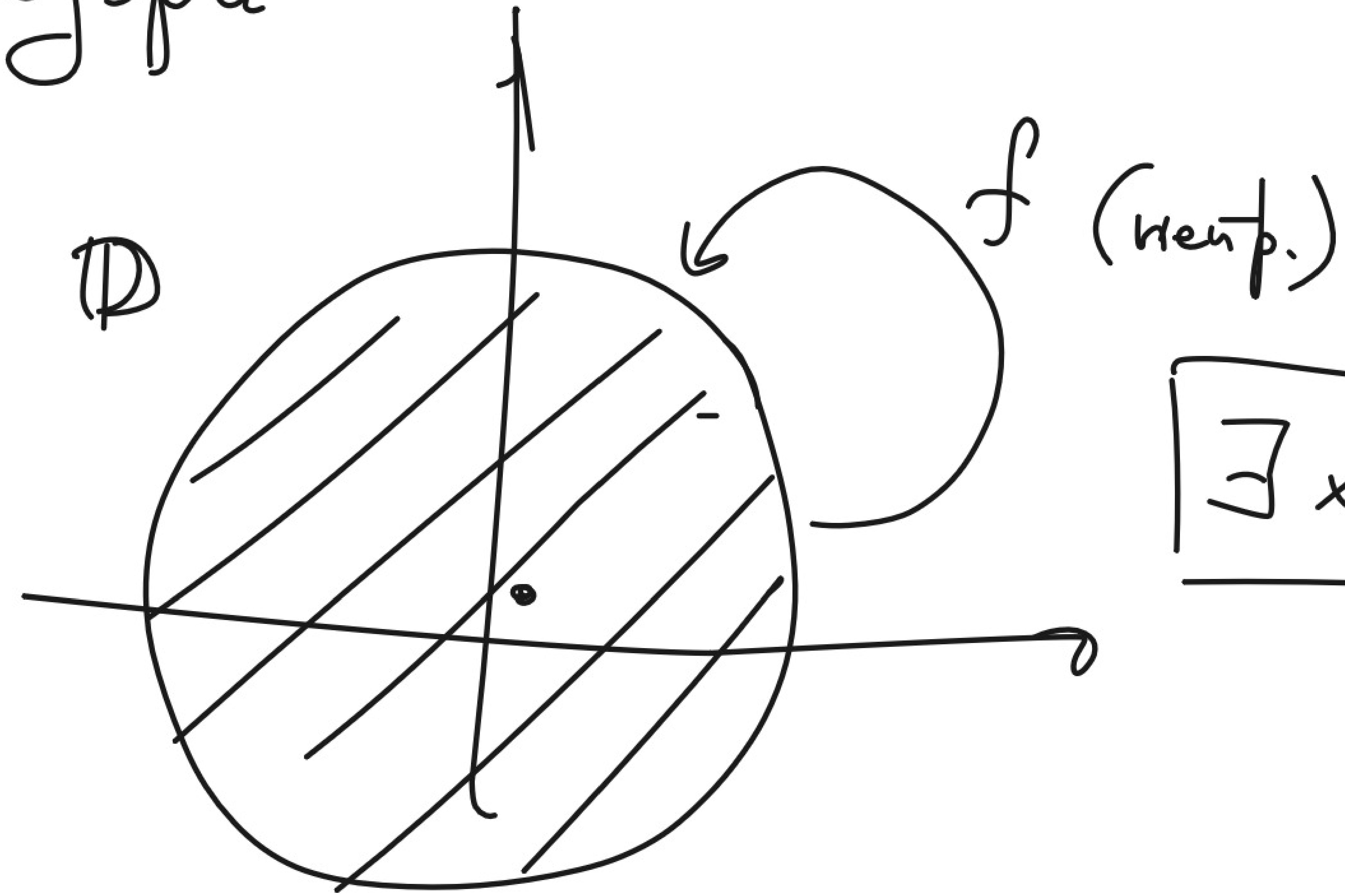
Доказательство т.Брауэра о неподвижной точке
в вещественно-когезивной HoTT

Докладчик Соколов П.П.

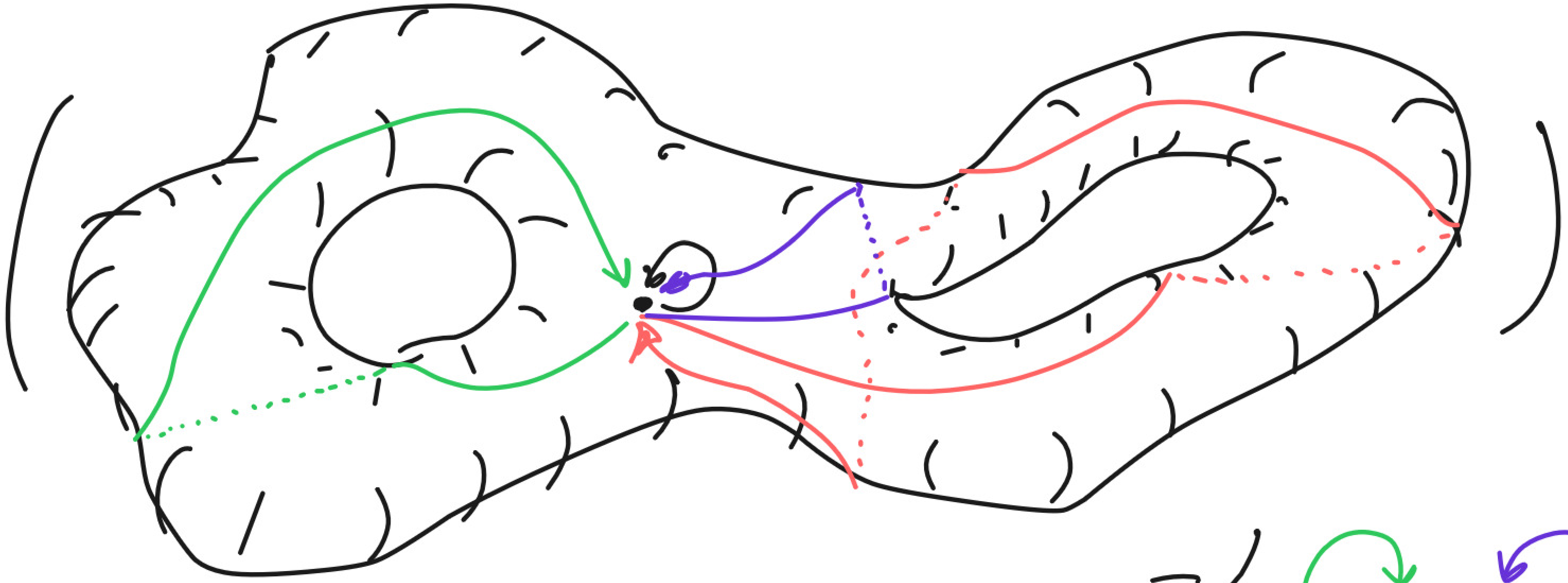
"т. Брауэра"

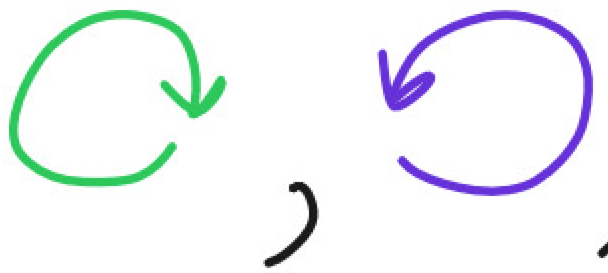


$$\boxed{\exists\, x:\ f(x) = x.}$$

$\pi_1(S)$ (S – связное тополог. пр-во)

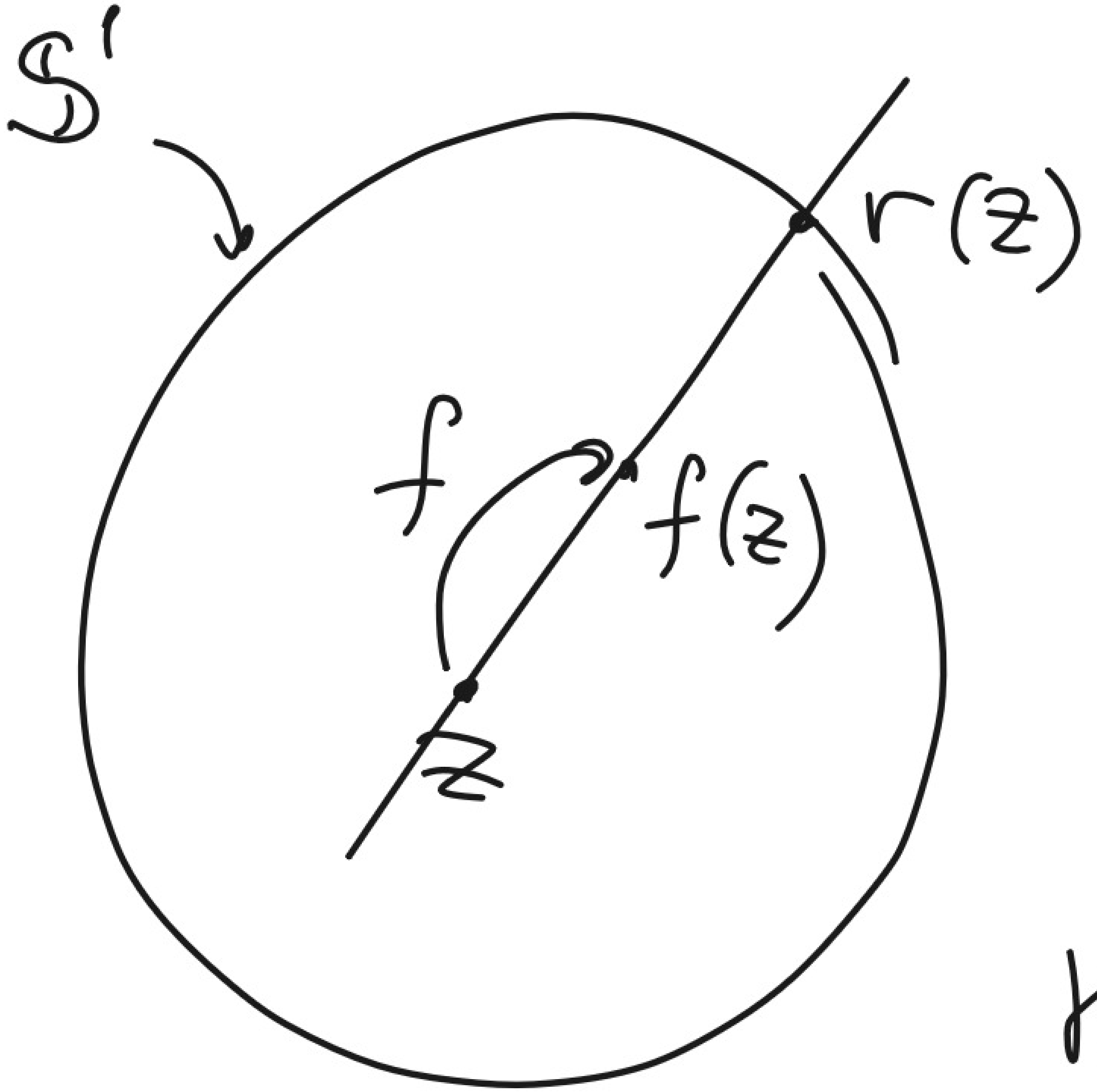
"Пространство петель S"

$\pi_1\Big($  $\Big) =$

$= \langle$  $\rangle$

* с точностью до непр. отобр. между ними

Д-во "т. Брауэра"



$r : \mathbb{D} \to S^1$

— непрер.

$\Rightarrow$ $S^1 \subseteq \mathbb{D}$ - ретракт

$\Rightarrow$ $\pi_1(S^1) \subseteq \pi_1(\mathbb{D})$ —

— ретракт

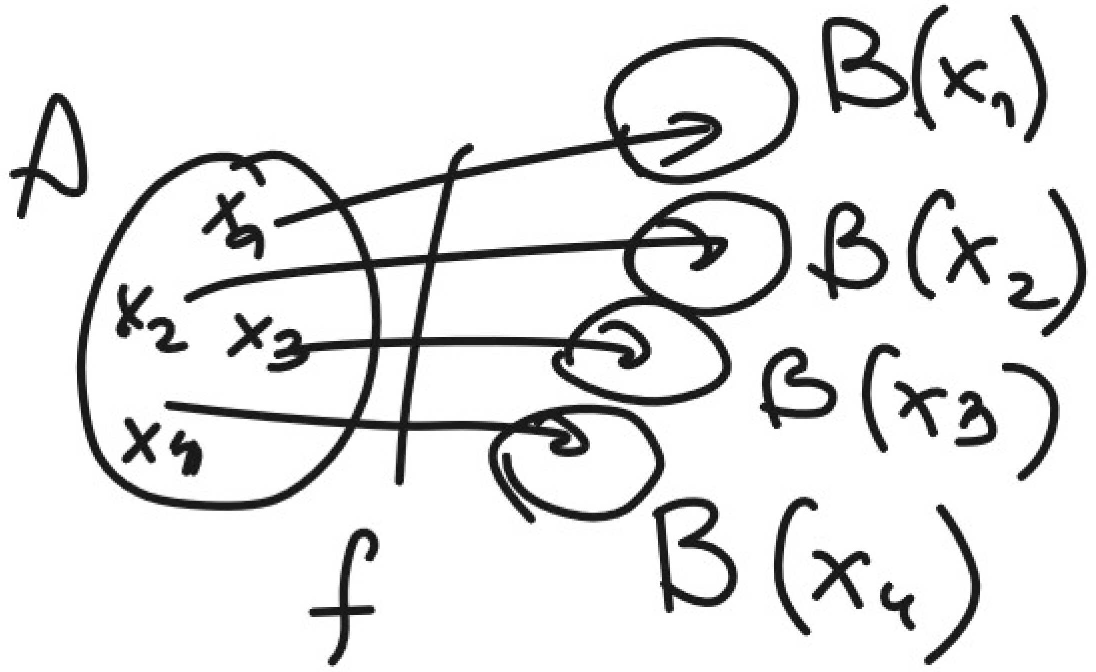
Но! $\pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$

$\pi_1(\mathbb{D}) \simeq \{\cdot\}$

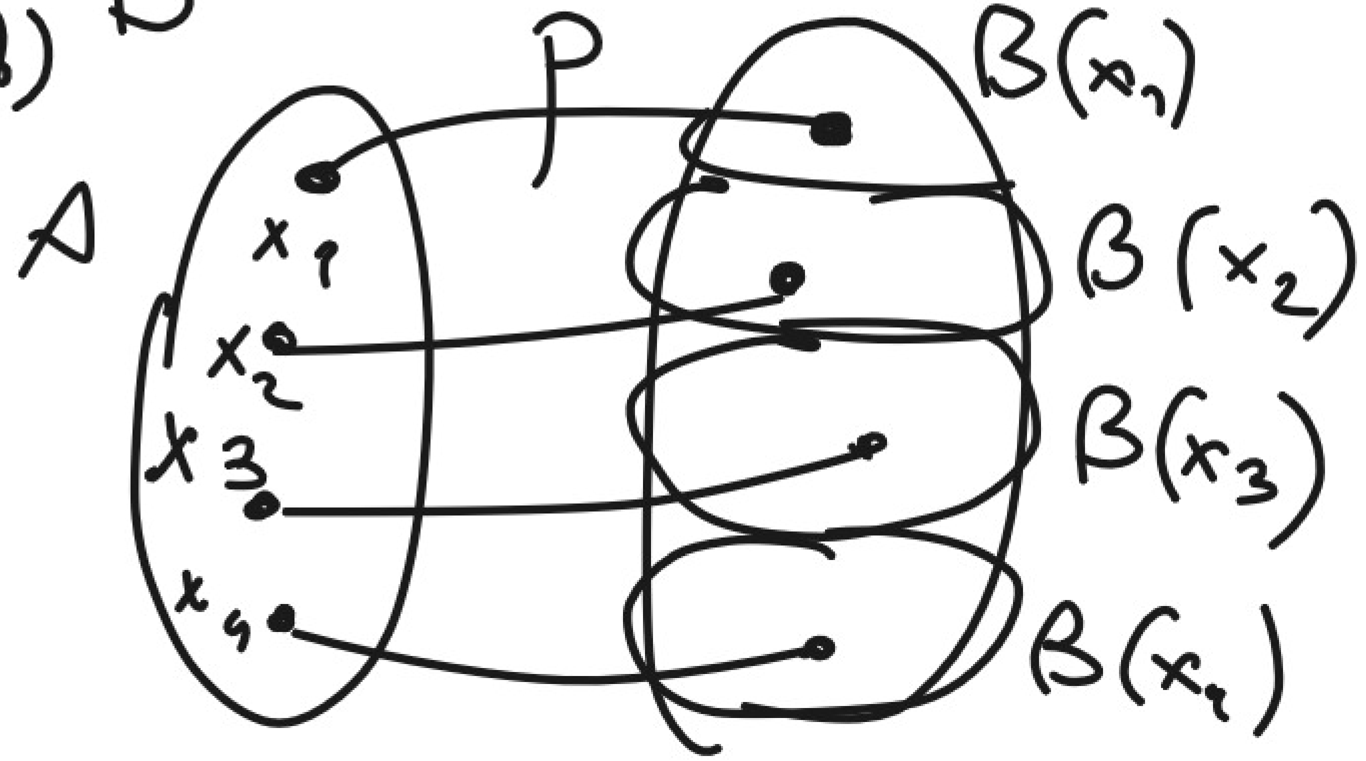
Теория типов Мартина-Лёфа с $\mathbb{N}$ (1984)

~~Гомотопическая теория типов~~

$f : \prod_{(x:A)} B$



$p : \sum_{(x:A)} B$



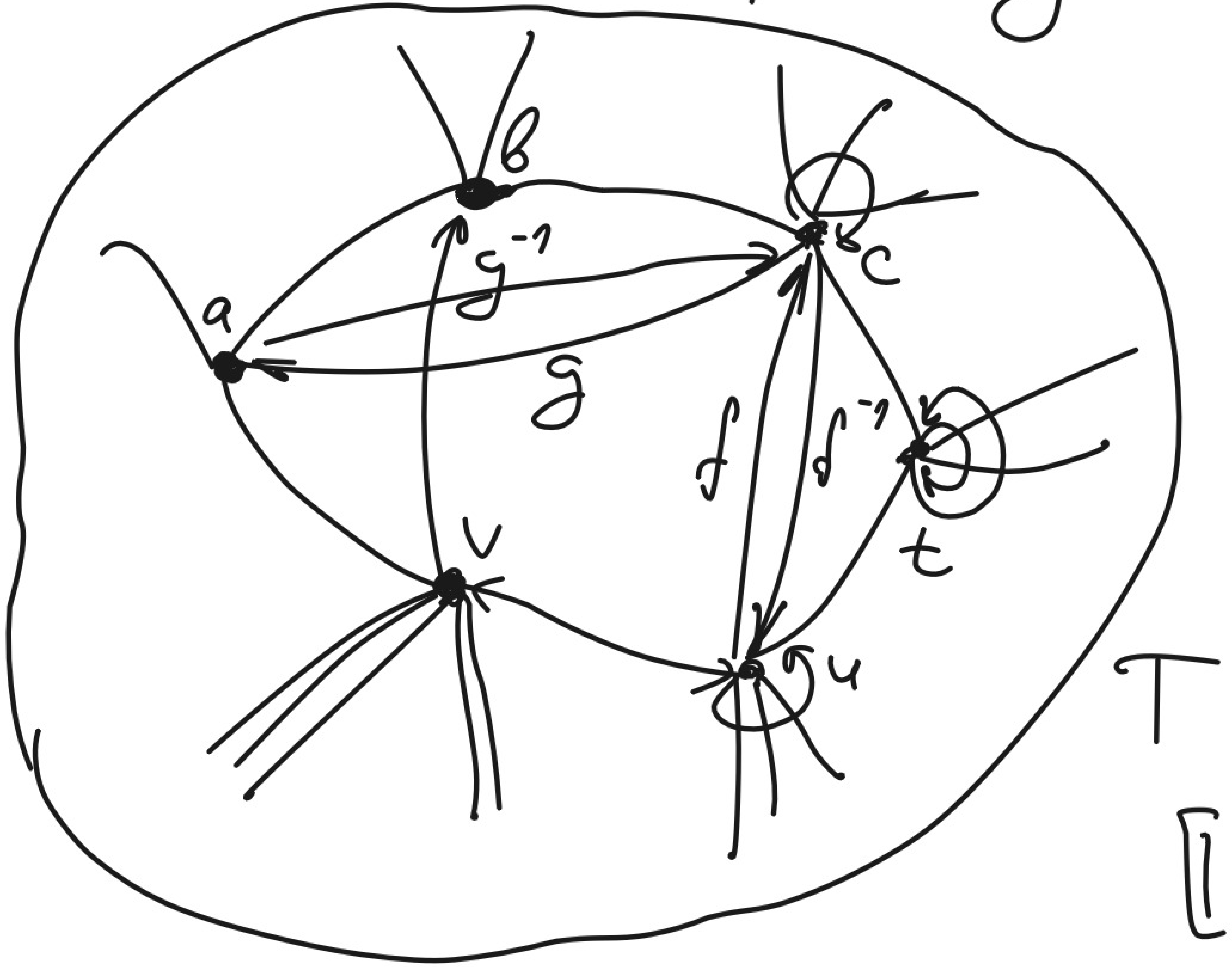
$+(\mathbb{N})$, $+(a =_A b)$

$\mathrm{refl} : a =_A a$ (где $a : A$)

Ну, похоже на множества...

Группоидная интерпретация теории типов (1996)

[[тип]] = группоид ← категория, где все морфизмы - изо



$a, b, c, t, u, v : T$

$f : ?$

! $f : u = c$

$[\![a =_T b]\!]$ - пути из a в b

Гомотопическая теория типов:

MLTT + высшие индуктивные типы +

Аксиома унивалентности:

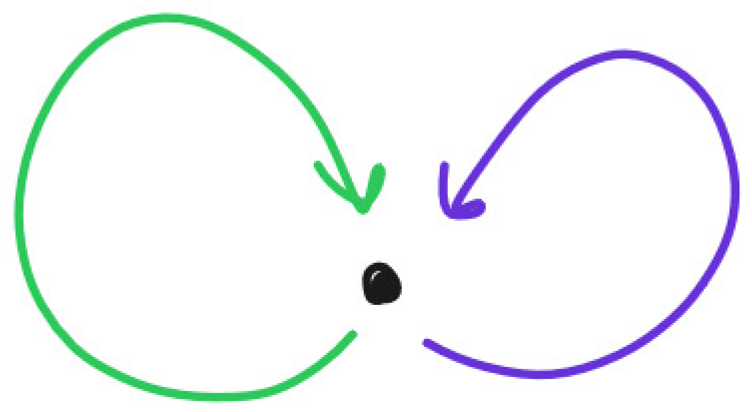
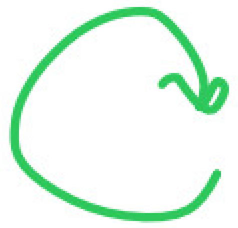
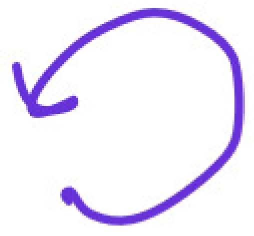
$$(T =_{Type} U) \simeq (T \simeq U)$$

равенство типов

изоморфизм типов, напр.

$$\begin{cases} f : T \to U \\ g, h : U \to T \\ g \circ f = id \\ f \circ h = id \end{cases}$$

$\pi_1(S)$ $\quad$ (S − тип, т.ч. $\sum_{(s_0 : S)} \prod_{(s_1 : S)} s_0 = s_1$)

$\pi_1\Big($  $\Big) = \langle$  $,$  $\rangle$

в cubical Agda:

```
data TwoLoops where
  dot : TwoLoops
  green : dot = dot
  purple : dot = dot
```

Круто! А "т. Брауэра" можно доказать?

Пока нет. Синтетическая теория гомотопий

—〃— топология?

Но: у STLC есть "топологическая" семантика:

$S \times T$ – product topology

$S \to T$ – *some* topology on the set of c.f.

Притворимся*, что она продолжается на HoTT.

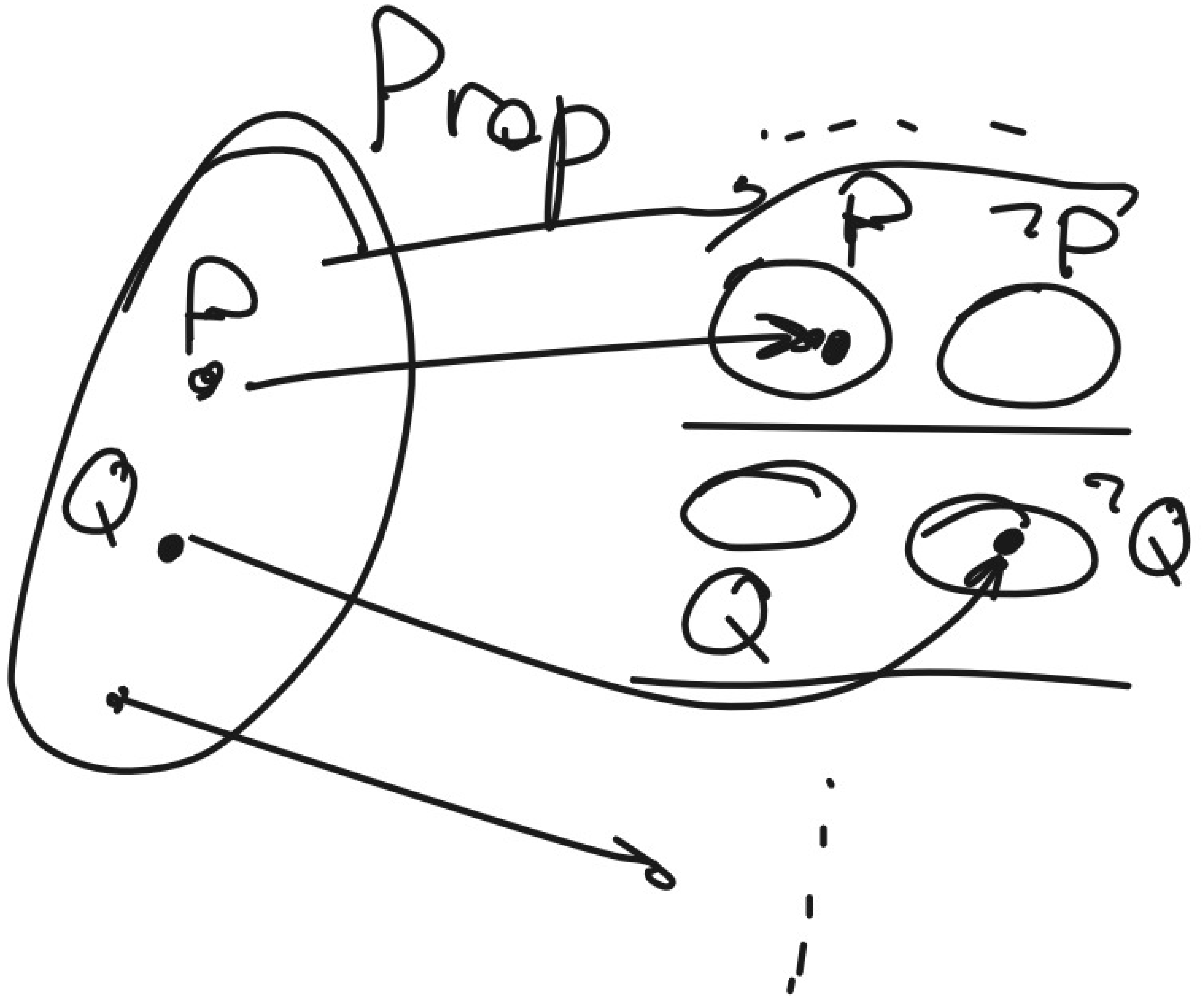
*Topological topos, 1979

Нужны доп. примитивы для работы с топологиями.

В доказательстве будет нужен LEM. Но:

$$\vdash \mathrm{lem} : \Pi_{(P : Prop)} P \vee \neg P$$

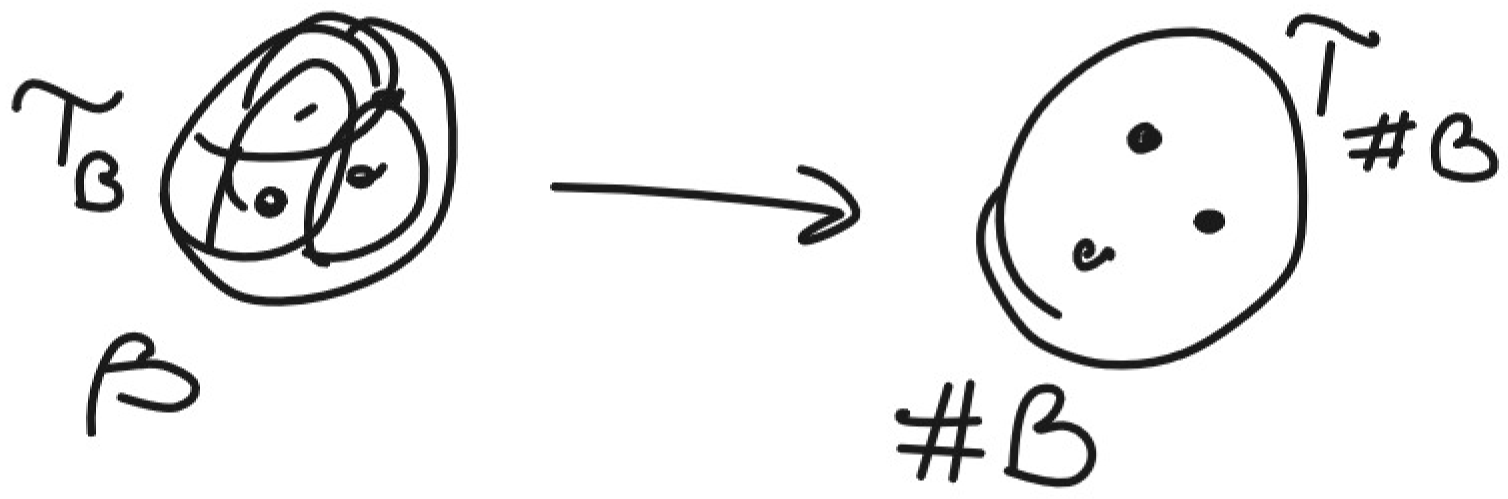
Постулирует (в нашей "семантике"), что



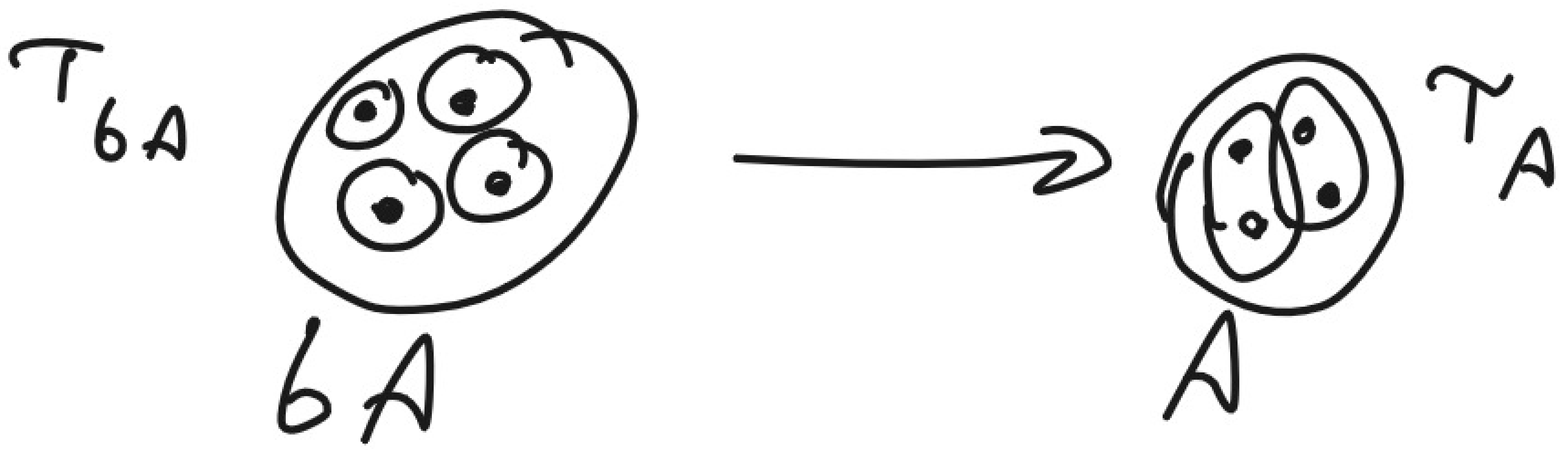
непрерывна?...

$f \in B^A$. Как её сделать "непрерывной"?

1. $f: A \to \#B$, где $\#$:



2. $f: bA \to B$, где b:



Формализм выделенных точек

$$\underbrace{x_1 :: A_1, \dots, x_n :: A_n}_{\text{"выделенные"}} \mid \underbrace{y_1 : B_1, \dots, y_m : B_m}_{\text{"некоторые" точки в пространствах}} \vdash t : T$$

Π :

$$\frac{\Delta \mid \Gamma \vdash A : \mathsf{Type} \qquad \Delta \mid \Gamma, x : A \vdash B : \mathsf{Type}}{\Delta \mid \Gamma \vdash \prod_{(x:A)} B : \mathsf{Type}} \qquad \frac{\Delta \mid \Gamma, x : A \vdash b : B}{\Delta \mid \Gamma \vdash \lambda x.\, b : \prod_{(x:A)} B}$$

$$\frac{\Delta \mid \Gamma \vdash f : \prod_{(x:A)} B \qquad \Delta \mid \Gamma \vdash a : A}{\Delta \mid \Gamma \vdash f(a) : B[a/x]} \qquad \frac{\Delta \mid \Gamma, x : A \vdash b : B \qquad \Delta \mid \Gamma \vdash a : A}{\Delta \mid \Gamma \vdash (\lambda x.\, b)(a) \equiv b[a/x]}$$

$$\frac{\Delta \mid \Gamma \vdash f : \prod_{(x:A)} B}{\Delta \mid \Gamma \vdash f \equiv (\lambda x.\, f(x))}$$

LEM можно постулировать как правило:

$$\frac{\Delta \mid \cdot \vdash P : \mathsf{Prop}}{\Delta \mid \cdot \vdash \mathsf{lem}_P : P \vee \neg P}$$

Определение ♯

"внутри ♯ можно игнорировать топологию"

$$\frac{\Delta, \Gamma \mid \cdot \vdash A : \mathsf{Type}}{\Delta \mid \Gamma \vdash \sharp A : \mathsf{Type}} \qquad \frac{\Delta, \Gamma \mid \cdot \vdash M : A}{\Delta \mid \Gamma \vdash M^{\sharp} : \sharp A} \qquad \frac{\Delta \mid \cdot \vdash M : \sharp A}{\Delta \mid \Gamma \vdash M_{\sharp} : A}$$

$$\frac{\Delta \mid \cdot \vdash M : A}{\Delta \mid \Gamma \vdash (M^{\sharp})_{\sharp} \equiv M : A} \qquad \frac{\Delta \mid \Gamma \vdash M : \sharp A}{\Delta \mid \Gamma \vdash (M_{\sharp})^{\sharp} \equiv M : \sharp A}$$

Определение ♭

"♭A – тип выделенных в A точек" или: "тип глобальных констант"

$$\frac{\Delta \mid \cdot \vdash A : \mathsf{Type}}{\Delta \mid \Gamma \vdash \flat A : \mathsf{Type}} \qquad \frac{\Delta \mid \cdot \vdash M : A}{\Delta \mid \Gamma \vdash M^\flat : \flat A}$$

$$\frac{\Delta \mid \Gamma, x : \flat A \vdash C : \mathsf{Type} \qquad \Delta \mid \Gamma \vdash M : \flat A \qquad \Delta, u :: A \mid \Gamma \vdash N : C[u^\flat/x]}{\Delta \mid \Gamma \vdash (\mathsf{let}\ u^\flat := M\ \mathsf{in}\ N) : C[M/x]}$$

$$\frac{\Delta \mid \Gamma, x : \flat A \vdash C : \mathsf{Type} \qquad \Delta \mid \cdot \vdash M : A \qquad \Delta, u :: A \mid \Gamma \vdash N : C[u^\flat/x]}{\Delta \mid \Gamma \vdash (\mathsf{let}\ u^\flat := M^\flat\ \mathsf{in}\ N) \equiv N[M/u] \;:\; C[M^\flat/x]}$$

Какое $\mathbb{R}$ взять?

Cauchy seq. $\underset{(AC)}{\simeq}$ Dedekind cuts

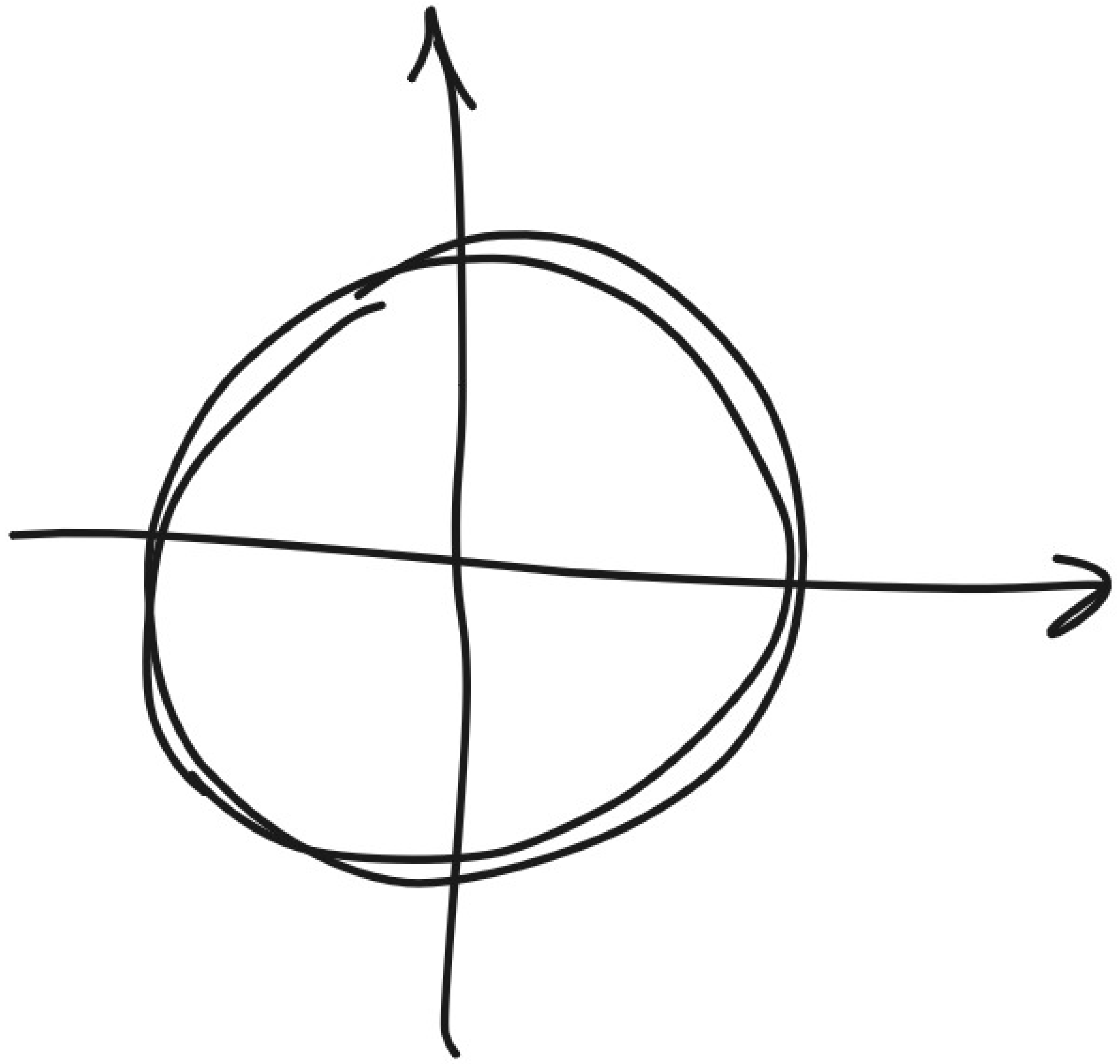
$\mathbb{R}_C \simeq \flat \mathbb{R}_C$ $\qquad$ $\mathbb{R}$

Дискретная топология... $\qquad$ не дискретно

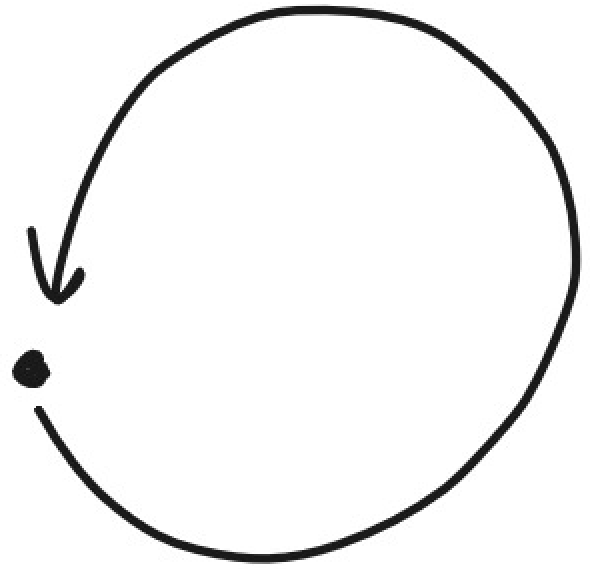
Когезивность

$$A :: \mathrm{Type} \vdash \left(\flat A \overset{\flat}{\simeq} A \right) \leftrightarrow \left(A \overset{\mathrm{const}}{\simeq} \mathbb{R} \to A \right)$$

Последний компонент: "форма" типа

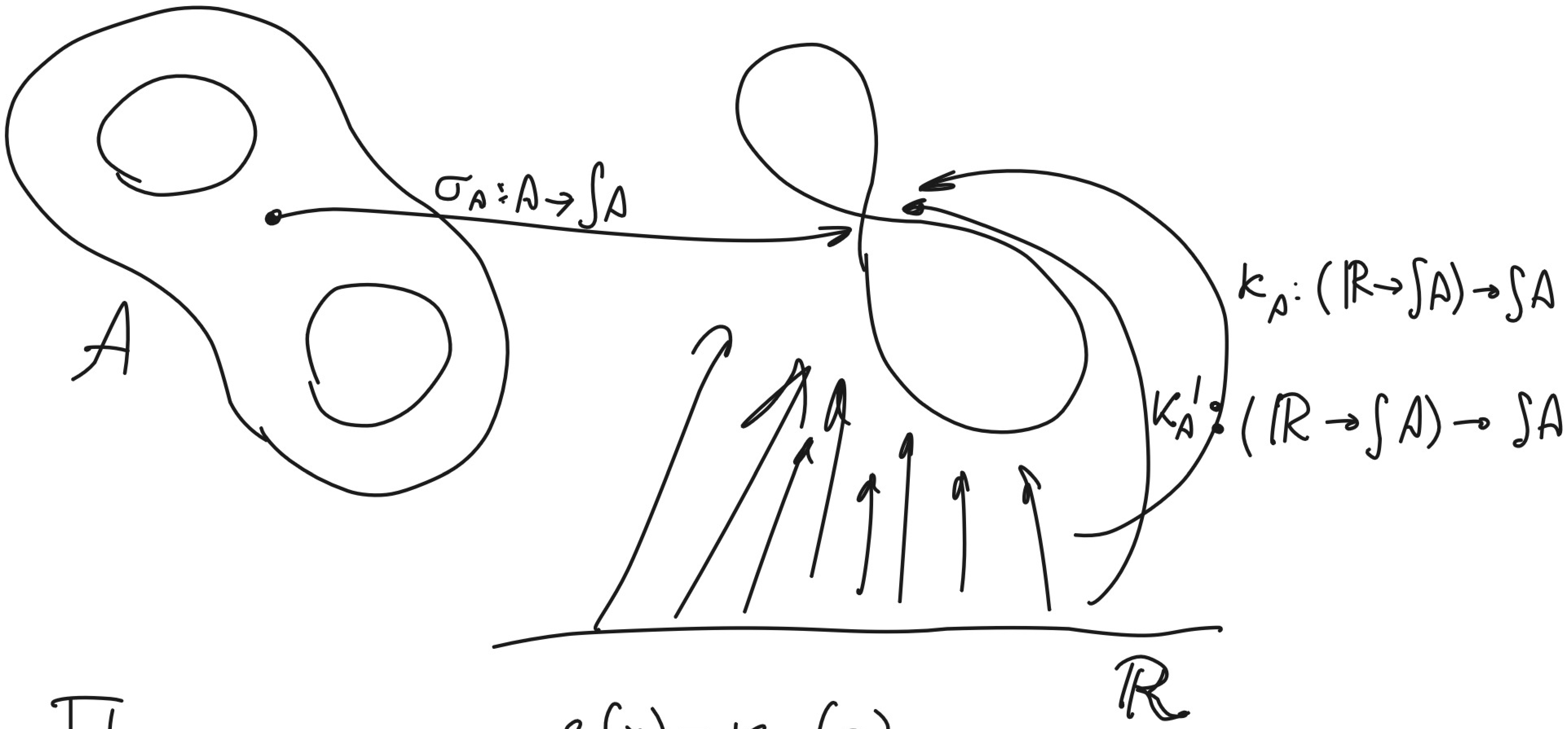


$$S^1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$$



```
data S1 where
  dot : S1
  loop : dot = dot
```

$$\int S^1 \simeq S^1$$



$$ax_A : \prod_{(g : \mathbb{R} \to \int A)(x : \mathbb{R})} g(x) = \kappa_A(g)$$

$$ax'_A : \prod_{(x : \int A)} x = \kappa'_A(\mathrm{const}\ x)$$

Наконец, доказательство "т. Брауэра":

$$\mathbb{D}^2 :\equiv \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

$$\prod_{(f : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{D}^2)} \# \left\| \sum_{(x : \mathbb{D}^2)} f(x) = x \right\|$$

• $\#\|A\| \simeq \neg\neg A$ (LEM). Так что можем повторить д-во со сл. 4. Основные шаги:

1) Построение ретракта $r_f : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{S}^1$

2) Сохранение ретракта $\int \mathbb{S}^1 \leq \int \mathbb{D}^2$

3) $\int \mathbb{S}^1 \simeq S^1$, $\int \mathbb{D}^2$ стягиваемо

$\int \mathbb{D}^2 \subseteq \int \mathbb{R}^2 \simeq \left(\int \mathbb{R}\right)^2$ — стягиваемо

$$\int \mathbb{S}^1 \simeq \int \mathrm{Coeq.}\left(\mathbb{R} \underset{+1}{\overset{id}{\rightrightarrows}} \mathbb{R}\right) \simeq \mathrm{Coeq}\left(\int \mathbb{R} \underset{\int(+1)}{\overset{id}{\rightrightarrows}} \int \mathbb{R}\right) \simeq$$

$$\simeq \mathrm{Coeq}\,(1 \rightrightarrows 1) \simeq S^1$$