Открытая весенняя студенческая олимпиада по математике OSSM Comp'26

Факультета компьютерных наук ВШЭ

15 марта 2026, 15:00 – 18:00

1. Пусть $T_0 = (1)$. Для $n \geqslant 0$ матрица T_{n+1} размера $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ определяется по матрице T_n так:
$$T_{n+1} = \begin{pmatrix} T_n & \overline{T_n} \\ \overline{T_n} & T_n \end{pmatrix},$$
где $\overline{T_n}$ получается из T_n заменой всех 0 на 1 и всех 1 на 0. Найдите ранг матрицы T_n.

2. Каждому рациональному числу $\frac{p}{q}$ из открытого интервала $(0, 1)$, где p и q взаимно просты, сопоставим замкнутый интервал
$$\left[\frac{p}{q} - \frac{1}{4q^2}, \frac{p}{q} + \frac{1}{4q^2}\right].$$
Докажите, что число $\frac{\sqrt{2}}{2}$ не принадлежит ни одному из этих интервалов.

3. Пусть $n \geq 2$. Пусть $\mathcal{A}$ — семейство подмножеств множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ такое, что для любых $A_1, A_2, A_3, A_4 \in \mathcal{A}$ выполняется $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| \leq n-2$. Докажите, что $|\mathcal{A}| \leq 2^{n-2}$.

4. Докажите, что площадь множества точек (x, y) в единичном квадрате $[0, 1]^2$ евклидовой плоскости таких, что выполняется неравенство $\left\{\dfrac{x}{y}\right\} + \left\{\dfrac{y}{x}\right\} \leqslant 1$ меньше $\dfrac{5}{12}$.

5. Верно ли, что существует положительное вещественное число u такое, что для всех натуральных n число $[u^n] - n$ является чётным?