



Тверской
государственный
университет



НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ



Ненормальные модальные логики: странные миры и вычислительная сложность

Михаил Рыбаков¹ и Дарья Серова²
^{1,2}ТвГУ, ¹НИУ ВШЭ, ¹ВШМ МФТИ

Однодневный семинар по математической логике

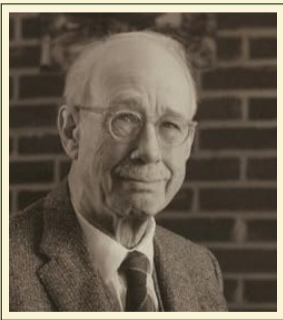
Москва, НИУ ВШЭ, ФКН
29 июня 2026 года

О логиках К. Льюиса ...

Мы ограничимся рассмотрением
систем Льюиса **S1–S5** (в основном).

О логиках К. Льюиса ...

Мы ограничимся рассмотрением систем Льюиса **S1–S5** (в основном).



Clarence Irving Lewis,
1883–1964.

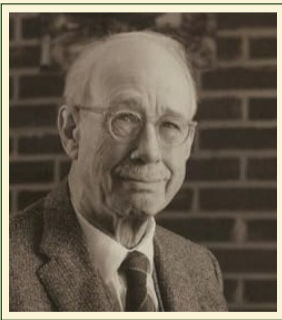
Американский философ,
логик. Основоположник
современной модальной
логики и концептуального
прагматизма.



K.I. Lewis and C.H. Langford. *Symbolic Logic*. The Century Co. 1932.

О логиках К. Льюиса ...

Мы ограничимся рассмотрением систем Льюиса **S1–S5** (в основном).



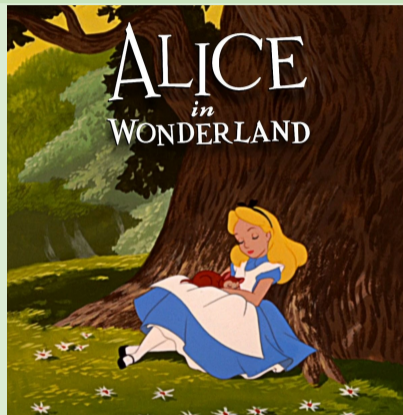
Clarence Irving Lewis,
1883–1964.

Американский философ,
логик. Основоположник
современной модальной
логики и концептуального
прагматизма.



K.I. Lewis and C.H. Langford. *Symbolic Logic*. The Century Co. 1932.

... и о мирах Льюиса К.



Модальности \Box и \Diamond

Модальности в формулах:

- $\Box A$: «необходимо A »,
«доказуемо A »,
«всегда будет A », ...
- $\Diamond A$: «возможно A »,
«допустимо A »,
«когда-то будет A », ...

Модальности \square и \diamond

Модальности в формулах:

- $\square A$: «необходимо A »,
«доказуемо A »,
«всегда будет A », ...
- $\diamond A$: «возможно A »,
«допустимо A »,
«когда-то будет A », ...

У нас всегда 6 часов



Модальности \square и \diamond

Модальности в формулах:

- $\square A$: «необходимо A »,
«доказуемо A »,
«всегда будет A », ...
- $\diamond A$: «возможно A »,
«допустимо A »,
«когда-то будет A », ...

Модальные формулы:

$$\varphi ::= p \mid \top \mid \perp \mid (\varphi \wedge \varphi) \mid (\varphi \vee \varphi) \mid (\varphi \rightarrow \varphi) \mid \square\varphi \mid \diamond\varphi$$

У нас всегда 6 часов



Модальности \square и \diamond

Модальности в формулах:

- $\square A$: «необходимо A »,
«доказуемо A »,
«всегда будет A », ...
- $\diamond A$: «возможно A »,
«допустимо A »,
«когда-то будет A », ...

Модальные формулы:

$$\varphi ::= p \mid \top \mid \perp \mid (\varphi \wedge \varphi) \mid (\varphi \vee \varphi) \mid (\varphi \rightarrow \varphi) \mid \square\varphi \mid \diamond\varphi$$

Можно считать, что $\diamond A = \neg\square\neg A$ и $\square A = \neg\diamond\neg A$.

У нас всегда 6 часов



A строго влечёт B

Пусть

$$A \Rightarrow B = \Box(A \rightarrow B).$$

A строго влечёт B

Пусть

$$A \Rightarrow B = \Box(A \rightarrow B).$$

6 часов \Rightarrow пора пить чай



A строго влечёт B

Пусть

$$A \Rightarrow B = \Box(A \rightarrow B).$$

Если в языке есть \Rightarrow , то

$$\Diamond\varphi = \neg(\varphi \Rightarrow \neg\varphi), \quad \Box\varphi = \neg\Diamond\neg\varphi.$$

6 часов \Rightarrow пора пить чай



A строго влечёт B

Пусть

$$A \Rightarrow B = \Box(A \rightarrow B).$$

Если в языке есть \Rightarrow , то

$$\Diamond\varphi = \neg(\varphi \Rightarrow \neg\varphi), \quad \Box\varphi = \neg\Diamond\neg\varphi.$$

В книге Р. Фейса так:

$$\varphi ::= p \mid \neg\varphi \mid (\varphi \wedge \varphi) \mid \Diamond\varphi.$$



R. Feys. *Modal Logics*. Louvain, E. Nauwelaerts, 1965.
Р. Фейс. *Модальная логика*. Москва, Наука, 1974.

6 часов \Rightarrow пора пить чай



Шкала и модель Крипке

Шкала Крипке: $F = \langle W, R \rangle$, где

- W — множество *возможных миров*;
- R — *отношение достижимости* на W .

Шкала и модель Крипке

Шкала Крипке: $F = \langle W, R \rangle$, где

- W — множество *возможных миров*;
- R — *отношение достижимости* на W .

= структура миров



Шкала и модель Крипке

Шкала Крипке: $F = \langle W, R \rangle$, где

- W — множество *возможных миров*;
- R — *отношение достижимости* на W .

Модель Крипке: $M = \langle F, v \rangle$, где

- v — *оценка* переменных на W .

= структура миров



Шкала и модель Крипке

Шкала Крипке: $F = \langle W, R \rangle$, где

- W — множество *возможных миров*;
- R — *отношение достижимости* на W .

Модель Крипке: $M = \langle F, v \rangle$, где

- v — *оценка* переменных на W .

Истинность в мире $x \in W$:

$$x \models \Box A \Leftrightarrow \forall y \in R(x) y \models A;$$

$$x \models \Diamond A \Leftrightarrow \exists y \in R(x) y \models A.$$

= структура миров



Шкала и модель Крипке

Шкала Крипке: $F = \langle W, R \rangle$, где

- W — множество *возможных миров*;
- R — *отношение достижимости* на W .

Модель Крипке: $M = \langle F, v \rangle$, где

- v — *оценка* переменных на W .

Истинность в мире $x \in W$:

$$x \models \Box A \Leftrightarrow \forall y \in R(x) y \models A;$$

$$x \models \Diamond A \Leftrightarrow \exists y \in R(x) y \models A.$$

= структура миров



Тогда получаем, что всегда $x \models \Box \top$ и $x \not\models \Diamond \perp$.

Основная идея семантики

Миру x сопоставляется семейство окрестностей $O(x)$, т.е. $O(x) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(W))$.

Основная идея семантики

Миру x сопоставляется семейство окрестностей $O(x)$, т.е. $O(x) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(W))$.

= иная структура миров



Основная идея семантики

Миру x сопоставляется семейство окрестностей $O(x)$, т.е. $O(x) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(W))$.
И тогда

$$x \models \Box A \iff \exists u \in O(x) \forall y \in u \ y \models A;$$

$$x \models \Diamond A \iff \forall u \in O(x) \exists y \in u \ y \models A.$$

= иная структура миров



Основная идея семантики

Миру x сопоставляется семейство окрестностей $O(x)$, т.е. $O(x) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(W))$.
И тогда

$$\begin{aligned}x \models \Box A &\Leftrightarrow \exists u \in O(x) \forall y \in u \ y \models A; \\x \models \Diamond A &\Leftrightarrow \forall u \in O(x) \exists y \in u \ y \models A.\end{aligned}$$

Получаем, что тогда уже возможно как $x \not\models \Box \top$, так и $x \models \Diamond \perp$
(надо взять $O(x) = \emptyset$).

= иная структура миров



Основная идея семантики

Миру x сопоставляется семейство окрестностей $O(x)$, т.е. $O(x) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(W))$.
И тогда

$$\begin{aligned}x \models \Box A &\Leftrightarrow \exists u \in O(x) \forall y \in u \ y \models A; \\x \models \Diamond A &\Leftrightarrow \forall u \in O(x) \exists y \in u \ y \models A.\end{aligned}$$

Получаем, что тогда уже возможно как $x \not\models \Box \top$, так и $x \models \Diamond \perp$
(надо взять $O(x) = \emptyset$).

Вопрос: *как добиться похожего в семантике Крипке?*

= иная структура миров



С точки зрения знаний

Пусть, на время, $\Box A = \text{«известно } A\text{»}$.

С точки зрения знаний

Пусть, на время, $\Box A = \text{«известно } A\text{»}$.

Тогда

- $\Diamond \perp$ кажется сомнительным,
- $\Diamond \Diamond \perp$ не выглядит неприемлемым.

С точки зрения знаний

Пусть, на время, $\Box A =$ «известно A ».

Тогда

- $\Diamond \perp$ кажется сомнительным,
- $\Diamond \Diamond \perp$ не выглядит неприемлемым.

В семантике Крипке:

$$x \models \Diamond \Diamond \perp \iff \exists y \in R(x) y \models \Diamond \perp.$$

С точки зрения знаний

Пусть, на время, $\Box A =$ «известно A ».

Тогда

- $\Diamond \perp$ кажется сомнительным,
- $\Diamond \Diamond \perp$ не выглядит неприемлемым.

В семантике Крипке:

$$x \models \Diamond \Diamond \perp \iff \exists y \in R(x) y \models \Diamond \perp.$$

Пол-чашечки чая? ☺



С точки зрения знаний

Пусть, на время, $\Box A =$ «известно A ».

Тогда

- $\Diamond \perp$ кажется сомнительным,
- $\Diamond \Diamond \perp$ не выглядит неприемлемым.

В семантике Крипке:

$$x \models \Diamond \Diamond \perp \iff \exists y \in R(x) y \models \Diamond \perp.$$

Если $y \models \Diamond \perp$, то называем y *странным*.

Пол-чашечки чая? ☺



С точки зрения знаний

Пусть, на время, $\Box A =$ «известно A ».

Тогда

- $\Diamond \perp$ кажется сомнительным,
- $\Diamond \Diamond \perp$ не выглядит неприемлемым.

В семантике Крипке:

$$x \models \Diamond \Diamond \perp \iff \exists y \in R(x) y \models \Diamond \perp.$$

Если $y \models \Diamond \perp$, то называем y *странным*.

Пол-чашечки чая? ☺



Терминология: странный = ненормальный = взрывающийся.

С точки зрения знаний

Пусть, на время, $\Box A =$ «известно A ».

Тогда

- $\Diamond \perp$ кажется сомнительным,
- $\Diamond \Diamond \perp$ не выглядит неприемлемым.

В семантике Крипке:

$$x \models \Diamond \Diamond \perp \iff \exists y \in R(x) y \models \Diamond \perp.$$

Если $y \models \Diamond \perp$, то называем y *странным*.

Пол-чашечки чая? ☺



Терминология: странный = ненормальный = взрывающийся.

Спойлер: ненормальный мир — это мир безграничных возможностей. ☺

Семантика Крипке (по-новому)

Шкала Крипке: $M = \langle W, N, R \rangle$, где

- $\langle W, R \rangle$ — шкала Крипке;
- N — множество *нормальных миров* в W .

Семантика Крипке (по-новому)

Шкала Крипке: $M = \langle W, N, R \rangle$, где

- $\langle W, R \rangle$ — шкала Крипке;
- N — множество *нормальных миров* в W .

= структура миров



Семантика Крипке (по-новому)

Шкала Крипке: $M = \langle W, N, R \rangle$, где

- $\langle W, R \rangle$ — шкала Крипке;
- N — множество *нормальных миров* в W .

Модель Крипке: $M = \langle F, v \rangle$, где

- v — оценка переменных в W .

= структура миров



Семантика Крипке (по-новому)

Шкала Крипке: $M = \langle W, N, R \rangle$, где

- $\langle W, R \rangle$ — шкала Крипке;
- N — множество *нормальных миров* в W .

Модель Крипке: $M = \langle F, v \rangle$, где

- v — оценка переменных в W .

Истинность в мире $x \in W$:

$$x \models \Box A \Leftrightarrow x \in N \text{ и } \forall y \in R(x) y \models A;$$
$$x \models \Diamond A \Leftrightarrow x \notin N \text{ или } \exists y \in R(x) y \models A.$$

= структура миров



Семантика Крипке (по-новому)

Шкала Крипке: $M = \langle W, N, R \rangle$, где

- $\langle W, R \rangle$ — шкала Крипке;
- N — множество *нормальных миров* в W .

Модель Крипке: $M = \langle F, v \rangle$, где

- v — оценка переменных в W .

Истинность в мире $x \in W$:

$$\begin{aligned}x \models \Box A &\Leftrightarrow x \in N \text{ и } \forall y \in R(x) y \models A; \\x \models \Diamond A &\Leftrightarrow x \notin N \text{ или } \exists y \in R(x) y \models A.\end{aligned}$$

Тогда: если $x \in N$, то $x \models \Box \top$ и $x \not\models \Diamond \perp$,
если $x \notin N$, то $x \not\models \Box \top$ и $x \models \Diamond \perp$.

= структура миров



Аксиомы и правила вывода

Аксиомы:

- $(p \wedge q) \Rightarrow p$;
- $(p \wedge q) \Rightarrow (q \wedge p)$;
- $((p \wedge q) \wedge r) \Rightarrow (p \wedge (q \wedge r))$;
- $p \Rightarrow (p \wedge p)$;
- $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$;
- $p \Rightarrow \diamond p$.

Правила вывода:

- (Subst): по φ даёт $[\psi/p]\varphi$;
- (SMP): по φ и $\varphi \Rightarrow \psi$ даёт ψ ;
- (ER): по $\psi \Leftrightarrow \chi$ и $[\psi/p]\varphi$ даёт $[\chi/p]\varphi$.

... буквы ...



Добавим аксиомы

Логики:

- **S2** = **S1** + $\diamond(p \wedge q) \Rightarrow \diamond p$;
- **S3** = **S2** + $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\diamond p \Rightarrow \diamond q)$;
- **S4** = **S3** + $\Box p \rightarrow \Box \Box p = \mathbf{S3} + \Box \Box \top$;
- **S5** = **S4** + $\diamond p \rightarrow \Box \diamond p = \mathbf{S4} + p \rightarrow \Box \diamond p$.

... снова буквы ...



Добавим аксиомы

Логики:

- **S2** = **S1** + $\diamond(p \wedge q) \Rightarrow \diamond p$;
- **S3** = **S2** + $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\diamond p \Rightarrow \diamond q)$;
- **S4** = **S3** + $\Box p \rightarrow \Box \Box p = \mathbf{S3} + \Box \Box \top$;
- **S5** = **S4** + $\diamond p \rightarrow \Box \diamond p = \mathbf{S4} + p \rightarrow \Box \diamond p$.

В логиках **S4** и **S5** выводится формула

$$\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$$

и они замкнуты по правилу (Nec), которое по φ даёт $\Box \varphi$.

Такие логики называются *нормальными*.

... снова буквы ...



Логика S5 и S4

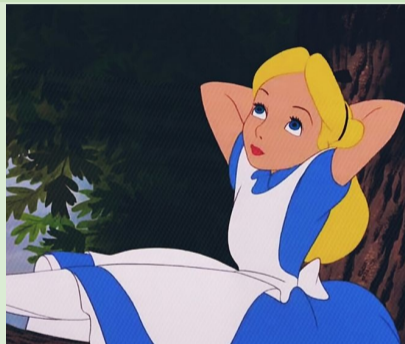
Хорошо известно, что:

- **S5** — логика всех шкал, где $N = W$ и $R = W \times W$;
- **S4** — логика всех предпорядков, где $N = W$.

Нам будет нужна ещё одна логика:

- **T** — логика всех рефлексивных шкал, где $N = W$.

Их все знают. ☺



Логики **S3** и **S2**

Хорошо известно, что:

- **S3** — логика нормальных миров всех шкал Крипке, где R — предпорядок на W (рефлексивно и транзитивно);
- **S2** — логика нормальных миров всех шкал Крипке, где R рефлексивно на N .

Логики **S3** и **S2**

Хорошо известно, что:

- **S3** — логика нормальных миров всех шкал Крипке, где R — предпорядок на W (рефлексивно и транзитивно);
- **S2** — логика нормальных миров всех шкал Крипке, где R рефлексивно на N .

А как же **S1**?



Логики **S3** и **S2**


Хорошо известно, что:

- **S3** — логика нормальных миров всех шкал Крипке, где R — предпорядок на W (рефлексивно и транзитивно);
- **S2** — логика нормальных миров всех шкал Крипке, где R рефлексивно на N .

А как же **S1**?



Что касается **S1**, то её семантика довольно сложна, и мы её не приводим. Её можно найти у Крессвелла:

-  M.J. Cresswell. The completeness of S1 and some related systems. Notre Dame Journal of Formal Logic, 13(4):485–496, 1972.

Нетрудно видеть, что ...

Заметим, что для любой формулы A

$$A \in S4 \iff \Box\Box\top \rightarrow A \in S3.$$

Можно уменьшиться до ...



Нетрудно видеть, что ...

Заметим, что для любой формулы A

$$A \in S4 \iff \Box\Box\top \rightarrow A \in S3.$$

Теорема:

Логика $S3$ является PSPACE-трудной, причём даже в языке с одной переменной.

Можно уменьшиться до ...



Нетрудно видеть, что ...

Заметим, что для любой формулы A

$$A \in S4 \iff \Box\Box\top \rightarrow A \in S3.$$

Теорема:

Логика $S3$ является PSPACE-трудной, причём даже в языке с одной переменной.

Замечание: обратите внимание, что $S3 \subset S4$.

Можно уменьшиться до ...



Истинность в странных мирах

Опишем истинность в мирах из $W \setminus N$:

$$I(p) = p, \quad \text{где } p \text{ — переменная;}$$

$$I(\top) = \top;$$

$$I(\perp) = \perp;$$

$$I(\psi_1 \wedge \psi_2) = I(\psi_1) \wedge I(\psi_2);$$

$$I(\psi_1 \vee \psi_2) = I(\psi_1) \vee I(\psi_2);$$

$$I(\psi_1 \rightarrow \psi_2) = I(\psi_1) \rightarrow I(\psi_2);$$

$$I(\Box\psi) = \perp;$$

$$I(\Diamond\psi) = \top.$$

Объяснить необъяснимое



Введём переменные q_B , где $B \in \text{sub } A$

Пусть Φ — конъюнкция формул

$$q_p \leftrightarrow p;$$

$$q_{\top} \leftrightarrow \top;$$

$$q_{\perp} \leftrightarrow \perp;$$

$$q_{\psi_1 \wedge \psi_2} \leftrightarrow (q_{\psi_1} \wedge q_{\psi_2});$$

$$q_{\psi_1 \vee \psi_2} \leftrightarrow (q_{\psi_1} \vee q_{\psi_2});$$

$$q_{\psi_1 \rightarrow \psi_2} \leftrightarrow (q_{\psi_1} \rightarrow q_{\psi_2});$$

$$q_{\Box \psi} \leftrightarrow (s \wedge \Box((s \rightarrow q_{\psi}) \wedge (\neg s \rightarrow I(\psi))));$$

$$q_{\Diamond \psi} \leftrightarrow (s \rightarrow \Diamond((s \wedge q_{\psi}) \vee (\neg s \wedge I(\psi)))).$$

Введём переменные q_B , где $B \in \text{sub } A$

Пусть Φ — конъюнкция формул

$$q_p \leftrightarrow p;$$

$$q_{\top} \leftrightarrow \top;$$

$$q_{\perp} \leftrightarrow \perp;$$

$$q_{\psi_1 \wedge \psi_2} \leftrightarrow (q_{\psi_1} \wedge q_{\psi_2});$$

$$q_{\psi_1 \vee \psi_2} \leftrightarrow (q_{\psi_1} \vee q_{\psi_2});$$

$$q_{\psi_1 \rightarrow \psi_2} \leftrightarrow (q_{\psi_1} \rightarrow q_{\psi_2});$$

$$q_{\Box \psi} \leftrightarrow (s \wedge \Box((s \rightarrow q_{\psi}) \wedge (\neg s \rightarrow I(\psi))));$$

$$q_{\Diamond \psi} \leftrightarrow (s \rightarrow \Diamond((s \wedge q_{\psi}) \vee (\neg s \wedge I(\psi)))).$$

$$\text{Тогда: } A \in \mathbf{S3} \iff s \wedge \Box \Phi \rightarrow q_A \in \mathbf{S4}.$$

Снова переход ...



Введём переменные q_B , где $B \in \text{sub } A$

Пусть Φ — конъюнкция формул

$$q_p \leftrightarrow p;$$

$$q_{\top} \leftrightarrow \top;$$

$$q_{\perp} \leftrightarrow \perp;$$

$$q_{\psi_1 \wedge \psi_2} \leftrightarrow (q_{\psi_1} \wedge q_{\psi_2});$$

$$q_{\psi_1 \vee \psi_2} \leftrightarrow (q_{\psi_1} \vee q_{\psi_2});$$

$$q_{\psi_1 \rightarrow \psi_2} \leftrightarrow (q_{\psi_1} \rightarrow q_{\psi_2});$$

$$q_{\Box \psi} \leftrightarrow (s \wedge \Box((s \rightarrow q_{\psi}) \wedge (\neg s \rightarrow I(\psi))));$$

$$q_{\Diamond \psi} \leftrightarrow (s \rightarrow \Diamond((s \wedge q_{\psi}) \vee (\neg s \wedge I(\psi)))).$$

Тогда: $A \in \mathbf{S3} \iff s \wedge \Box \Phi \rightarrow q_A \in \mathbf{S4}$.

Снова переход ...



Теорема: *Логика **S3** является PSPACE-полной, причём даже в языке с одной переменной.*

Подправим погружения

Заметим, что для любой формулы A

$$\begin{aligned} A \in \mathbf{T} &\iff \Box^{\leq md A} \Box \top \rightarrow A \in \mathbf{S2}; \\ A \in \mathbf{S2} &\iff s \wedge \Box^{\leq md A} \Phi \rightarrow q_A \in \mathbf{T}, \end{aligned}$$

где $md A$ — модальная глубина формулы A
и $\Box^{\leq k} \Phi = \Phi \wedge \Box \Phi \wedge \Box^2 \Phi \wedge \dots \wedge \Box^k \Phi$.

Чуть-чуть подкрасим



Подправим погружения

Заметим, что для любой формулы A

$$\begin{aligned} A \in \mathbf{T} &\iff \Box^{\leq md A} \Box \top \rightarrow A \in \mathbf{S2}; \\ A \in \mathbf{S2} &\iff s \wedge \Box^{\leq md A} \Phi \rightarrow q_A \in \mathbf{T}, \end{aligned}$$

где $md A$ — модальная глубина формулы A
и $\Box^{\leq k} \Phi = \Phi \wedge \Box \Phi \wedge \Box^2 \Phi \wedge \dots \wedge \Box^k \Phi$.

Теорема:

Логика $\mathbf{S2}$ является PSPACE-полной, причём даже в языке с одной переменной.

Чуть-чуть подкрасим



Подправим погружения

Заметим, что для любой формулы A

$$\begin{aligned} A \in \mathbf{T} &\iff \Box^{\leq md A} \Box \top \rightarrow A \in \mathbf{S2}; \\ A \in \mathbf{S2} &\iff s \wedge \Box^{\leq md A} \Phi \rightarrow q_A \in \mathbf{T}, \end{aligned}$$

где $md A$ — модальная глубина формулы A
и $\Box^{\leq k} \Phi = \Phi \wedge \Box \Phi \wedge \Box^2 \Phi \wedge \dots \wedge \Box^k \Phi$.

Теорема:

Логика $\mathbf{S2}$ является PSPACE-полной, причём даже в языке с одной переменной.

Замечание:

Константный фрагмент логики $\mathbf{S2}$ является PSPACE-полным.

Чуть-чуть подкрасим



Осталось ли время для S6–S8?

Заглянем в замочную скважину?..



Заглянем в замочную скважину?..



Сильно ненормальные

Следующие логики являются наследственно ненормальными:

$$S6 = S2 + \diamond\diamond p;$$

$$S7 = S3 + \diamond\diamond p;$$

$$S8 = S3 + \square\diamond\diamond p.$$

Заглянем в замочную скважину?..



Сильно ненормальные

Следующие логики являются наследственно ненормальными:

$$S6 = S2 + \diamond\diamond p;$$

$$S7 = S3 + \diamond\diamond p;$$

$$S8 = S3 + \square\diamond\diamond p.$$

Теорема:

Логики S6–S8 и их фрагменты от одной переменной PSPACE-полны.

- A. Chagrov, M. Rybakov. How many variables does one need to prove PSPACE-hardness of modal logics? *Advances in Modal Logic*, 4:71–82, King’s College Publications, London, 2003.
- A. Chagrov, M. Zakharyashev. *Modal Logic*. Oxford: Oxford logic guides, 1997.
- M. J. Cresswell. The completeness of S1 and some related systems. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 13(4):485–496, 1972.
- R. Feys. *Modal Logics*. Louvain, E. Nauwelaerts, 1965.
- J. Y. Halpern. The effect of bounding the number of primitive propositions and the depth of nesting on the complexity of modal logic. *Artificial Intelligence*, 75(2):361–372, 1995.
- S. A. Kripke. *Semantical Analysis of Modal Logic II. Non-Normal Modal Propositional Calculi. The Theory of Models: Proceedings of the 1963 International Symposium at Berkeley*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1965, pp. 206–220.
- A. Kudinov, M. Rybakov. Complexity of the variable-free fragments of non-normal modal logics (extended version). Cornell University, arXiv: 2507.09136, 2025, 8 pp.
- R. E. Ladner. The computational complexity of provability in systems of modal propositional logic. *SIAM Journal on Computing*, 6(3):467–480, 1977.
- C. I. Lewis, C. H. Langford. *Symbolic Logic*. The Century Co., New York, 1932. (Second edition reprinted by Dover Publications, 1959.)
- E. Spaan. *Complexity of Modal Logics*. PhD thesis, University of Amsterdam, 1993.
- V. Švejdar. The decision problem of provability logic with only one atom. *Archive for Mathematical Logic*, 42(8):763–768, 2003.

Спасибо за внимание!