомним формулировку: любое непустое замкнутое подмножество $Y \subset K$, инвариантное относительно S, содержит рациональную точку.
Доказываем от противного. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и целое t с условием $\varepsilon t > 1$. Как в предыдущей лемме, выбираем p, q из S так, чтобы было выполнено $p^u \equiv q^u \equiv 1 (\mathrm{mod}\, t)$.

Доказательство Леммы 2. Множества Y_i

Напомним формулировку: любое непустое замкнутое подмножество $Y \subset K$, инвариантное относительно S, содержит рациональную точку.

Доказываем от противного. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и целое t с условием $\varepsilon t > 1$. Как в предыдущей лемме, выбираем p, q из S так, чтобы было выполнено $p^u \equiv q^u \equiv 1 (\operatorname{mod} t)$.

Построим индуктивно последовательность множеств

$$Y = Y_0 \supseteq Y_1 \supseteq \ldots \supseteq Y_{t-1},$$

полагая

$$Y_{i+1} = \{y \in Y_i \mid y + 1/t \in Y_i \pmod 1\}.$$

Доказательство Леммы 2. Множества Y_i

Напомним формулировку: любое непустое замкнутое подмножество $Y \subset K$, инвариантное относительно S, содержит рациональную точку.

Доказываем от противного. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и целое t с условием $\varepsilon t > 1$. Как в предыдущей лемме, выбираем p, q из S так, чтобы было выполнено $p^u \equiv q^u \equiv 1 (\operatorname{mod} t)$.

Построим индуктивно последовательность множеств

$$Y = Y_0 \supseteq Y_1 \supseteq \ldots \supseteq Y_{t-1},$$

полагая

$$Y_{i+1} = \{y \in Y_i \mid y + 1/t \in Y_i \pmod 1\}.$$

Покажем теперь, что определённые таким образом множества Y_i будут p^u и q^u-инвариантны, замкнуты и бесконечны при всех $i \leqslant t-1$.

Доказательство Леммы 2. Множества Y_i

Напомним формулировку: любое непустое замкнутое подмножество $Y \subset K$, инвариантное относительно S, содержит рациональную точку.

Доказываем от противного. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и целое t с условием $\varepsilon t > 1$. Как в предыдущей лемме, выбираем p, q из S так, чтобы было выполнено $p^u \equiv q^u \equiv 1 (\operatorname{mod} t)$.

Построим индуктивно последовательность множеств

$$Y = Y_0 \supseteq Y_1 \supseteq \ldots \supseteq Y_{t-1},$$

полагая

$$Y_{i+1} = \{y \in Y_i \mid y + 1/t \in Y_i \pmod 1\}.$$

Покажем теперь, что определённые таким образом множества Y_i будут p^u и q^u-инвариантны, замкнуты и бесконечны при всех $i \leqslant t-1$. Будем рассуждать по индукции. Базис индукции при $i = 0$ очевиден.

Доказательство Леммы 2. Индукция

Итак, пусть вышеупомянутые свойства (p^u и q^u-инвариантность, замкнутость и бесконечность) верны для Y_i. Рассмотрим множество

$$D_i = Y_i - Y_i \subset K.$$

Доказательство Леммы 2. Индукция

Итак, пусть вышеупомянутые свойства (p^u и q^u-инвариантность, замкнутость и бесконечность) верны для Y_i. Рассмотрим множество

$$D_i = Y_i - Y_i \subset K.$$

Оно замкнуто, т.к. Y_i компактно и содержит предельную точку 0, поскольку Y_i бесконечно.

Итак, пусть вышеупомянутые свойства (p^u и q^u-инвариантность, замкнутость и бесконечность) верны для Y_i. Рассмотрим множество

$$D_i = Y_i - Y_i \subset K.$$

Оно замкнуто, т.к. Y_i компактно и содержит предельную точку 0, поскольку Y_i бесконечно. Более того, D_i инвариантно относительно действия полугруппы, порождённой p^u и q^u, а значит, по Лемме 1, $D_i = K$,

Доказательство Леммы 2. Индукция

Итак, пусть вышеупомянутые свойства (p^u и q^u-инвариантность, замкнутость и бесконечность) верны для Y_i. Рассмотрим множество

$$D_i = Y_i - Y_i \subset K.$$

Оно замкнуто, т.к. Y_i компактно и содержит предельную точку 0, поскольку Y_i бесконечно. Более того, D_i инвариантно относительно действия полугруппы, порождённой p^u и q^u, а значит, по Лемме 1, $D_i = K$, в частности, D_i содержит $1/t$, а значит, Y_{i+1} непусто.

Доказательство Леммы 2. Индукция

Итак, пусть вышеупомянутые свойства (p^u и q^u-инвариантность, замкнутость и бесконечность) верны для Y_i. Рассмотрим множество

$$D_i = Y_i - Y_i \subset K.$$

Оно замкнуто, т.к. Y_i компактно и содержит предельную точку 0, поскольку Y_i бесконечно. Более того, D_i инвариантно относительно действия полугруппы, порождённой p^u и q^u, а значит, по Лемме 1, $D_i = K$, в частности, D_i содержит $1/t$, а значит, Y_{i+1} непусто. Свойства p^u и q^u-инвариантности и замкнутости для Y_{i+1} очевидны в силу предположения индукции и выбора u.

Итак, пусть вышеупомянутые свойства (p^u и q^u-инвариантность, замкнутость и бесконечность) верны для Y_i. Рассмотрим множество

$$D_i = Y_i - Y_i \subset K.$$

Оно замкнуто, т.к. Y_i компактно и содержит предельную точку 0, поскольку Y_i бесконечно. Более того, D_i инвариантно относительно действия полугруппы, порождённой p^u и q^u, а значит, по Лемме 1, $D_i = K$, в частности, D_i содержит $1/t$, а значит, Y_{i+1} непусто. Свойства p^u и q^u-инвариантности и замкнутости для Y_{i+1} очевидны в силу предположения индукции и выбора u. Также Y_{i+1} бесконечно в силу того, что оно (как подмножество Y) по предположению не содержит рациональных чисел и p^u-, q^u-инвариантности.

Таким образом, Y_{t-1} непусто. Возьмём его элемент y_0. В силу построения множеств Y_i, $Y = Y_0$ содержит все числа вида

$$y_i = y_0 + i/t, \quad i = 0, 1, 2, \dots, t-1.$$

Таким образом, мы нашли в Y ε-сеть, а значит, в силу замкнутости $Y = K$, лемма доказана, а с ней и основная теорема.

Следующая теорема была доказана в работе Bourgain, Lindenstrauss, Michel, Venkatesh в 2008.

Теорема 3 (B-L-M-V (2008))

Пусть a и b – произвольные мультипликативно независимые натуральные числа, α – произвольное иррациональное число меры иррациональности $k < \infty$. Тогда расстояние между соседними элементами на множестве

$$\{a^n b^m \alpha\}, \quad m, n \leqslant N \tag{5}$$

не превосходит $\frac{1}{(\log \log N)^{\kappa}}$, где $\kappa = \kappa(a, b)$ и $N \geqslant N_0(a, k, b)$.

Следующая теорема была доказана в работе Bourgain, Lindenstrauss, Michel, Venkatesh в 2008.

Теорема 3 (B-L-M-V (2008))

Пусть a и b – произвольные мультипликативно независимые натуральные числа, α – произвольное иррациональное число меры иррациональности $k < \infty$. Тогда расстояние между соседними элементами на множестве

$$\{a^n b^m \alpha\}, \quad m, n \leqslant N \tag{5}$$

не превосходит $\frac{1}{(\log\log N)^{\kappa}}$, где $\kappa = \kappa(a, b)$ и $N \geqslant N_0(a, k, b)$.

Напомним, что мера иррациональности α это супремум по всем k таким, что $|\alpha - p/q| < 1/q^k$ имеет бесконечно много решений в целых числах.

Эффективная версия теоремы

Следующая теорема была доказана в работе Bourgain, Lindenstrauss, Michel, Venkatesh в 2008.

Теорема 3 (B-L-M-V (2008))

Пусть a и b – произвольные мультипликативно независимые натуральные числа, α – произвольное иррациональное число меры иррациональности $k < \infty$. Тогда расстояние между соседними элементами на множестве

$$\{a^n b^m \alpha\}, \quad m, n \leqslant N \tag{5}$$

не превосходит $\frac{1}{(\log\log N)^\kappa}$, где $\kappa = \kappa(a, b)$ и $N \geqslant N_0(a, k, b)$.

Напомним, что мера иррациональности α это супремум по всем k таким, что $|\alpha - p/q| < 1/q^k$ имеет бесконечно много решений в целых числах. Совместно с Н.Г. Мощевитиным мы в 2023 получили элементарное доказательство этого результата.

Спасибо за внимание!